

УДК 534.222

© 1992 г. А.М. Гаврилов, О.А. Савицкий

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭФФЕКТА ВЫРОЖДЕННОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛЕНИЯ

Исследуется возможность использования явления вырожденного параметрического усиления для ослабления нелинейных искажений волны конечной амплитуды. Рассматривается случай, когда в среде распространяются сигнальная волна частоты ω и волна удвоенной частоты, амплитуды которых имеют один порядок. В рамках плосковолновой модели для идеальной квадратично-нелинейной среды анализируются временные и спектральные характеристики поля. Определены оптимальные амплитудно-фазовые соотношения в исходном спектре, когда происходит ослабление нелинейных искажений.

Задача о вырожденном параметрическом усилении плоских волн в средах без дисперсии исследовалась в работах [1–4]. При этом рассматривался случай взаимодействия слабой сигнальной волны с амплитудой u_c и частотой ω с мощной волной накачки

с амплитудой u_n и частотой 2ω при условии $A = \frac{u_c}{u_n} \ll 1$ и, пренебрегая нелинейной

реакцией сигнальной волны на волну накачки [2]. Из анализа уравнения Римана для идеальной среды и уравнения Бюргерса для диссипативной среды были получены оптимальные условия усиления слабой сигнальной волны. Для практики представляет интерес случай взаимодействия двух волн с кратными частотами ω и 2ω и сравнимыми амплитудами. Подобные условия возникают при решении задачи ослабления нелинейного поглощения сигнальной волны частоты ω вследствие эффекта, аналогичного вырожденному параметрическому усилению. Этот случай не является тривиальным следствием рассмотренного в [1–3] и требует отдельного рассмотрения.

Для простоты будем считать среду распространения идеальной. Распространение плоских волн в квадратично-нелинейной среде описывается уравнением Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

где ϵ — параметр нелинейности; c_0 — скорость распространения волн в невозмущенной среде; $\tau = t - x/c_0$ — время в сопровождающей системе координат. Пусть при $x = 0$ колебательная скорость v задана в виде суммы сигнальной волны частоты ω и волны накачки, представляющую собой вторую гармонику сигнальной волны с относительным начальным сдвигом фазы φ_0 :

$$v = v_1 \sin \omega \tau + v_2 \sin(2\omega \tau + \varphi_0).$$

Тогда можно получить частное решение уравнения (1) в виде неявной функции

$$v = v_1 \sin \left(\omega \tau + \frac{\epsilon \omega v}{c_0^2} x \right) + v_2 \sin \left(2\omega \tau + \frac{2\epsilon \omega v}{c_0^2} x + \varphi_0 \right). \quad (2)$$

Введем обозначения: $A = v_2/v_1$; $u = v/v_1$; $z = \frac{c_0^2}{\epsilon \omega v_1} x = \frac{x}{x_p}$, где x_p — расстояние образования разрыва в волновом профиле распространяющейся отдельно сигнальной волны.

Тогда выражение (2) запишется в виде

$$u = \sin(\omega t + zu) + A \sin(2\omega t + 2zu + \varphi_0). \quad (3)$$

Последующий анализ проведем, задав функцию (3) параметрически:

$$\begin{cases} u = \sin \xi + A \sin(2\xi + \varphi_0); \\ \omega t = \xi - z[\sin \xi + A \sin(2\xi + \varphi_0)]. \end{cases}$$

Скорость накопления нелинейных искажений в волне конечной амплитуды (ВКА) удобно оценивать с помощью безразмерного расстояния z_p , на котором в волновом профиле образуется разрыв — участок с бесконечным градиентом колебательной скорости. Координату образования разрыва нетрудно определить из системы уравнений:

$$\begin{cases} (\omega t)'_{\xi} = 1 - z[\cos \xi + 2A \cos(2\xi + \varphi_0)] = 0; \\ (\omega t)''_{\xi} = z[\sin \xi + 4A \sin(2\xi + \varphi_0)] = 0. \end{cases}$$

При этом ограничимся крайними значениями начальной фазы $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$, при которых трансформация исходного волнового профиля принципиально различается [1]. Для обоих случаев получаются простые выражения:

$$z_p = 1/(1 + 2A), \quad \text{при } \varphi_0 = 0,$$

$$z_p = \begin{cases} 1/(1 - 2A), & 0 \leq A < 1/8; \\ 16A/(1 + 32A^2), & A \geq 1/8; \end{cases}, \quad \text{при } \varphi_0 = \pi.$$

