

УДК 534.222.1

© 1992 г. В.А. Буров, М.Н. Рычагов

**ДИФРАКЦИОННАЯ ТОМОГРАФИЯ
КАК ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ.
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОДХОД. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЙ ВАРИАНТ**

В работе представлены некоторые результаты теоретического анализа, численного моделирования и экспериментального исследования акустических томографических задач в рамках решения более общей задачи, а именно – обратной задачи рассеяния. Работа разделена на две взаимосвязанные части. В настоящей – первой части – решается линеаризованная обратная задача в приближении однократного рассеяния, что позволяет выявить соответствие развиваемого подхода стандартным методам волновой томографии, основанным на процедуре интерполяции в пространстве Фурье. Во второй части разработана процедура реконструкции, позволяющая учитывать многократные рассеяния первичного поля на восстанавливаемых неоднородностях.

Одним из сдерживающих факторов на пути создания алгоритмов реконструкции в дифракционной томографии является отсутствие детально разработанных методов (математических и вычислительных) решения задач восстановления, в которых существенными являются процессы рассеяния исходного поля на области локализации неоднородности. Среди этих задач значительную роль в прикладном аспекте играют обратные задачи рассеяния (ОЗР) для скалярного волнового уровня. Сущность ОЗР скалярной акустики состоит в определении количественных характеристик локализованной неоднородности среды (скорости звука, вязкости, теплопроводности и т.д.) по данным рассеяния падающего на неоднородность известного поля [1–4].

В настоящей работе представлены некоторые результаты теоретического анализа, численного моделирования и экспериментального исследования акустических томографических задач в рамках решения более общей задачи, а именно – обратной задачи рассеяния. Данный подход позволил разработать эффективные алгоритмы восстановления неоднородностей, основанные на моделях, адекватных физическим механизмам распространения звуковых волн в исследуемом объекте. Собственно же томографическая постановка эксперимента является в этом случае способом съема данных о рассеянии и определяет эффективность и быстродействие вычислительных процессов.

Работа разделена на две взаимосвязанные части.

В первой части решается линеаризованная ОЗР в приближении однократного рассеяния (приближении Борна), что позволяет выявить соответствие развиваемого подхода стандартным методам волновой томографии, основанным на процедуре интерполяции в пространстве Фурье [5–7].

Во второй части рассматривается задача реконструкции контрастных рассеивателей. В этом случае учитываются многократные рассеяния первичного поля на области локализации неоднородности.

1. Проекционные соотношения дифракционной томографии

Пусть финитный в пространстве R объект локализован в области \mathcal{R} , которая полностью покрывается кругом радиуса D_{R_0} (рассматривается двумерная задача). Пусть объект помещен в однородную среду, характеризуемую плотностью $\rho_0 = \text{const}$ и скоростью звука $c_0 = \text{const}$, причем внутри круга D_{R_0} выполнено условие $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$ для

любого вектора \mathbf{r} . Предположим, что на области \mathcal{R} имеется неоднородность скорости звука $c(\mathbf{r})$, описываемая функцией $\xi(\mathbf{r})$, задаваемой в виде

$$\xi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1/c_0^2 - 1/c^2(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \mathcal{R}, \\ 0, & \mathbf{r} \notin \mathcal{R} \end{cases} \quad (1)$$

Будем рассматривать случай, когда положение объекта фиксировано в пространстве, а облучение исследуемой области производится плоскими волнами

$$U_0(\mathbf{r}) = U_0 \exp\{jk_0 s_0^\alpha \mathbf{r}\} \quad (2)$$

с различных направлений, задаваемых набором волновых векторов $\{\mathbf{k}_0^\alpha: \mathbf{k}_0^\alpha = k_0 s_0^\alpha\}$, где $s_0^\alpha = s_0(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ — единичный вектор. Свяжем с неподвижным объектом систему координат (x, y) . Пусть рассеянное поле $u(\mathbf{z})$ регистрируется линейной матрицей приемников с конечной апертурой D_A , расположенной на расстоянии l_0 от начала координат, причем радиус-вектор \mathbf{s} , направленный к центру решетки, перпендикулярен линии L_r , на которой она располагается. Предположим также, что геометрические размеры измерительной установки таковы, что выполнены условия $D_A \gg 2R_0$, $l_0 > R_0$.

Если допустить независимое вращение приемной апертуры вокруг начала системы координат и вращение антенной решетки излучателей, с помощью которой формируются плоские волны (2), то в рамках вышеприведенных ограничений можно учесть многие из возможных вариантов томографических экспериментов.

Введем, следуя [8], единичный вектор $s_0^{\alpha\perp} = s_0^\perp(\alpha) = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$, ортогональный вектору s_0^α . Предположим, что для любого вектора $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathcal{R} \subset D_{R_0}$ выполнено условие

$$\left\| \frac{u(\mathbf{r})}{U_0(\mathbf{r})} \right\| \ll 1, \quad (3)$$

соответствующее малости рассеянного поля $u(\mathbf{r})$ по сравнению с $U_0(\mathbf{r})$ на \mathcal{R} . В этом случае рассеянное поле $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in Z$ (Z — область приема), регистрируемое на линии приема $L_r: l_0 s_0(\alpha + \vartheta) + \zeta s_0^\perp(\alpha + \vartheta)$, где ϑ — угол, образуемый векторами s_0 и \mathbf{s} , а ζ — координата точки наблюдения на L_r , может быть вычислено с помощью выражения

$$u(\mathbf{z}) = \int_{\mathcal{R}} g_0(\mathbf{z}, \mathbf{r}) \epsilon(\mathbf{r}) U_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4)$$

в котором функция Грина задана в виде

$$g_0(\mathbf{z}, \mathbf{r}) = -\frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|). \quad (5)$$

В (4) и (5) использованы следующие обозначения: $\epsilon(\mathbf{r}) = \omega_0^2 \xi(\mathbf{r})$, ω_0 — угловая частота, $H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|)$ — функция Ганкеля нулевого порядка первого рода.

В системе координат (ζ, η) , повернутой относительно системы (x, y) на угол $(-\alpha - \vartheta)$, вектор $\mathbf{z} - \mathbf{r} = l_0 s_0(\alpha + \vartheta) + \zeta \cdot s_0^\perp(\alpha + \vartheta) - \mathbf{r}$ будет иметь координаты $(l_0 - x \cos(-\alpha - \vartheta) + y \sin(-\alpha - \vartheta), \zeta - x \sin(-\alpha - \vartheta) - y \cos(-\alpha - \vartheta))$.

Тогда значения рассеянного поля (4) в точках приема ζ на линии L_r , отстоящей на расстоянии l_0 от центра неподвижной системы координат, связанной с объектом, могут быть вычислены по формуле

$$u_{l_0}(\zeta, s_0^\alpha) = -\frac{j\omega_0^2 U_0}{4\pi} \iint_{D_{R_0}} \xi(\mathbf{r}) \frac{1}{\sqrt{k_0^2 - \beta^2}} \exp\{j\beta\zeta\} \cdot \exp\{jk_0 s_0(\alpha) \mathbf{r}\} \exp\{j[\sqrt{k_0^2 - \beta^2} (l_0 - x \cos(-\alpha - \vartheta) + y \sin(-\alpha - \vartheta))]\} \cdot \exp\{j\beta[-x \sin(-\alpha - \vartheta) - y \cos(-\alpha - \vartheta)]\} dx dy d\beta, \quad (6)$$

где β — линейная координата пространственного спектра проекции, причем $\sqrt{k_0^2 - \beta^2} > 0$, если $|\beta| < k_0$ и $\text{Im}\sqrt{k_0^2 - \beta^2} > 0$, если $|\beta| > k_0$ [8].

