АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 4

УДК 534.26

© 1992 г. Г.И. Иванов

ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ИЗ ОТКРЫТОГО КОНЦА ТРУБЫ, СОЕДИНЕННОГО С БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ

Рассмотрена задача об излучении плоской волны из открытого конца полубесконечной трубы, соединенного с бесконечной пластиной, в акустическое полупространство. Получены выражения для амплитуды колебаний пластины и для амплитуды продольных колебаний трубы, а также для акустического поля в полупространстве и для поля отраженной волны, уходящей обратно в трубу. Приведены результаты расчетов зависимости распределения энергии между пластиной и средой от частоты падающей волны.

Рассмотрим конструкцию следующего вида (рис. 1). В бесконечной пластине постоянной толщины h вырезано круглое отверстие радиуса R. К отверстию присоединена полубесконечная труба. Относительно стенок трубы предположим, что они обладают бесконечной жесткостью по отношению к изгибным усилиям и конечной жесткостью по отношению к продольным усилиям. Соединение трубы с пластиной выполнено таким образом, что их срезы жестко связаны друг с другом, и срез трубы находится в плоскости пластины. Снаружи трубы–вакуум. Внутри трубы находится акустическая среда с параметрами (ρ_1, c_1), а по другую сторону конструкции – акустическая среда с параметрами (ρ_0, c_0). По среде, находящейся в трубе, из бесконечности приходит плоская волна амплитуды p_0, зависящая от времени по закону $e^{-i\omega t}$. Требуется определить амплитуду колебаний конструкции и акустические поля в полупространстве и внутри трубы.

Сформулируем поставленную задачу математически. Для пластины надо решить уравнение изгибных колебаний

$$D(\Delta\Delta w - k_u^4 w) = -p_1(r, 0), \tag{1}$$

где $k_u^4 = \omega^2 \rho h/D$, D – цилиндрическая жесткость, ρ – плотность материала пластины, p_1 – давление среды, заполняющей полупространство $\omega = 2\pi f$, f – частота падающей волны. Это уравнение должно решаться при следующих граничных условиях: при равенстве нулю угла поворота среза пластины,

$$(\partial w/\partial r)_{r=R} = 0, \tag{2}$$

и при равенстве между собой величины смещения среза пластины и амплитуды продольных колебаний трубы:

$$w(R) = v(0). \tag{3}$$

Последние, кроме того, должны удовлетворять уравнению

$$\partial^2 v/\partial z^2 + \kappa^2 v = 0. \tag{4}$$

Для поля в среде надо решить уравнения Гельмгольца при следующих граничных условиях: при непрерывности давления и нормальной составляющей скорости на границе раздела сред:

$$p_1(r, 0) = p_2(r, 0), \tag{5}$$

$$(\partial p_1(r,z)/\partial z)_{z=0} = \rho_0/\rho_1 (\partial p_2(r,z)/\partial z)_{z=0}, \tag{6}$$

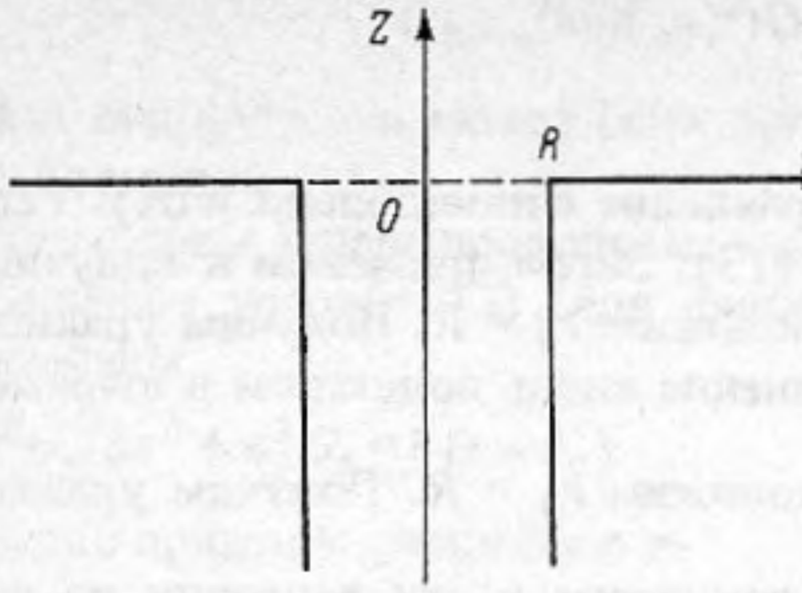

Рис. 1. Вид конструкции в разрезе и используемая система координат

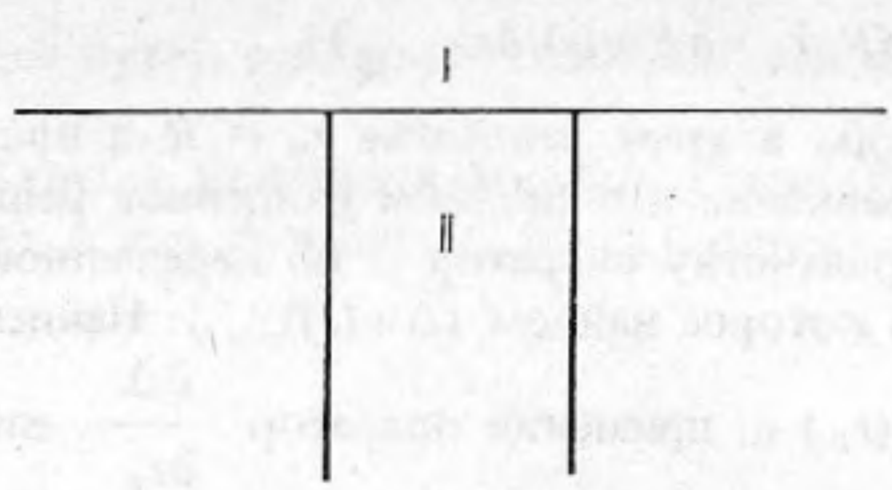

Рис. 2. Условное разбиение на области пространства, заполненного акустической средой