Зависимости величины z_p от амплитуды исходной волны A показаны на рис. 1. При $\varphi_0 = 0$ функция $z_p(A)$ монотонно уменьшается, что указывает на прямую взаимосвязь между увеличением амплитуды второй гармоники в исходном спектре и усилением нелинейного искажения временного профиля ВКА, в результате чего происходит уменьшение расстояния образования разрыва. При $\varphi_0 = \pi$ функция $z_p(A)$ при увеличении амплитуды второй гармоники в пределах $0 \leq A < 1/4\sqrt{2}$ растет и в точке $A = 1/4\sqrt{2}$ достигает максимума $z_p = \sqrt{2}$, что свидетельствует об ослаблении нелинейных искажений. При $A \geq 1/4\sqrt{2}$ расстояние z_p монотонно уменьшается, как и при $\varphi_0 = 0$.

Другой параметр временного профиля ВКА — его крутизна, т.е. наклон касательной к волновому профилю в точке образования разрыва, который описывается соотношениями

$$\alpha_p = \operatorname{arctg} \frac{1 + 2A}{1 - z(1 + 2A)}, \quad \text{в точке } (\omega t)_p = 0, \quad \text{при } \varphi_0 = 0,$$

$$\alpha_p = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1 - 2A}{1 - z(1 - 2A)}, & 0 \leq A < 1/8 \text{ в точке } (\omega t)_p = 0, \\ \operatorname{arctg} \left[\frac{1 + 32A^2}{16A - z(1 + 32A^2)} \right], & A \geq 1/8 \text{ в точке} \end{cases} \quad \text{при } \varphi_0 = \pi \quad (4)$$

$$(\omega t)_p = \pm \left[\arccos \frac{1}{8A} - \frac{3}{32} z \frac{\sqrt{64A^2 - 1}}{8A} \right].$$

Из (4) следует, что при $\varphi_0 = \pi$ и $A \geq 1/8$ разрывные участки на профиле появляются одновременно в двух местах, перемещаются навстречу друг другу по мере увеличения пройденного волной расстояния вплоть до слияния в точке $\omega t = 0$ (рис. 2). В остальных случаях разрыв неизменно наступает и остается в точке $\omega t = 0$. На рис. 3 представлены графики рассматриваемой зависимости. Видно, что кривая, соответствующая $\varphi_0 = \pi$ и $A = 1/4\sqrt{2}$, на участке до излома лежит ниже всех остальных и имеет наиболее пологий характер подъема, что свидетельствует о наименьшей начальной крутизне α_p временного профиля ВКА и наиболее медленном ее нарастании до образования разрыва.