Выполнив преобразование Фурье в обеих частях (6) и распространив интегрирование на все пространство R^2 , получим

$$\tilde{u}_{l_0}(\beta, s_0^\alpha) = -\frac{j\omega_0^2 U_0}{2\gamma} \exp\{j\gamma l_0\} \int_{R^2} \xi(x, y) \exp\{-j[\gamma \cos(\alpha + \vartheta) - \beta \cdot \sin(\alpha + \vartheta) - k_0 \cos \alpha] x\} \exp\{-j[\gamma \sin(\alpha + \vartheta) + \beta \cos(\alpha + \vartheta) - k_0 \sin \alpha] y\} dx dy, \quad (7)$$

в котором обозначение $[\tilde{\cdot}]$ означает соответствующий фурье-образ, а $\gamma = \sqrt{k_0^2 - \beta^2}$. Имея в виду, что интегрирование в (7) соответствует двумерному преобразованию Фурье функции $\xi(x, y)$, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}[(\gamma - k_0 \cos \vartheta) s_0(\alpha + \vartheta) + (\beta + k_0 \sin \vartheta) s_0^\perp(\alpha + \vartheta)] = \\ = \frac{j2\gamma}{\omega_0^2 U_0} \exp\{-j\gamma l_0\} \tilde{u}_{l_0}(\beta, s_0^\alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть направление радиус-вектора s , характеризующего положение приемной апертуры L_r , фиксировано в пространстве и совпадает с направлением оси y , т.е. L_r перпендикулярна y . Если величина угла α изменяется в пределах $[0, \pi]$, тогда, учитывая то обстоятельство, что для данной схемы справедливо равенство $\alpha + \vartheta = \pi/2$, значения пространственных компонент $\tilde{\xi}$ следует определять по формуле

$$\tilde{\xi}[(\gamma - k_0 \sin \alpha) s_0(\frac{\pi}{2}) + (\beta + k_0 \cos \alpha) s_0^\perp(\frac{\pi}{2})] = \frac{2\gamma j}{\omega_0^2 U_0} \exp[j\gamma l_0] \tilde{u}_{l_0}(\beta, s_0^\alpha), \quad (9)$$

или, в других обозначениях,

$$\begin{aligned} \tilde{e}(-\beta - k_0 \cos \alpha, \sqrt{k_0^2 - \beta^2} - k_0 \sin \alpha) = \\ = \frac{j2\sqrt{k_0^2 - \beta^2}}{U_0} \exp\{-j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} l_0\} \tilde{u}_{l_0}(\beta, s_0^\alpha). \end{aligned} \quad (10)$$

Введем дополнительно к системе координат (x, y) систему (ζ, η) в R -пространстве. Пусть нули этих систем совпадают, причем, если система (x, y) связана с объектом, то система (ζ, η) ориентирована таким образом, что направление оси η совпадает с направлением вектора s_0^α для любого α .

Рассмотрим такую схему регистрации данных, когда направления векторов s_0^α и s совпадают для любого α , причем начало системы координат (x, y) и (ζ, η) является центром поворота приемно-излучательной системы. В рамках данной схемы ($\vartheta = 0$) уравнение (8) переписется в следующем виде:

$$\tilde{\xi}[(\gamma - k_0) s_0(\alpha) + \beta s_0^\perp(\alpha)] = \frac{2\gamma j}{\omega_0^2 U_0} \exp[-j\gamma l_0] \tilde{u}_{l_0}(\beta, s_0^\alpha), \quad (11)$$

либо, по аналогии с (10),

$$\begin{aligned} \tilde{e}(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \cos \alpha - \beta \sin \alpha - k_0 \cos \alpha, \sqrt{k_0^2 - \beta^2} \sin \alpha + \beta \cos \alpha - k_0 \sin \alpha) = \\ = \frac{2\sqrt{k_0^2 - \beta^2} j}{U_0} \exp\{-j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} l_0\} \tilde{u}_{l_0}(\beta, s_0^\alpha). \end{aligned} \quad (12)$$

Полученные выражения (8) и (11) являются общими и составляют основу проекционных алгоритмов современной дифракционной томографии. Уравнение (8) используется в том случае, когда положение приемной апертуры фиксировано (т.е. фиксировано направление радиус-вектора s), а облучение объекта осуществляется с различных направлений k_0^α/k_0 [5, 6]. Что же касается уравнения (11), то, как видно из предшествующего изложения, с его помощью можно осуществить реконструкцию неоднородности в таких схемах съема данных, в которых приемная и передающая

апертуры перпендикулярны направлению распространения поля (направления векторов s_0^α и s совпадают) и совместно вращаются вокруг объекта [7]. И в том, и в другом случае имеется в виду, что сам объект остается неподвижным.

2. Структура данных при различных схемах организации томографического эксперимента: Т-матричный подход

Применим для анализа структуры томографических данных (10) и (12) Т-матричный формализм обратной задачи [9], оставаясь в рамках борновского приближения (3).

Запишем уравнение (4) в виде

$$U(v, k_0 s_0^\alpha) = U_0(v, k_0 s_0^\alpha) + \int_{\mathcal{R}} g_0(v, r) \epsilon(r) U(r, k_0 s_0^\alpha) dr, \quad (13)$$

где $U(v, k_0 s_0^\alpha)$ — полное поле на областях рассеяния ($v \in \mathcal{R}$) и приема ($v \in Z$). В дальнейшем поле асимптотическая аппроксимация $u(z) = U(z, k_0^\alpha) - U_0(z, k_0^\alpha)$ в (13) с учетом того, что $H_0^{(1)} \sim (2/\pi k_0 |z - r|)^{1/2} \exp\{j[k_0 |z - r| - \pi/4]\}$, имеет вид

$$u(z, k_0 s_0^\alpha) = -j(1/8\pi z k_0)^{1/2} \exp\left\{-j\frac{\pi}{4}\right\} \exp\{jk_0 s^\beta z\} f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha), \quad (14)$$

где амплитуда рассеяния $f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha)$ определяется выражением

$$f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} \exp\{-jk_0 s^\beta r\} \epsilon(r) U(r, k_0 s_0^\alpha) dr, \quad (15)$$

в котором s^β — единичный вектор, характеризующий направление рассеяния.

В 3-мерном случае выражение (14) имеет вид

$$u(z, k_0 s_0^\alpha) = \exp\{jk_0 z/4\pi z\} f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha). \quad (16)$$

Пусть функция $\xi(r)$, заданная в виде (1), принадлежит на \mathcal{R} классу L_2 . Определим на \mathcal{R} для любого параметра α функцию

$$T(r, k_0^\alpha) = \epsilon(r) U(r, k_0^\alpha), \quad (17)$$

где $U(r, k_0^\alpha)$ задана в виде (13).

Функция $T(r, k_0^\alpha)$ описывает источники вторичного излучения на \mathcal{R} , образованные в результате взаимодействия падающего поля $U_0(r, k_0^\alpha)$ с неоднородностями среды $\xi(r)$. Поскольку функция $\xi(r)$ финитна на компакте \mathcal{R} , то функция $T(r, k_0^\alpha)$ также является финитной для любого фиксированного α , причем область локализации $T(r, k_0^\alpha)$ совпадает с \mathcal{R} .

Введем обозначение

$$T(k, k_0^\alpha) \equiv \int_{\mathcal{R}} \exp\{-jk r\} \epsilon(r) U(r, k_0^\alpha) dr \quad (18)$$

— матрица рассеяния, характеризующая рассеянное поле в направлении $k/|k|$ при падении поля U_0 в направлении s_0^α . Из (18) следует, что для каждого конкретного α функция $T(k, k_0^\alpha)$ является образом Фурье вторичных источников $T(r, k_0^\alpha)$. Причем экспериментальному определению поддаются только те компоненты Т-матрицы, которые соответствуют излучающим источникам в спектре рассеяния, а именно удовлетворяется условие $|k| = k_0$. Понятно, что в пространстве волновых векторов \mathcal{K} , характеризующем рассеянные волны, этому случаю соответствуют амплитуды рассеяния на сферической оболочке (15), называемой поверхностью Эвальда [10]. Для двумерной задачи такой поверхностью является окружность радиуса k_0 .

В борновском приближении однократного рассеяния выражение для функции $T^{(B)}(r, k_0^\alpha)$ имеет вид

$$T^{(B)}(r, k_0 s_0^\alpha) = \epsilon(r) \exp\{jk_0 s_0^\alpha r\}, \quad (19)$$

в котором параметр α фиксирован, а $U_0 = 1$.