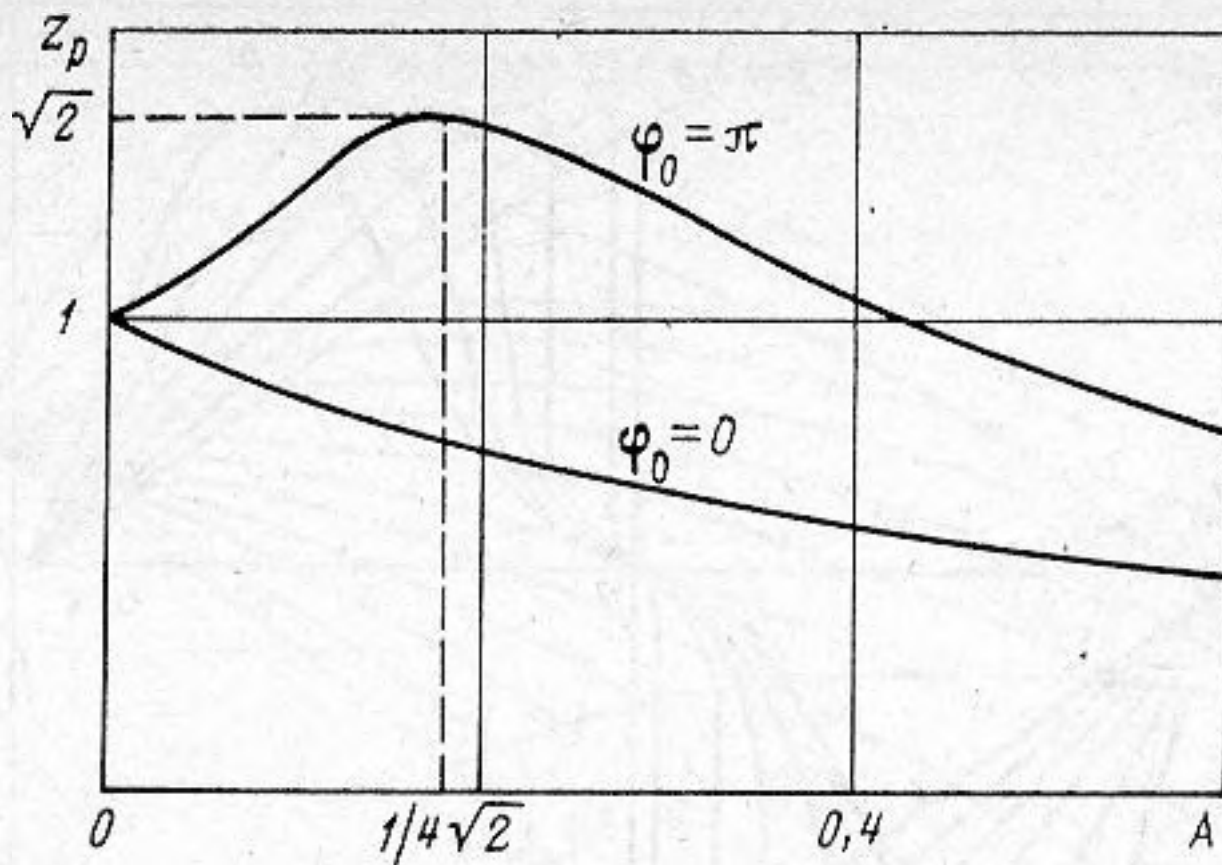


Рис. 1. Зависимость нормированной координаты образования разрыва z_p от соотношения амплитуд A исходных волн

Анализ спектрального состава первоначально бигармонической ВКА будем проводить в комплексной форме. Выражение для компонент ряда Фурье

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin(\omega\tau + zu) + A \sin(2\omega\tau + 2zu + \varphi_0) \} e^{-jn\omega\tau} d(\omega\tau)$$

после ввода новой переменной $\xi = \omega\tau + zu$, $u = \sin \xi \pm A \sin 2\xi$, преобразуется к виду

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin \xi \pm A \sin 2\xi \} e^{-jn[\xi - z(\sin \xi \pm A \sin 2\xi)]} d\{\xi - z(\sin \xi \pm A \sin 2\xi)\}, \quad (5)$$

где знаки плюс и минус соответствуют случаям $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$. После преобразований (5) может быть приведено к более простому виду

$$C_n = \frac{1}{j2\pi n z} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jn[\xi - z(\sin \xi \pm A \sin 2\xi)]} d\xi. \quad (6)$$

Для интегрирования (6) воспользуемся известными соотношениями [5]

$$e^{jn z \sin \xi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(nz) e^{jm\xi};$$

$$e^{\pm jA n z \sin 2\xi} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(Anz) e^{\pm j2l\xi},$$

с учетом которых

$$C_n = \frac{1}{j2\pi n z} \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} I_m(nz) I_l(Anz) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jn\xi + jm\xi \pm j2l\xi} d\xi.$$

Откуда легко получить выражение для амплитуды n -й гармонической составляющей в спектре первоначально бигармонической ВКА в виде ряда по функциям Бесселя:

$$u_n = 2 |C_n| = \frac{2}{nz} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_{n \mp 2l}(nz) I_l(Anz), \quad (7)$$

которое при $A = 0$ переходит в известное выражение для одиночной монохроматической волны [6].

Используя (7), рассмотрим поведение амплитуд сигнальной волны и ее второй гармоники в зависимости от расстояния до излучателя z . Учитывая ограничение $z < z_p$, накладываемое условием идеальности среды и быструю сходимость ряда (7), в практических расчетах можно ограничиться его первыми членами ($-2 < l \leq 2$). Максимальная погрешность при этом будет порядка 10^{-3} . Зависимости амплитуд первой и второй