С учетом (19) выражение (7) переписывается в виде

$$\tilde{u}_{l_0}(\beta, s_0^\alpha) = -\frac{j}{2\gamma} \exp\{-j\gamma l_0\} \int_{R^2} T^{(B)}(x, y; \mathbf{k}_0^\alpha) \exp\{-j[\gamma \cos(\alpha + \vartheta) - \beta \sin(\alpha + \vartheta)]x\} \exp\{-j[\gamma \sin(\alpha + \vartheta) + \beta \cos(\alpha + \vartheta)]y\} dx dy. \quad (20)$$

По аналогии с (8) будем иметь

$$T^{(B)}(\gamma s_0(\alpha + \vartheta) + \beta s_0^\perp(\alpha + \vartheta), \mathbf{k}_0^\alpha) = 2\gamma j \exp\{-j\gamma l_0\} \tilde{u}_{l_0}(\beta, \mathbf{k}_0^\alpha). \quad (21)$$

Сравнивая (21) и (8), получим борновский вариант уравнения рассеяния для акустических обратных задач томографического типа

$$\tilde{\epsilon}[(\gamma - k_0 \cos \vartheta) s_0(\alpha + \vartheta) + (\beta + k_0 \sin \vartheta) s_0^\perp(\alpha + \vartheta)] = T^{(B)}(\gamma s_0(\alpha + \vartheta) + \beta s_0^\perp(\alpha + \vartheta), k_0 s_0^\alpha). \quad (22)$$

Пусть \mathcal{K} — пространство волновых векторов, характеризующих рассеянные волны, а \mathcal{K}_0 — пространство волновых векторов падающих полей. Из (10) и (12) следует, что реконструируемые пространственные частоты

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - k_0 s_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} \epsilon(\mathbf{r}) \exp\{-j(\mathbf{k} - k_0 s_0^\alpha) \mathbf{r}\} d\mathbf{r} \quad (23)$$

принадлежат пространству $\mathcal{L}: \mathbf{l} = \mathbf{k} - k_0 s_0^\alpha, \mathbf{k} \in \mathcal{K}, \mathbf{k}_0 \in \mathcal{K}_0$, каждый элемент которого соответствует разности волновых векторов пространств \mathcal{K} и \mathcal{K}_0 .

Тогда для схемы с фиксированной приемной апертурой из (10) и (22) следует, что

$$\tilde{\epsilon}(-\beta - k_0 \cos \alpha, \sqrt{k_0^2 - \beta^2} - k_0 \sin \alpha) = T^{(B)}(-\beta, \sqrt{k_0^2 - \beta^2}). \quad (24)$$

Набор полуокружностей данных в импульсном пространстве, соответствующий (24), представлен на рис. 1.

Для схемы с согласованной приемно-излучательной системой (рис. 2) из (12) и (22) получим

$$\tilde{\epsilon}(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \cos \alpha - \beta \sin \alpha - k_0 \cos \alpha, \sqrt{k_0^2 - \beta^2} \sin \alpha + \beta \cos \alpha - k_0 \sin \alpha) = T^{(B)}(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \cos \alpha - \beta \sin \alpha, \sqrt{k_0^2 - \beta^2} \sin \alpha + \beta \cos \alpha). \quad (25)$$

Выделенные участки окружностей Эвальда на рис. 1 и рис. 2 соответствуют экспериментальной регистрации проекционных данных.

Из (24) и (25) следует, что при помощи проекционных соотношений (10) и (12) пространственный спектр искомого рассеивателя может быть восстановлен в "информационном" круге с радиусом $l_{\max} = \sqrt{2}k_0$. Причиной этого является то, что в проекционных схемах данные регистрируются на некоторой линии L_r , отстоящей на расстоянии l_0 от объекта (просветные данные). Поэтому в уравнении (6) была выполнена замена $|l_0 - x \cos(-\alpha - \vartheta) + y \sin(-\alpha - \vartheta)|$ на $l_0 - x \cos(-\alpha - \vartheta) + y \sin(-\alpha - \vartheta)$, что и определило итоговый вид соотношений (10) и (12). При выводе же (22) не использовались какие-либо ограничения, касающиеся схемы съема данных. Поэтому в рамках данного метода решения ОЗР можно реализовать способ томографического эксперимента, отличающийся от описанных выше и обладающий более высокими метрологическими возможностями.

Основная идея заключается в том, чтобы экспериментально регистрировать амплитуды и фазы плоских волн, рассеянных объектом во всех направлениях s^β при облучении его с набора направлений $\{s_0^\alpha\}$. Измерение амплитуды давления звукового поля должно при этом производиться протяженным преобразователем, чем достигается физическое разложение рассеянного поля на области приема по плоским волнам.

Перемещение приемного преобразователя вдоль окружности с центром в начале системы координат, совмещенной с исследуемым объектом, осуществляется дискретно

$$s \vartheta_n = \frac{2\pi}{N} n, \text{ где } \vartheta_n \text{ — величина угла, образованного волновыми векторами } \mathbf{k}^\beta \text{ и } \mathbf{k}_0^\alpha$$

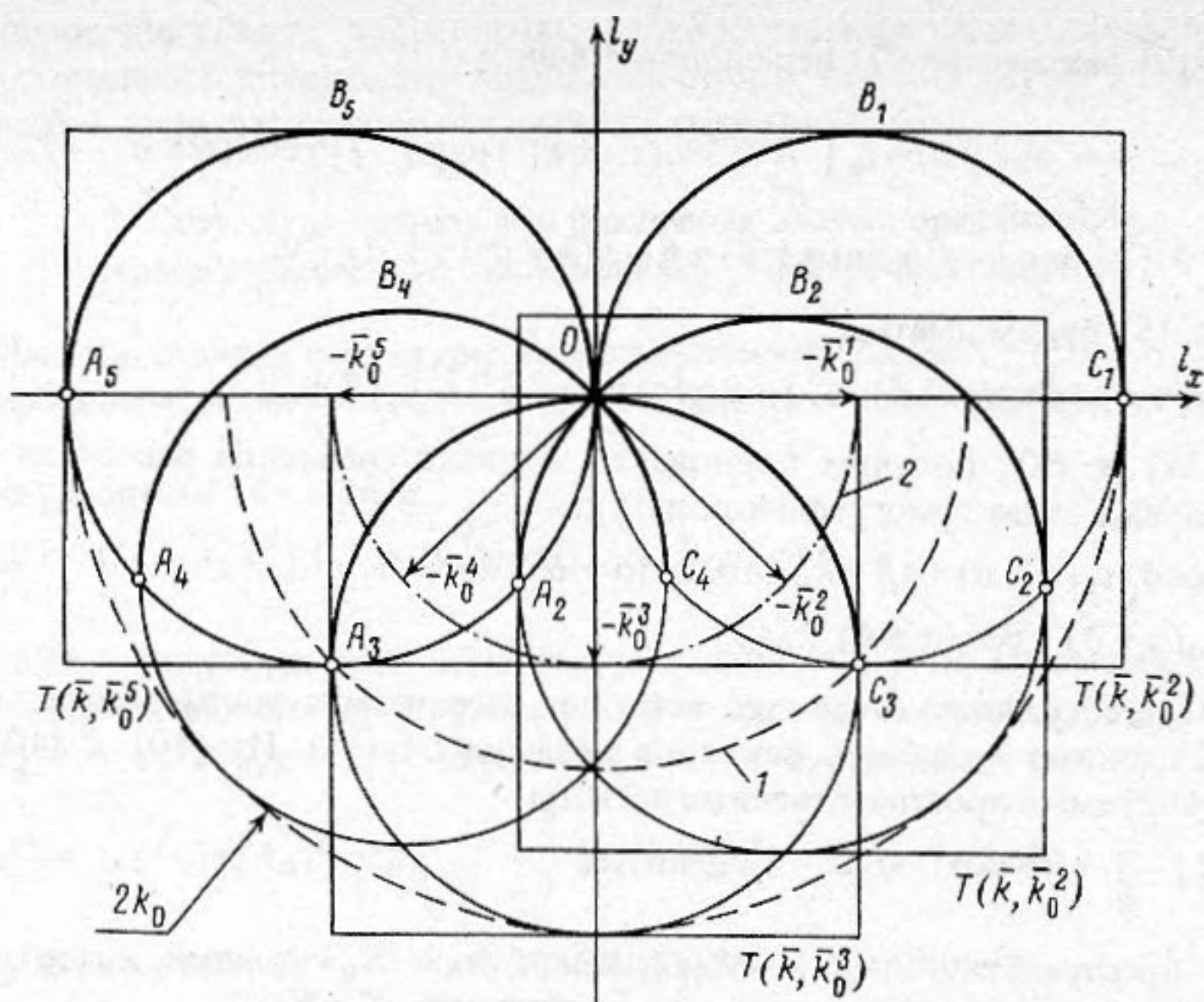


Рис. 1. Соответствие элементов T -матриц компонентам пространственного спектра неоднородности для схемы с фиксированной приемной апертурой. Выделенные жирной чертой участки окружности – данные, получаемые с помощью проекционных соотношений. 1 – окружность радиуса $\sqrt{2}k_0$; 2 – линия волновых векторов k_0^α

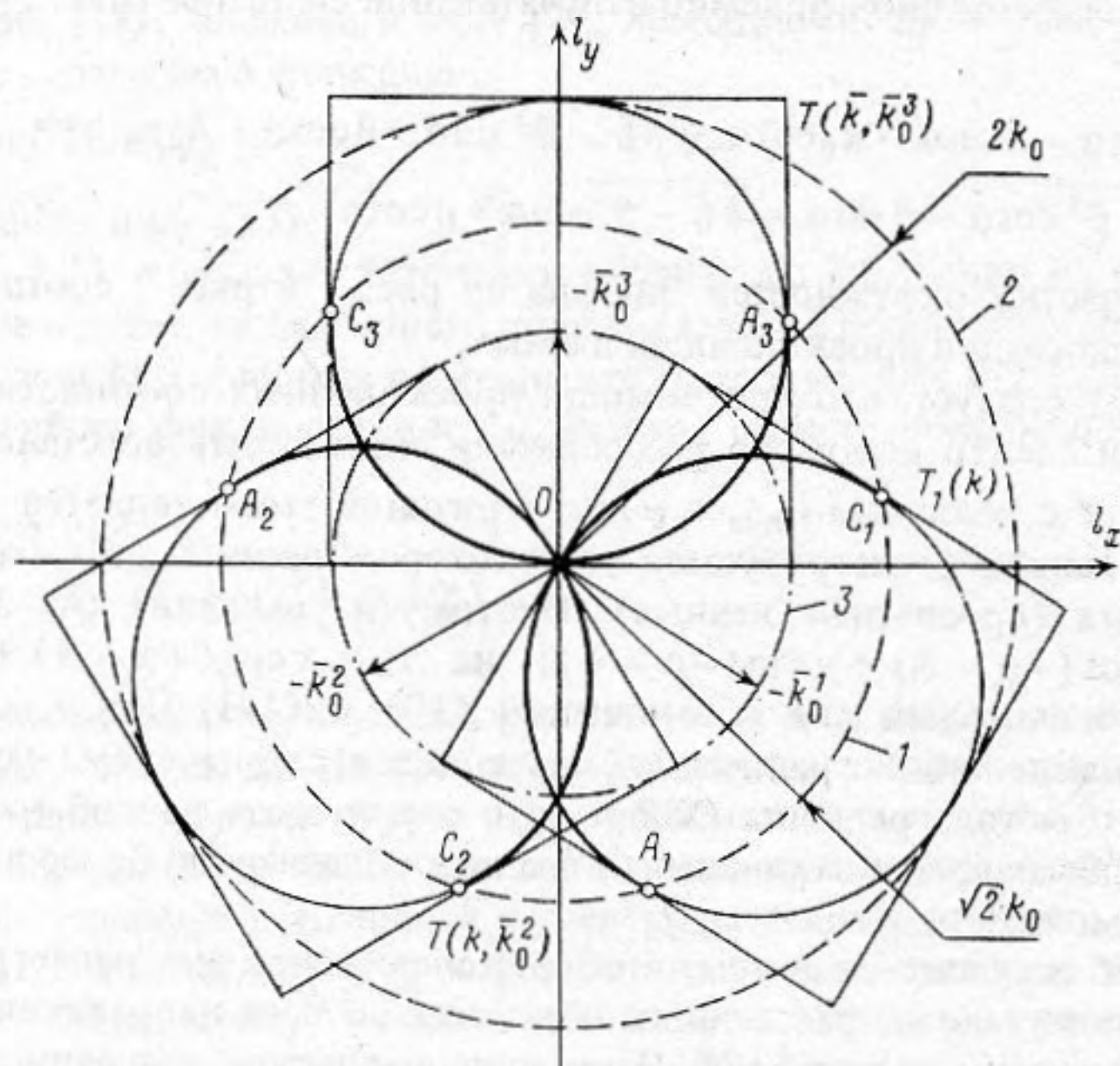


Рис. 2. Соответствие элементов T -матриц компонентам пространственного спектра неоднородности для схемы с согласованной приемно-передающей системой. Выделенные жирной чертой участки окружности – данные, получаемые с помощью проекционных соотношений. Цифрами обозначены границы информационных областей: 1 – проекционный подход; 2 – T -матричный подход; 3 – линия волновых векторов k_0^α

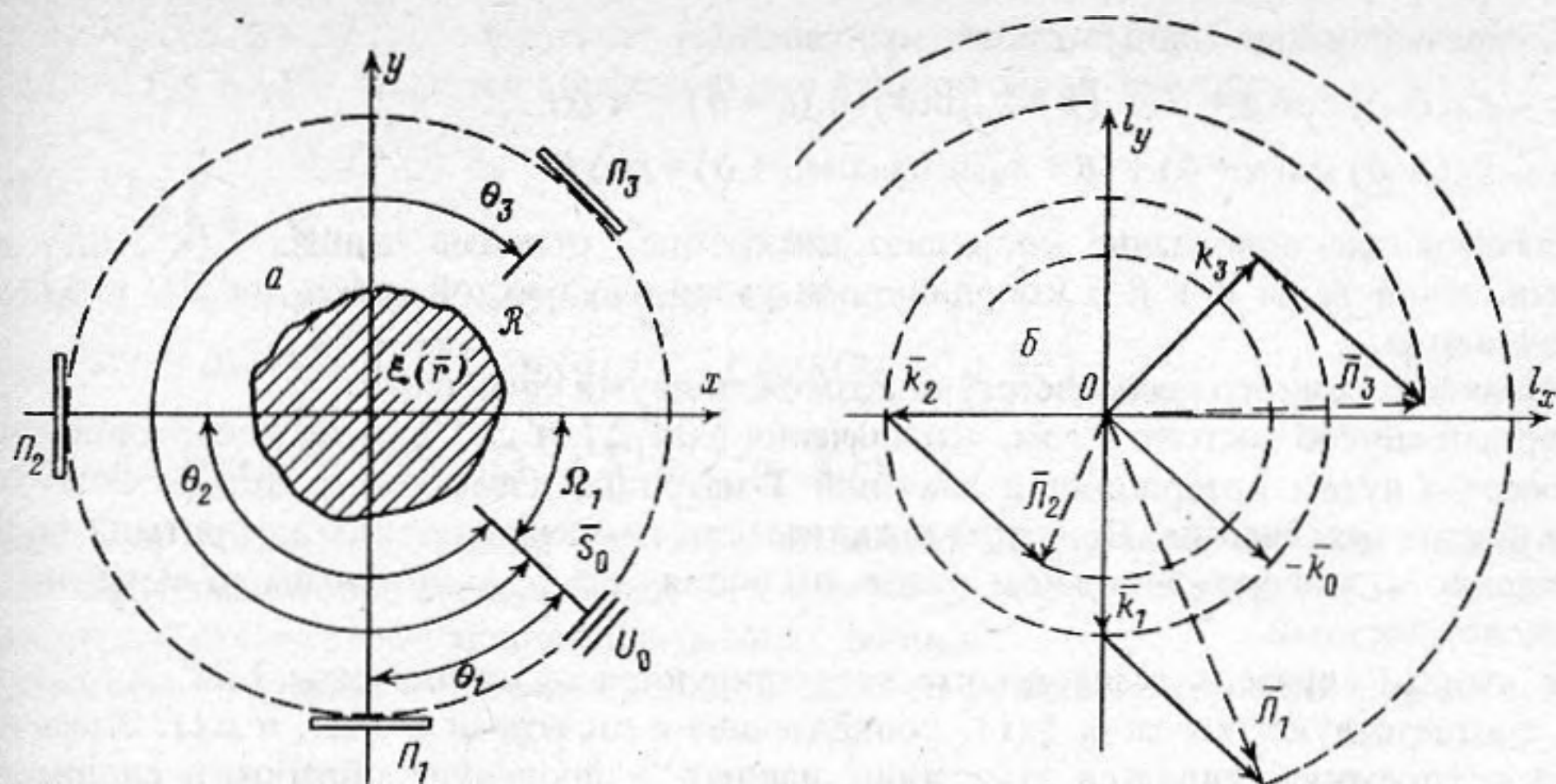


Рис. 3. Схема съема томографических данных (а), заключающаяся в регистрации амплитуд и фаз плоских волн, рассеянных реконструируемой неоднородностью, и компоненты пространственного спектра $\tilde{\xi}$, поддающиеся определению при трех положениях приемного преобразователя (б)

на n -ом измерении, N — общее количество дискретных положений приемника на окружности.