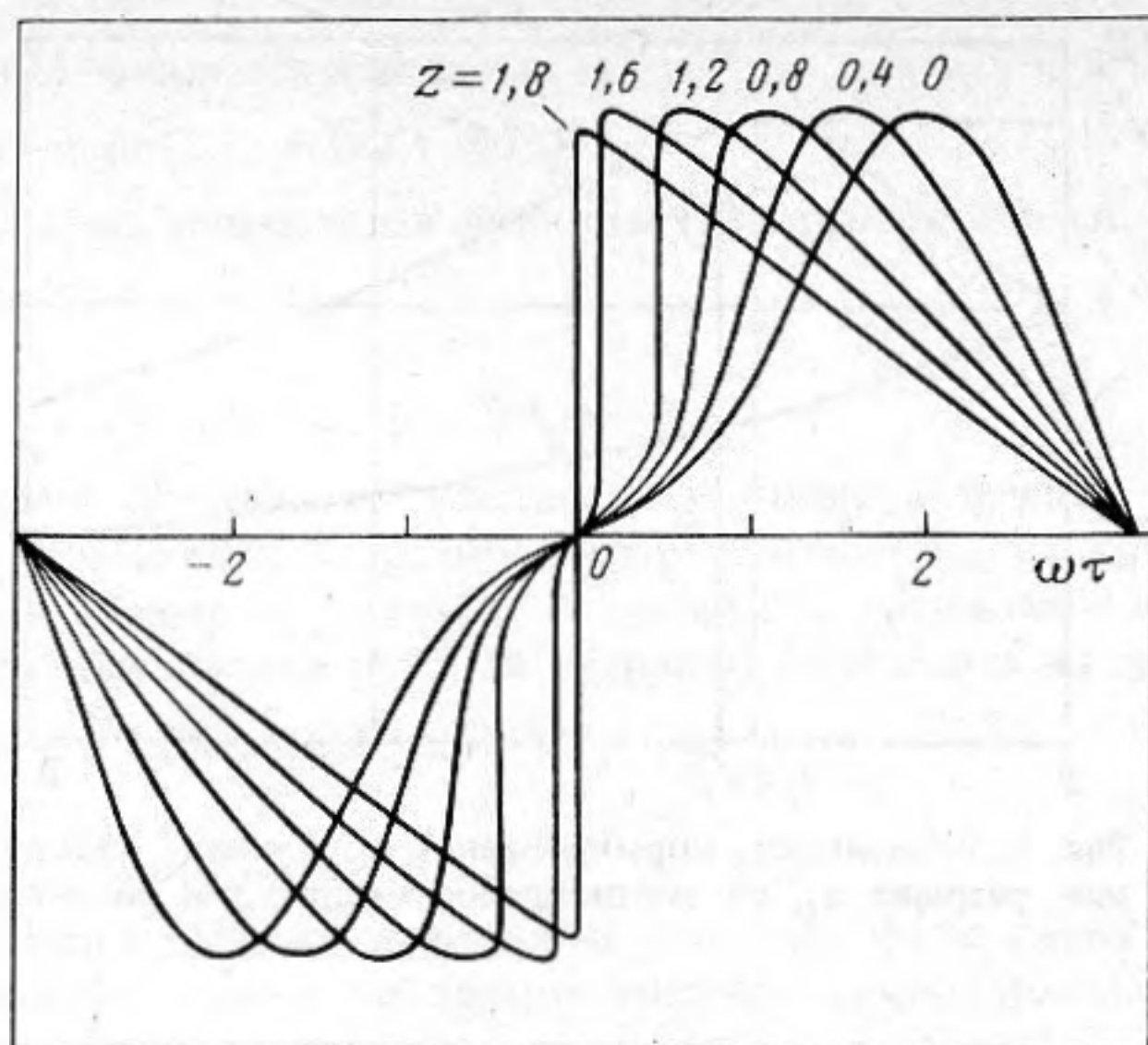


Рис. 2. Трансформация временного профиля бигармонической волны конечной амплитуды с расстоянием z (0–1,8) при $A = 0,4$ и $\varphi_0 = \pi$

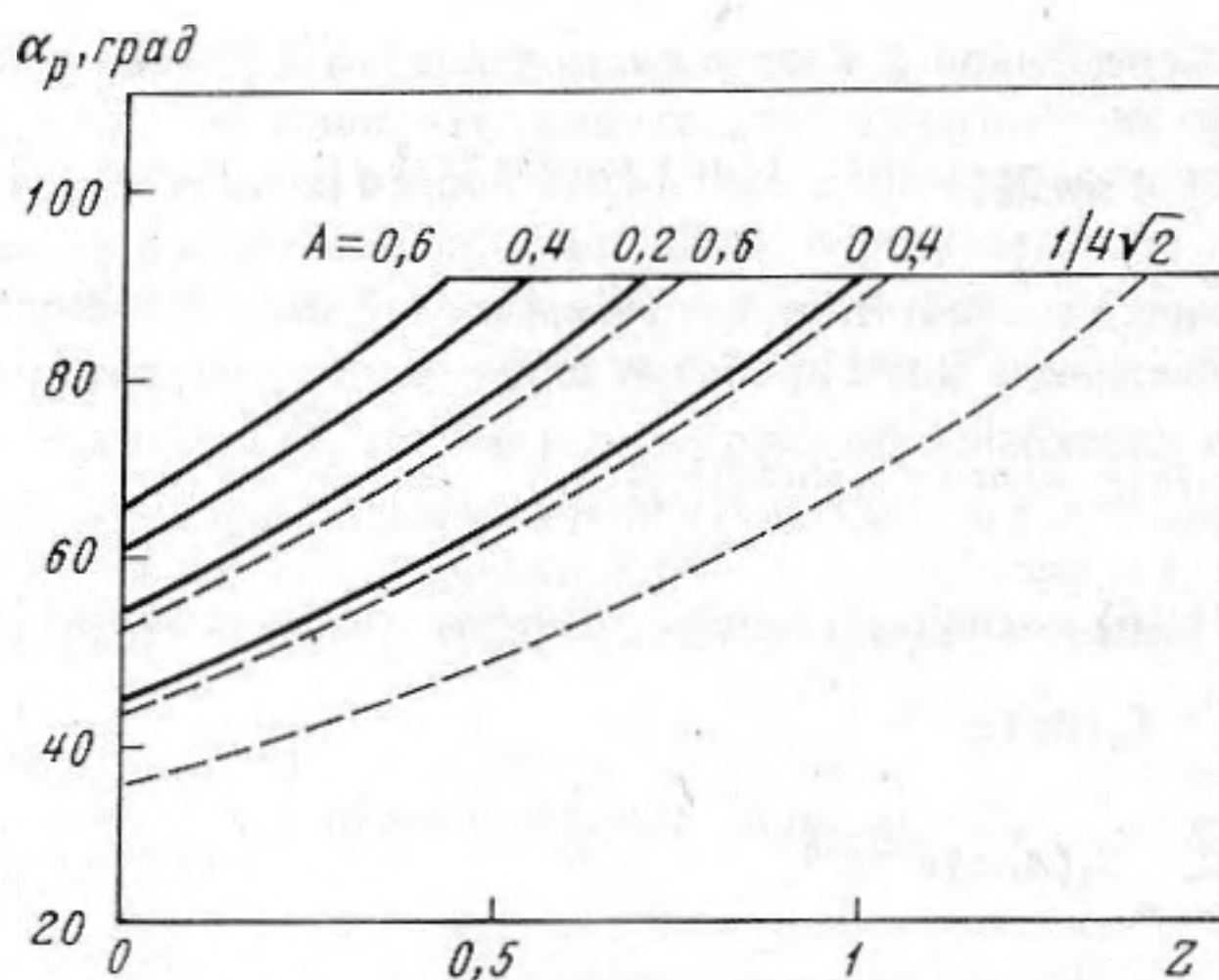


Рис. 3. Зависимость крутизны волнового профиля в точке образования разрыва от расстояния z при различных соотношениях амплитуд A исходных волн (сплошная линия – $\varphi_0 = 0$, пунктир – $\varphi_0 = \pi$)

гармоник от расстояния до излучателя при различных исходных соотношениях амплитуд A и фаз φ_0 , представлены на рис. 4 и 5. Пунктиром обозначены участки зависимостей, соответствующие $z > z_p$. Увеличение амплитуды второй гармоники в исходном сигнале при $\varphi_0 = 0$ усиливает нелинейное поглощение сигнальной волны, что проявляется в ускорении спада амплитуды $u_1(z)$ с расстоянием. При $\varphi_0 \approx \pi$ пространственные распределения $u_1(z)$ имеют качественно иной характер: с увеличением расстояния от излучателя амплитуда сигнальной волны растет до $z = z_{\max}$, после чего начинает уменьшаться. При этом рост A сопровождается увеличением крутизны нарастающего и спадающего участков распределения $u_1(z)$, увеличением абсолютного значения амплитуды сигнальной волны в точке максимума, а также смещением координаты миниму-