Для каждого фиксированного угла ϑ_n осуществляется полный поворот объекта $\xi(r)$ или, что то же самое, совместное дискретное перемещение приемника и передатчика вокруг центра поворота O . Если величина угла Ω_m удовлетворяет соотношению

$$\Omega_m = \frac{2\pi}{M} m, \text{ где } M \text{ — общее количество дискретных позиций объекта при его полном повороте,}$$

то нетрудно показать, что данной методике регистрации томографических данных соответствует равномерное заполнение информационного круга $|l| \leq 2k_0$ (рис. 3). Причем выбор дискретизации ϑ_n определяет дискретизацию по радиусу, в то время как дискретизация Ω_m задает дискретизацию по углу. Из (22) следует, что количество поддающихся определению фурье-компонент увеличивается при этом по сравнению с проекционным подходом \approx в 2 раза за счет увеличения в $\sqrt{2}$ раз радиуса информационного круга.

Понятно, что определение значений $\tilde{\xi}(l)$ в круге $2k_0$ возможно и в том случае, когда для каждого фиксированного положения объекта и фиксированного направления s_0^α измеряются амплитуды и фазы плоских волн в интервале $\vartheta \in [0, 2\pi[$. Повторение измерений для всего многообразия $\{s_0^\alpha\}$ фактически воспроизводит условия эксперимента с согласованной приемно-излучательной системой. Однако экспериментально регистрируемыми данными при этом оказываются и те компоненты $\tilde{\xi}(l)$, которые находятся в кольце $\sqrt{2}k_0 \leq l_0 \leq 2k_0$ (отмечены нежирной чертой на рис. 3).

3. Согласование сеток дискретизации исходных данных и пространственного спектра неоднородности

Если функция неоднородности $\xi(x, y)$ дискретизована с шагом $\delta = \lambda/2$, то дискретизации на квадратной сетке ($l_x = m' \Delta l$, $l_y = n' \Delta l$) в фурье-пространстве соответствует максимальная пространственная частота $l_{\max} = \sqrt{2}(N/2) \Delta l$ или $\sqrt{2}k_0$. Тогда для получения борновского решения ОЗР (22) в томографической постановке необходимо определить компоненты пространственного спектра $\tilde{\xi}(l)$ в узлах сетки размерности $N \times N$ с шагом дискретизации $\Delta l = \pi/R_0$. Однако в подавляющем большинстве случаев

структура первичных данных такова, что условия

$$\begin{aligned} (\gamma - k_0 \cos \vartheta) \cos(\alpha + \vartheta) - (\beta + k_0 \sin \vartheta) \sin(\alpha + \vartheta) &= m' \Delta l, \\ (\gamma - k_0 \cos \vartheta) \sin(\alpha + \vartheta) + (\beta + k_0 \sin \vartheta) \cos(\alpha + \vartheta) &= n' \Delta l, \end{aligned} \quad (26)$$

обеспечивающие совпадение координат дискретных отсчетов данных $T(\mathbf{k}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha)$ для произвольной пары α и β с координатами узлов квадратной сетки $(m' \Delta l, n' \Delta l)$, не выполняются.

Устранение данного несоответствия возможно двумя способами.

Первый способ состоит в том, что значения $\tilde{\xi}(m' \Delta l, n' \Delta l)$ в узлах декартовой сетки получаются путем интерполяции значений T -матрицы, известных в дискретном виде на окружностях Эвальда. При этом практическая реализация таких алгоритмов вносит упрощения в экспериментальном плане, но сопряжена со значительными вычислительными сложностями.

Во втором случае в эксперименте регистрируются те компоненты $T(\mathbf{k}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha)$, которым соответствуют значения $\tilde{\xi}(l)$, совпадающие с отсчетами $(m' \Delta l, n' \Delta l)$. Здесь наиболее трудоемким является этап сбора данных, а процедура обработки сводится к выполнению БПФ массива $\tilde{\xi}(m' \Delta l, n' \Delta l)$. Экспериментальная реализация предполагает в этом случае многопозиционное, а иногда и многочастотное облучение исследуемой неоднородности и сопровождается значительными метрологическими сложностями, особенно когда рассеиватель описывается массивом высокой размерности. При попытке обобщения безынтерполяционных алгоритмов для решения ОЗР с учетом многократных рассеяний возникают серьезные затруднения, так как резко возрастает набор \mathbf{k}_0^α , для которых необходимо решать большое количество вспомогательных прямых задач.

4. Модельная интерполяционная реконструкция неоднородностей скорости звука

Значения $\tilde{\xi}(m' \Delta l, n' \Delta l)$ могут быть выражены в виде [11]

$$\tilde{\xi}(m' \Delta l, n' \Delta l) = \sum_{i,j} \tilde{\xi}(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j)) \tilde{\Phi}(\Delta l_x, \Delta l_y), \quad (27)$$

где

$$\Delta l_x = m' \Delta l - l_x(\alpha_i, \beta_j), \quad \Delta l_y = n' \Delta l - l_y(\alpha_i, \beta_j),$$

а

$$l_x(\alpha_i, \beta_j) = (\gamma_j - k_0 \cos \vartheta_i) \cos(\alpha_i + \vartheta_i) - (\beta_j + k_0 \sin \vartheta_i) \sin(\alpha_i + \vartheta_i),$$

$$l_y(\alpha_i, \beta_j) = (\gamma_j - k_0 \cos \vartheta_i) \sin(\alpha_i + \vartheta_i) + (\beta_j + k_0 \sin \vartheta_i) \cos(\alpha_i + \vartheta_i),$$

а $\tilde{\Phi}(\Delta l_x, \Delta l_y)$ — интерполяционная функция. Знак $[\tilde{\cdot}]$ над функцией $\tilde{\Phi}(\Delta l_x, \Delta l_y)$ означает в данном случае то, что интерполяция производится в пространстве Фурье. Учитывая (22), получим:

$$\tilde{\epsilon}(m' \Delta l, n' \Delta l) = \sum_{i,j} T^{(B)}(\gamma_j s_0(\alpha_i + \vartheta_i) + \beta_j s_0^{\perp}(\alpha_i + \vartheta_i); \mathbf{k}_0^\alpha) \cdot \tilde{\Phi}\{m' \Delta l - l_x(\alpha_i, \beta_j), n' \Delta l - l_y(\alpha_i, \beta_j)\}. \quad (28)$$

Конкретный вид функции $\tilde{\Phi}(\Delta l_x, \Delta l_y)$ в (28) определяется исходя из соображений трудоемкости вычислительного процесса и качества итоговой реконструкции. В [12–15] представлен сравнительный анализ различных интерполяционных процедур, в том числе точной sinc-интерполяции, билинейной интерполяции, основанной на использовании четырехточечного шаблона, интерполяции "по ближайшему соседу" и других.

Продемонстрируем интерполяционный подход к решению ОЗР (28) применением интерполяционной функции вида [16]

$$\tilde{\Phi}(\Delta l_x, \Delta l_y) = R_0^2 \frac{J_1(R_0 \sqrt{\Delta l_x^2 + \Delta l_y^2})}{R_0 \sqrt{\Delta l_x^2 + \Delta l_y^2}}, \quad (29)$$

где $J_1(R_0 \sqrt{\Delta l_x^2 + \Delta l_y^2})$ – функция Бесселя первого рода первого порядка. Функция $\Phi(\Delta l_x, \Delta l_y)$ в (29) является образом Фурье индикаторной функции

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D_{R_0} \\ 0, & (x, y) \notin D_{R_0} \end{cases} \quad (30)$$

С учетом (29) выражение (28) запишется в виде

$$\tilde{\epsilon}(m' \Delta l, n' \Delta l) = \sum_{i,j} T^{(B)}(\gamma_j s_0(\alpha_i + \vartheta_i) + \beta_j s_0^{\perp}(\alpha_i + \vartheta_i), k_0^{\alpha}) \cdot J(\alpha_i, \beta_j) \tilde{\Phi}(m' \Delta l - l_x(\alpha_i, \beta_j), n' \Delta l - l_y(\alpha_i, \beta_j)), \quad (31)$$

в котором $J(\alpha, \beta)$ – якобиан преобразований от декартовой системы координат к криволинейным координатам $(l_x(\alpha, \beta), l_y(\alpha, \beta))$. Вид якобиана в (31) зависит от конкретной схемы съема экспериментальных данных.