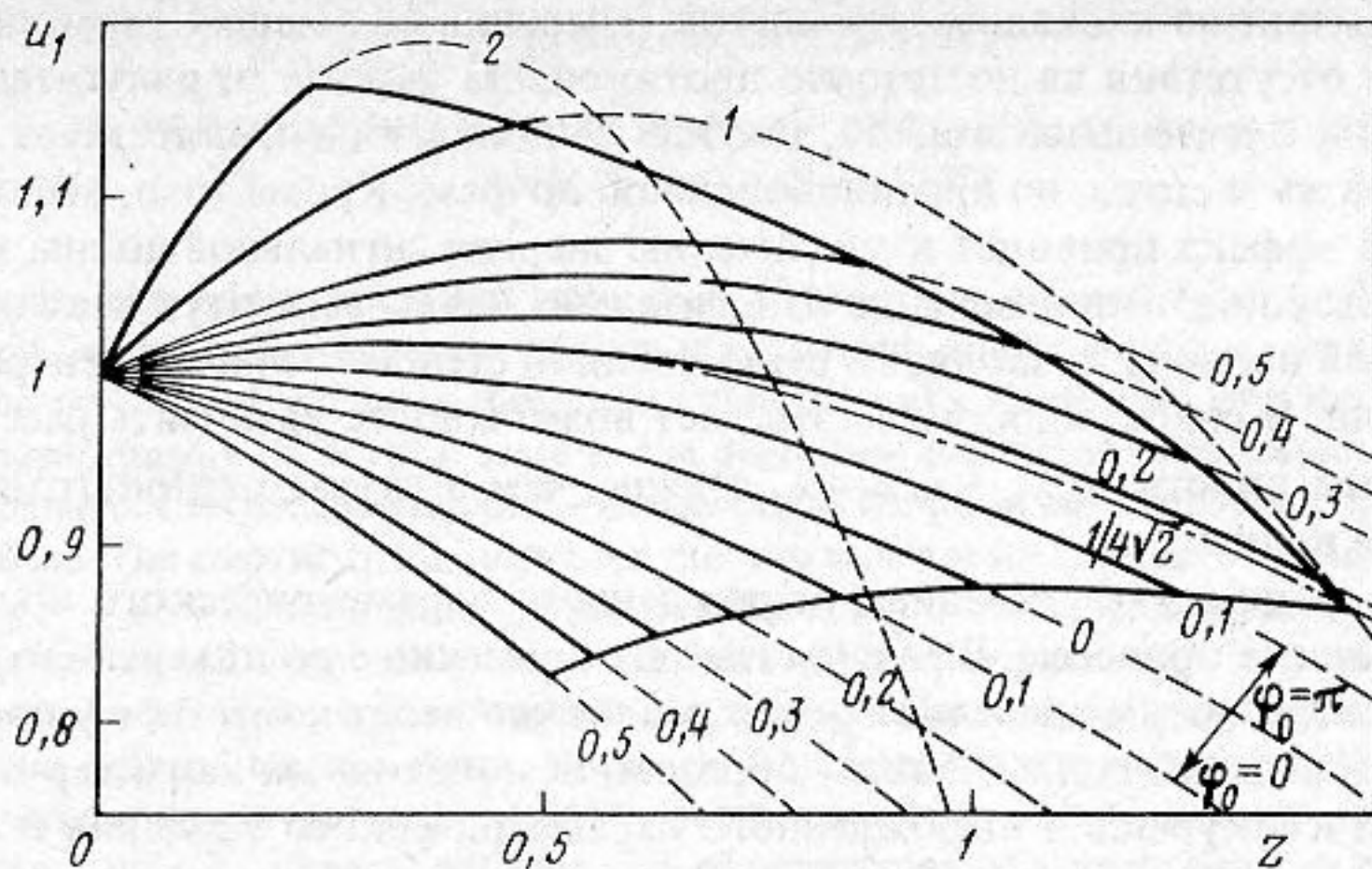


Рис. 4. Зависимость амплитуды первой гармоники u_1 от расстояния z до излучателя при различных исходных соотношениях амплитуд A и фаз φ_0

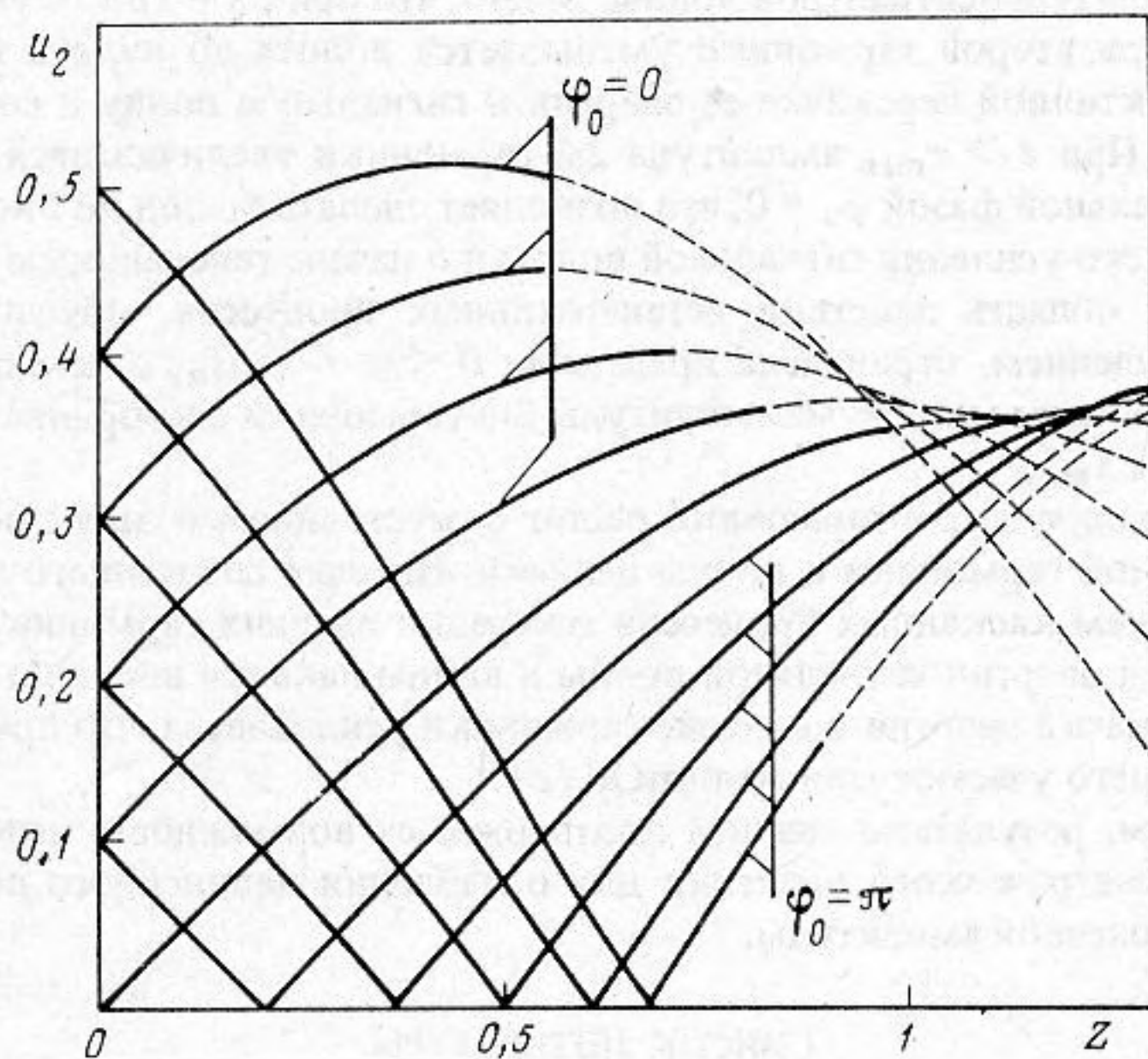


Рис. 5. Зависимость амплитуды второй гармоники u_2 от расстояния z до излучателя при различных исходных соотношениях амплитуд A и фаз φ_0

ма в сторону излучателя. Так как решение (7) справедливо для $z < z_p$, то область его применимости на рис. 4 обведена сплошной линией. Границы области $z = z_p$ при больших A приближаются к источнику ВКА при любых значениях фазы φ_0 . При этом наиболее удаленная точка образования разрыва в профиле ВКА находится на расстоянии $z = \sqrt{2}$ и соответствует $A = 1/4\sqrt{2}$ и $\varphi_0 = \pi$. Такое поведение основной гармоники можно объяснить, разделив нелинейные процессы на два вида — регенеративные, т.е. приводящие к усилению основной гармоники благодаря вырожденному параметрическому усилению и генеративные, т.е. ведущие к нелинейному поглощению посредством генерации высших гармоник сигнальной волны и комбинационных волн вследствие взаимодействия сигнальной волны и волны накачки.

Присутствие в среде 2-й гармоники сигнальной волны с относительной фазой $\varphi_0 = \pi$

препятствует развитию каскадных процессов генерации ее высших гармоник. Происходит это в силу отсутствия на достаточно протяженном участке от излучателя 2-й гармоники, синфазной с сигнальной волной, так как ее появлению препятствует наличие волны накачки той же частоты, но противоположной по фазе. Кроме того, вырожденный параметрический эффект приводит к увеличению энергии сигнальной волны за счет накачки. С другой стороны, использование относительно малых амплитуд накачки (в сравнении с сигнальной волной) позволяет в существенной степени ослабить генерацию комбинационных волн. В совокупности все это дает возможность увеличить расстояние образования разрыва вплоть до $z_p = \sqrt{2}$, т.е. дальше, чем в случае распространения отдельной сигнальной волны.