Выберем в качестве модельных неоднородностей функцию гауссовой формы

$$\xi(x, y) = \xi_0 \exp \left\{ -\pi \frac{x^2 + y^2}{\tau^2} \right\}, \quad (32)$$

характеристические функции цилиндра

$$\xi(x, y) = \begin{cases} \xi_0, & (x^2 + y^2)^{1/2} \leq R_{\text{ц}} \\ 0, & (x^2 + y^2)^{1/2} > R_{\text{ц}} \end{cases} \quad (33)$$

и эллипса

$$\xi(x, y) = \begin{cases} \xi_0, & (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1 \\ 0, & (x/a)^2 + (y/b)^2 > 1 \end{cases} \quad (34)$$

Выбор модельных рассеивателей вида (32) – (34) объясняется двумя причинами. Во-первых, известны аналитические выражения их фурье-образов. Так, пространственный спектр неоднородности (32) имеет вид

$$\tilde{\xi}(l_x, l_y) = \frac{\xi_0}{(2\pi)^2} \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{4\pi} (l_x^2 + l_y^2) \right\}, \quad (35)$$

неоднородности (33) – вид

$$\tilde{\xi}(l_x, l_y) = \xi_0 R_{\text{ц}} \frac{J_1(R_{\text{ц}} \sqrt{l_x^2 + l_y^2})}{R_{\text{ц}} \sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \quad (36)$$

и, наконец, функции (34) –

$$\tilde{\xi}(l_x, l_y) = \xi_0 \frac{a J_1(b \sqrt{(al_x/b)^2 + l_y^2})}{\sqrt{(al_x/b)^2 + l_y^2}} \quad (37)$$

Во-вторых, пространственные спектры (35) – (37) имеют характерную низкочастотную структуру, что позволяет говорить об их качественном восстановлении на основании данных, локализованных в круге $\sqrt{2} k_0$.

Исходными данными в интерполяционном алгоритме (31) являются элементы $f(k_0 s^{\beta}, k_0 s_0^{\alpha})$, соответствующие значениям интерполируемых функций (35) – (37) в точках

$$l_x = -k_0 \cos\left(\frac{2\pi i}{I_d}\right) + \sqrt{k_0^2 - (j\Delta l)^2} \cos\left(\frac{2\pi i}{I_{\alpha}}\right) - j\Delta l \sin\left(\frac{2\pi i}{I_{\alpha}}\right), \quad (38)$$

$$l_y = k_0 \sin\left(\frac{2\pi i}{I_{\alpha}}\right) + \sqrt{k_0^2 - (j\Delta l)^2} \sin\left(\frac{2\pi i}{I_{\alpha}}\right) + j\Delta l \cos\left(\frac{2\pi i}{I_{\alpha}}\right).$$

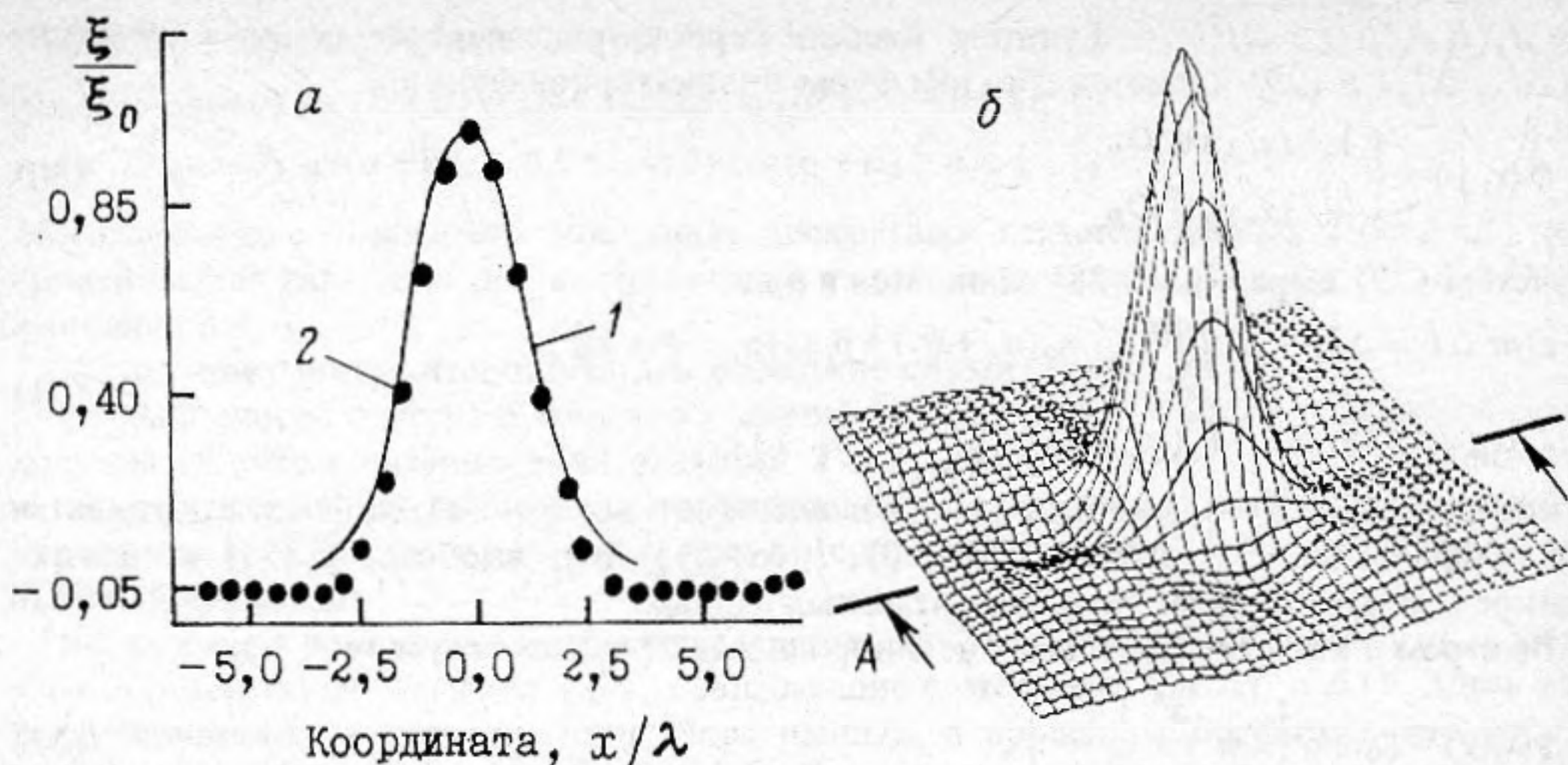


Рис. 4. Интерполяционная реконструкция неоднородности вида (32): сечение в плоскости AA (а) и центральная проекция (б). 1 – истинные, 2 – восстановленные значения; $\Delta c_{\max} = 0,02 c_0$, $R_0 = 4,25 \lambda$, $\tau = 3 \lambda$, без вторичной фильтрации

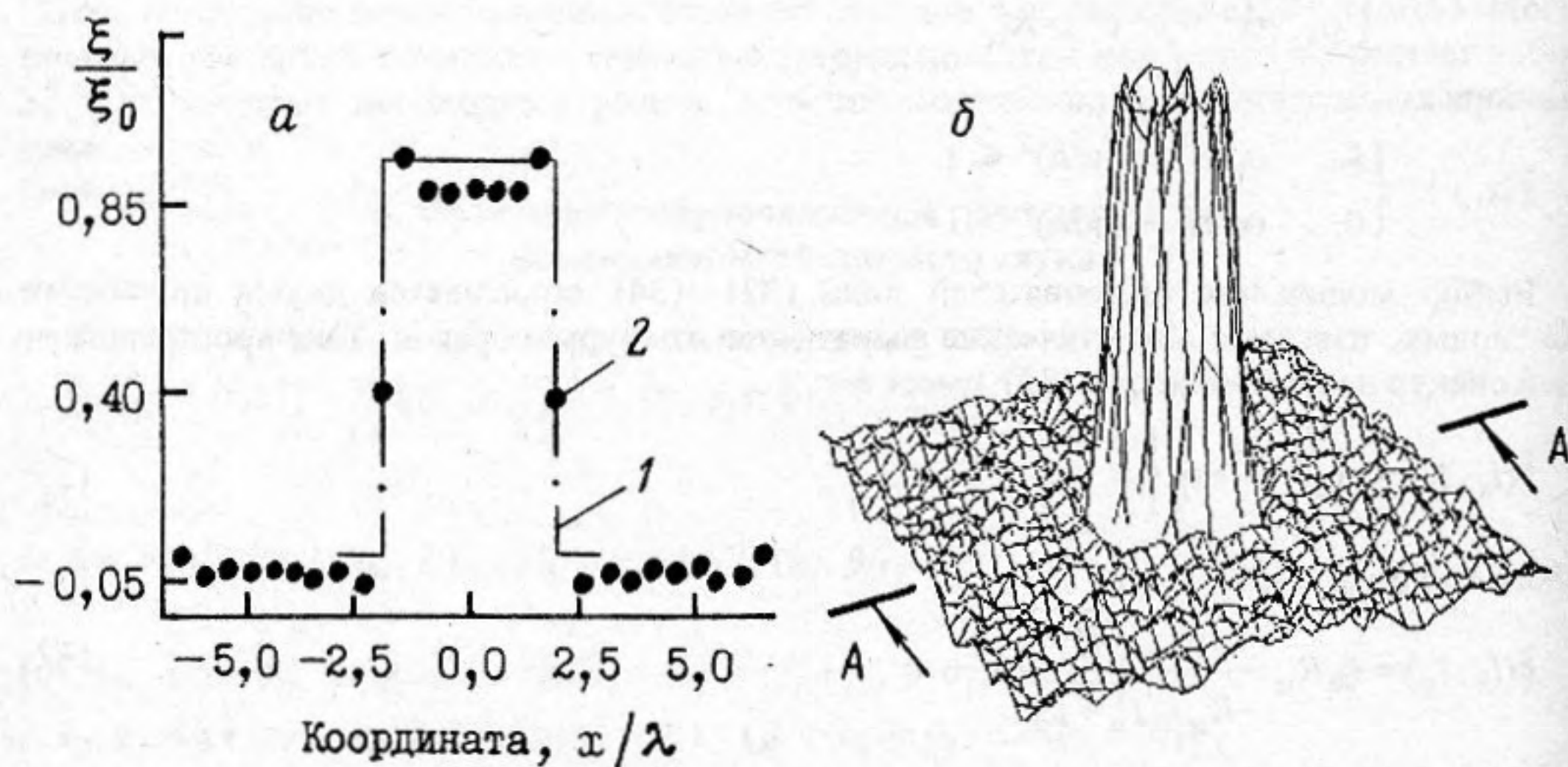


Рис. 5. Интерполяционная реконструкция неоднородности вида (33): сечение в плоскости AA (а) и центральная проекция (б). 1 – истинные, 2 – восстановленные значения; $\Delta c_{\max} = 0,02 c_0$, $R_0 = 4,25 \lambda$, $R_{\text{ц}} = 2 \lambda$, вторичная фильтрация произведена

Выбранным пределам изменения i и j соответствуют значения $0 \leq \alpha_i < 2\pi$, $0 \leq \beta_j < k_0$. Выбор одних только положительных величин позволяет исключить имеющие место пересечения окружностей, когда $-k_0 \leq \beta_j < k_0$. Выражение для якобиана преобразований координат $J(\alpha, \beta)$ имеет вид [16]

$$J(\alpha, \beta) = \frac{k_0 |\beta|}{\sqrt{k_0^2 - \beta^2}} \quad (39)$$

Выходной массив $\tilde{\xi}(m' \Delta l, n' \Delta l)$ и соответствующее ему изображение $\xi(m\delta, n\delta)$ имеют размерность $N \times N$, причем N удовлетворяет соотношению $N = 2^p$, где p – целое, что позволяет эффективно использовать БПФ. В процессе моделирования N изменялось от 16 до 256. На рис. 4–6 приведены графики центрального сечения (а) и объемные изображения (б) реконструированных рассеивателей вида (34)–(36) для случая,

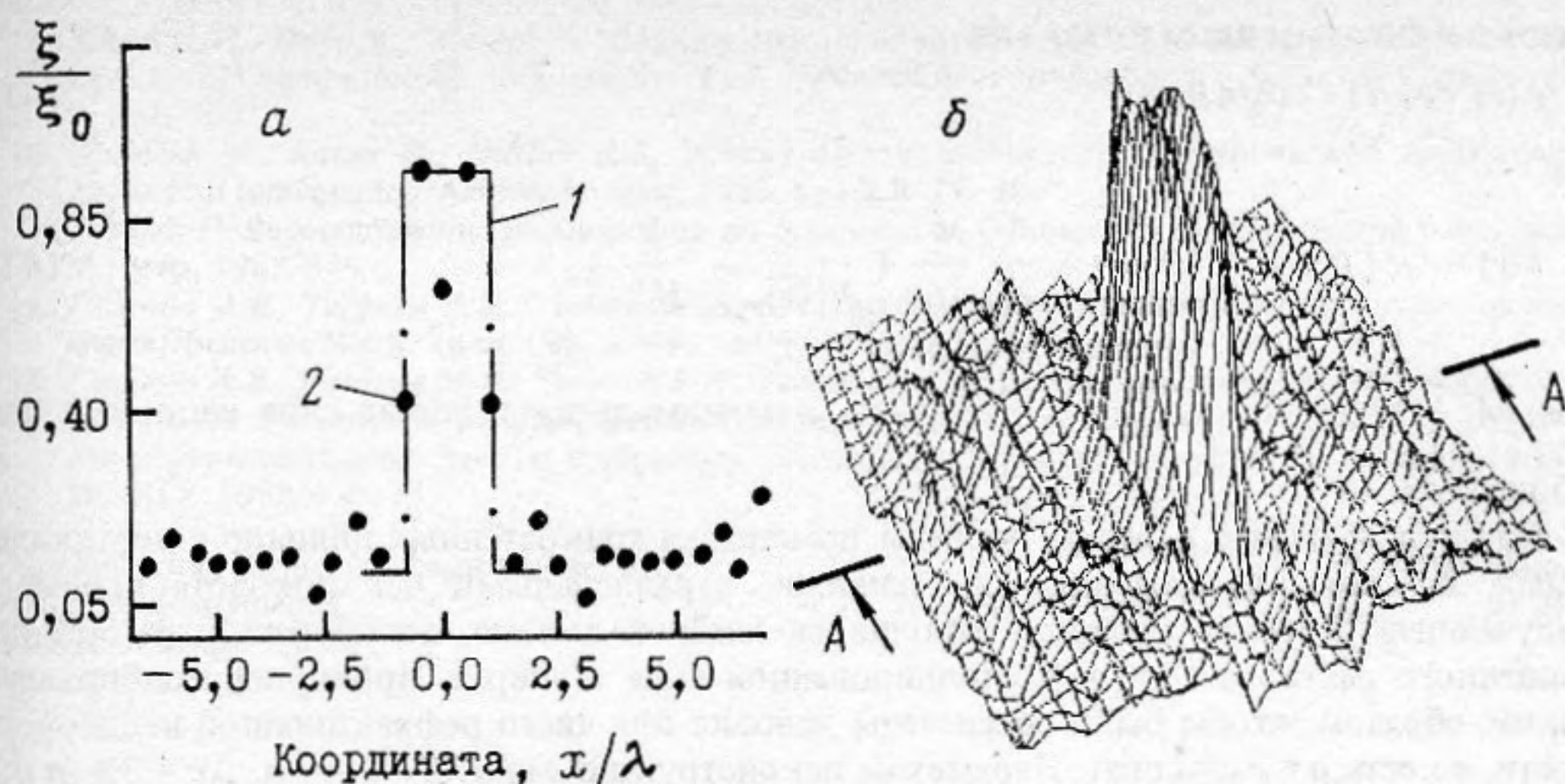


Рис. 6. Интерполяционная реконструкция неоднородности вида (34): сечение в плоскости AA (a) и центральная проекция (b). 1 – истинные, 2 – восстановленные значения; $\Delta c_{\max} = 0,02c_0$, $R_0 = 4,25\lambda$, $a = 4\lambda$, $b = 1\lambda$, без вторичной фильтрации

когда $N = 32$, что объясняется удобствами графического оформления. Восстановление производилось по 32-м ракурсам ($I_\alpha = 32$) и 32-м направлениям приема (отсчетам в спектре проекции). Максимальное изменение скорости звука на области рассеяния $\Delta C_{\max} = 0,02C_0$. Реконструированные изображения имеют размеры $16\lambda \times 16\lambda$, где λ – длина волны падающего поля.