Увеличение A наряду с усилением вырожденного параметрического процесса усиливает и генеративные процессы. В результате одновременно с ростом амплитуды сигнальной волны происходит уменьшение z_p , что неизбежно ведет к быстрому последующему поглощению сигнальной волны. Таким образом, немонотонный характер $u_1(z)$ является результатом конкуренции вырожденного параметрического усиления и нелинейного поглощения: при $z < z_{\max}$ преобладает параметрическое усиление сигнальной волны, а при $z > z_{\max}$ — ее нелинейное поглощение.

Зависимость амплитуды второй гармоники $u_2(z)$ рис. 5, хорошо согласуется с распределением амплитуды сигнальной волны. Видно, что при $\varphi_0 = 180^\circ$ с увеличением расстояния амплитуда второй гармоники уменьшается вплоть до нуля в точке z_{\min} , что говорит об эффективной перекачке ее энергии в сигнальную волну и собственные высшие гармоники. При $z > z_{\min}$ амплитуда 2-й гармоники увеличивается с расстоянием, но уже с относительной фазой $\varphi_0 = 0$, что позволяет сделать вывод об окончании процесса параметрического усиления сигнальной волны и о начале генерации ею 2-й гармоники. Таким образом, область действия регенеративных процессов, обусловленных параметрическим усилением, ограничена пределами $0 < z < z_{\min}$, о чем свидетельствует совпадение координаты минимума амплитуды 2-й гармоники с координатой максимума сигнальной волны z_{\max} .

При $\varphi_0 = 0$ амплитуда 2-й гармоники растет с расстоянием в силу синфазности нелинейно генерируемой гармоники и волны накачки. Наличие спадающего участка в $u_2(z)$ связано с развитием каскадных процессов генерации высших гармоник, сопровождающихся перекачкой энергии сигнальной волны и волны накачки вверх по спектру. С увеличением A перекачка энергии в высшие гармоники усиливается, что приводит к сокращению нарастающего участка зависимости $u_2(z)$.

Таким образом, результаты анализа подтверждают возможность использования вырожденного параметрического усиления для ослабления нелинейного поглощения сигнальной волны конечной амплитуды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В. О параметрическом взаимодействии бегущих звуковых волн // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 1. С. 108–111.
2. Новиков Б.К., Руденко О.В. О вырожденном параметрическом усилении звука // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 3. С. 461–462.
3. Ляхов Г.А., Руденко О.В. Об эффекте параметрического усиления слабых сигналов в нелинейной акустике // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 5. С. 738–744.
4. Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин В.А., Руденко О.В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: МГУ, 1983. 152 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. 5-е изд. М.: Наука, 1984. 832 с.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.

Таганрогский радиотехнический институт
им. В.Д. Калмыкова

Поступила в редакцию
06.05.91

ON PROBLEM OF UTILIZATION OF DEGENERATE PARAMETRIC
AMPLIFICATION EFFECT

The degenerate case of the parametric interaction of two waves of equal order amplitudes with the frequencies ω and 2ω in a non-dispersive medium is considered. Similar conditions may occur in the consideration of the problem of nonlinear absorption attenuation of a signal wave with the frequency ω based on the effect analogous by its physical sense to the degenerate parametric amplification. The field temporal and spectral characteristics are analyzed in the framework of the plane waves model for an ideal quadratically nonlinear medium. The analysis is conducted for the two values of the second harmonic (2ω) initial phase $\varphi_0 = 0$ and $\varphi_0 = \pi$ at which the initial profile transformation is fundamentally different. It is shown that the presence of the second harmonic (pump wave) with the relative phase $\varphi_0 = \pi$ in the medium at certain values of its amplitude prevents the development of cascade processes of generation of the signal wave higher harmonics and combination waves. Moreover, the degenerate parametric effect leads to the increase of the signal wave energy on the account of the pump wave. In the whole, it allows to increase the shock formation distance by $\sqrt{2}$ compared with the case of propagation of a single signal wave. The results of the analysis confirm the possibility to use the degenerate parametric interaction for the attenuation of the nonlinear absorption of a finite amplitude signal wave.