На рис. 6 отметим характерную структуру результирующего изображения, связанную с различной протяженностью исходного объекта вдоль осей Ox , Oy . Учитывая линейный характер интерполяционного соотношения (27), можно сделать вывод о том, что указанные искажения реконструируемой функции могут быть частично скомпенсированы. Коррекция ошибок интерполяции такого сорта достигается следующим образом:

$$\tilde{\xi}_\Phi(m'\Delta l, n'\Delta l) = \frac{\tilde{\xi}(m'\Delta l, n'\Delta l)}{\tilde{P}(m'\Delta l, n'\Delta l)}, \quad (40)$$

где $\tilde{P}(m'\Delta l, n'\Delta l)$ – образ Фурье функции единичного отклика $P(m\delta, n\delta)$ интерполяционной процедуры (28). Эта функция образуется в результате восстановления с помощью (28) точечного объекта, помещенного в начало координат [17]. На рис. 5 представлены результаты реконструкции функции (33) после вторичной фильтрации (42).

5. Реконструкция неоднородностей скорости звука на основании экспериментальных данных

Интерполяционный алгоритм решения ОЗР (28) был использован для реконструкции неоднородностей фазовой скорости звука в плоском акустическом волноводе. Описание экспериментальной установки и методика эксперимента представлены в [18].

В качестве экспериментальных данных были использованы результаты измерений при одноракурсном облучении двух типов объектов, симметричных относительно вращения вокруг вертикальной оси, с фиксацией рассеянного вперед поля при углах рассеяния, заключенных в пределах от 0 до $\pi/2$.

В первом случае неоднородность создавалась локальным изменением толщины волновода $H \approx 2,5$ см при погружении в слой жидкости резиновой шаровой оболочки радиуса $R \approx 2,3$ см. Поскольку в соответствии с экспериментальными условиями выражение для фазовой скорости 1-ой моды в волноводе с акустически мягкой поверх-

ностью и твердым дном имеет вид

$$c(r) = c_0 / (1 - (\lambda/4h(r)))^{1/2}, \quad (41)$$

то

$$\xi(r) = 1/c_h^2(r) - 1/c^2(H) = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\lambda^2}{16} \left(\frac{1}{h^2(r)} - \frac{1}{H^2} \right), \quad (42)$$

где $h(r) = h_0 + R \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2} \right)$, h_0 — минимальная толщина слоя жидкости под оболочкой.

Во втором случае в центре кюветы помещался тонкостенный цилиндр с вертикальными акустически прозрачными стенками, параллельными оси поворота приемно-излучающей системы. Цилиндр заполнялся жидкой смесью, составленной из 50% насыщенного раствора соли в дистиллированной воде и спирта. Пропорции подбирались таким образом, чтобы были обеспечены условия для чисто рефракционной неоднородности, то есть $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Параметры реконструкции модели $R_0 = 2\lambda$, $\Delta c = 3\%$ от c_0 , а $c_0 = 1470$ м/сек.

И в первом и во втором случаях область локализации неоднородности в процессе математической обработки дискретизовывалась с шагом $\lambda/2 \sim 0,6$ см, излучатель и приемник размещались в 35–40 см от центральной точки. В ЭВМ были введены данные об амплитуде и фазе рассеянной акустической волны, снятые для 16-ти различных углов рассеяния ($I_\alpha = 32$). Учитывая симметричность объекта, эти данные были затем использованы для определения элементов матрицы рассеяния на 32-х аналогичных дугах, размещенных в пространстве центрально-симметричным образом с равными угловыми интервалами ($J_\beta = 32$).

Интерполяция экспериментальных данных в узлы эквидистантной сетки размерности (32×32) в пространстве Фурье производилась на основании выражений (31), (38)–(39). Результаты обработки экспериментальных данных представлены в [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во Моск. Ун-та., 1989. 152 с.
2. Бухштабер В.М., Маслов В.К. Томосинтез волновых полей и неоднородных сред (теория дифракционной томографии) // Сб.: Томографические методы в физико-технических измерениях. М.: ВНИИФТРИ, 1985. С. 7–34.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов И.А. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. 152 с.
4. Goutsias J.I. Inverse problems in two-dimensional acoustic media: a linear imaging model // Journal of Acoust. Soc. of America. 1987. V. 81. № 5. P. 1471–1485.
5. Nahamoo D., Pan S.X., Kak A.C. Synthetic aperture diffraction tomography and its interpolation-free computer implementation // IEEE Trans. on Sonics and Ultrason., 1984. V. 31. № 4. P. 218–228.
6. Lan C.Q., Xu K.K., Wade G. Limited angle diffraction tomography and its application to planar scanning system // IEEE Trans. on Sonics and Ultrason., 1985. V. 32. № 1. P. 9–16.
7. Kaveh M., Soumekh M., Greenleaf J.F. Signal processing for diffraction tomography // IEEE Trans. on Sonics and Ultrason., 1984. V. 31. № 4. P. 230–238.
8. Gorenflo N. Inversion formulae for first-order approximations in fixed-energy scattering by compactly supported potentials // Inverse problems. 1988. V. 4. № 4. P. 1025–1035.
9. Ньютон Р. Рассеяние волн и частиц. М.: Мир, 1969. 607 с.
10. Тейлор Дж. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений. М.: Мир, 1975. 565 с.
11. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. 288 с.
12. Вайнберг Э.И., Файнгойс М.Л. Влияние дискретизации и интерполяции проекций на чувствительность рентгеновской вычислительной томографии. 2. Погрешности дискретизации и интерполяции проекций // Дефектоскопия. 1984. № 7. С. 23–38.
13. Lu Jian-Yu. A computational study of reconstruction algorithms for synthetic aperture diffraction tomography: interpolation versus interpolation free // Acoust. Imaging. 1988. V. 16. P. 421–443.
14. Pan S.X., Kak A.C. A computational study of reconstruction algorithms for diffraction tomography // IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Process. 1983. V. 31. № 5. P. 318–329.

15. *Schwiezz G., Harer W., Wiesent K.* Sampling and discretisation problems in X-Ray CT/In: Mathematical aspects of computerized tomography. Proc.: Obervolfac, 1980. Berlin: Springer-Verlag, 1981. P. 292-309.
16. *Soumekh M., Kaveh M., Mueller R.K.* Fourier domain reconstruction methods with application to diffraction tomography//Acoust. Imaging. 1983. V. 13. P. 17-30.
17. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983. 349 с.
18. *Глазков А.В., Тагунов Е.Я.* О моделировании обратных задач рассеяния в физическом эксперименте//Вестник Моск. Ун-та. Сер. 3. Физ., Астрон. 1990. Т. 31. № 2. С. 62-65.
19. *Глазков А.В., Рычагов М.Н., Тагунов Е.Я., Тимофеев С.Т.* Использование априорной информации об области локализации неоднородности для построения интерполяционного алгоритма обработки экспериментальных данных в обратных задачах акустического рассеяния. Препринт № 39/1988. М.: МГУ, 1988. 5 с.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
физический факультет

Поступила в редакцию
01.03.91

V.A. Burov, M.N. Rychagov

DIFFRACTION TOMOGRAPHY AS INVERSE PROBLEM OF SCATTERING. INTERPOLATION APPROACH. LINEARIZED VERSION

Some results of the theoretical analysis, numerical modelling and experimental investigation of acoustic tomography problems within the framework of a more general problem, i.e. the inverse problem of scattering, are presented in this paper. This approach allowed to develop effective algorithms for inhomogeneities reconstruction. These algorithms are based on the adequate models of physical properties of sound waves propagation in the analysed volume. The tomographic experimentation in this case is the way to get the data on scattering and determines the efficiency and speed of calculations.

The study is divided into two interconnected parts.

The linearized inverse problem of scattering in the approximation of single scattering process (the Born approximation) is solved in this (first) part. This allows to clear up the correspondence of the approach to standard methods of wave tomography based on the interpolation procedure in the Fourier space.

In the second part the multiple scattering of the incident field on the inhomogeneity under reconstruction is taken into account with the help of the iteration solution of the Lippmann-Schwinger type equation for T -matrix. An opportunity for efficient processing of excessive data is provided. The problems connected with interpolation procedures introduction to the iteration cycle are considered. The results of numeric reconstruction of contrast scatterers with the help of the developed algorithms are given. Conducted analytical and numeric studies are confirmed experimentally.