при отсутствии радиальной компоненты скорости на поверхности трубы:

$$(\partial p_2(r,z)/\partial r)_{r=R} = 0, \tag{7}$$

и при условии прилипания среды к поверхности пластины:

$$w(r) = 1/(\rho_0\omega^2)(\partial p_1(r,z)/\partial z)_{z=0}. \tag{8}$$

Решение задачи будем строить методом частичных областей. Разбиение на области проведем так, как показано на рис. 2. Запишем интегралы Кирхгофа для поля в первой области и для отраженного поля во второй области с учетом условий (6) и (7):

$$p_1(r_0,z_0) = \int\limits_R^\infty \rho_0\omega^2 w(r) g_0(r,0,r_0,z_0)\,r\,dr + \int\limits_0^R (\partial p_1(r,z)/\partial z)_{z=0}\cdot g_0(r,0,r_0,z_0)\,r\,dr, \tag{9}$$

$$p_{2\,\text{отр}}(r_0,z_0) = -\int\limits_0^{R_0} (\partial p_{2\,\text{отр}}(r,z)/\partial z)_{z=0}\, g_1(r,0,r_0,z_0)\,r\,dr. \tag{10}$$

Здесь g_0 и g_1 – функции Грина, определенные выражениями

$$g_i(r,z,r_0,z_0) = -i/4 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z_0-z)}\bigl(H_0^{(1)}(r\sqrt{k_i^2-k^2})J_0(r_0\sqrt{k_i^2-k^2}) -$$

$$- J_0(r_0\sqrt{k_i^2-k^2})J_0(r\sqrt{k_i^2-k^2})H_1^{(1)}(R\sqrt{k_i^2-k^2})/J_1(R\sqrt{k_i^2-k^2})\bigr)\,dk \quad \text{при } r_0<r, \tag{11а}$$

$$g_i(r,z,r_0,z_0) = -i/4 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z_0-z)}\bigl(H_0^{(1)}(r_0\sqrt{k_i^2-k^2})J_0(r\sqrt{k_i^2-k^2}) -$$

$$- J_0(r_0\sqrt{k_i^2-k^2})J_0(r\sqrt{k_i^2-k^2})H_1^{(1)}(R\sqrt{k_i^2-k^2})/J_1(R\sqrt{k_i^2-k^2})\bigr)\,dk \quad \text{при } r_0>r,$$

$$i = 0, 1. \tag{11б}$$

Кроме того, запишем для функции $w(r)$ и для функции $G(r, r_0)$, определенной уравнением

$$D(\Delta\Delta G - k_u^4 G) = 1/r\,\delta(r-r_0), \tag{12}$$

формулу, являющуюся следствием формулы Грина–Римана [1]:

$$\iint\limits_S (w\Delta\Delta G - G\Delta\Delta w)\,dS = \oint\limits_L (w\,\partial\Delta G/\partial n - \partial w/\partial n\,\Delta G + \Delta w\,\partial G/\partial n - \partial\Delta w/\partial n\,G)\,dl,$$

где S – поверхность пластины, L – контур, проведенный по краю среза, $\dfrac{\partial}{\partial n} = -\dfrac{\partial}{\partial r}$.

Используя уравнения (1) и (12), эту формулу можно преобразовать к виду

$$w(r_0) = -\int\limits_R^\infty G(r,r_0)p_1(r,0)\,r\,dr + DR\,(-w(R)\,(\partial\Delta G(r,r_0)/\partial r)_{r=R} +$$

$$+ (\partial w(r)/\partial r)_{r=R} (\Delta G(r, r_0))_{r=R} - (\Delta w(r))_{r=R} (\partial G(r, r_0)/\partial r)_{r=R} +$$
$$+ G(R, r_0)(\partial \Delta w(r)/\partial r)_{r=R}). \qquad (13)$$

Положим в этом равенстве $r_0 = R$ и получим уравнение относительно $w(R)$. Решим это уравнение и подставим найденное решение в (13). Затем применим к получившемуся равенству оператор Δ по переменной r_0 и положим $r_0 = R$. Получим уравнение, решив которое найдем $(\Delta w(r))_{r=R}$. Найденное решение вновь подставим в выражение для $w(r_0)$ и, применив оператор $\dfrac{\partial \Delta}{\partial r_0}$, еще раз положим $r_0 = R$. Получим уравнение относительно $(\partial \Delta w(r)/\partial r)_{r=R})$, решив которое, исключим и эту величину из выражения для $w(r_0)$. В результате это выражение примет вид

$$w(r_0) = -\int_R^\infty F_1(r, r_0) p_1(r, 0) r dr + (\partial w(r)/\partial r)_{r=R} F_2(r_0).$$

Величины F_1, F_2 представляют собой комбинации функции G и ее производных, взятых на краю среза. Явный вид этих величин не приводится в виду их громоздкости.

Сделаем в формуле для $w(r_0)$ еще одно преобразование, учтя граничное условие (2) и воспользовавшись для $p_1(r, 0)$ выражением (8):

$$w(r_0) = \rho_0 \omega^2 \int_R^\infty w(r) F_3(r, r_0) r dr + \int_0^R (\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0} F_3(r, r_0) r dr. \qquad (14)$$

Здесь

$$F_3(r, r_0) = \int_R^\infty F_1(r_1, r_0) g_0(r, 0, r_1, 0) r_1 dr_1.$$

Воспользовавшись явным видом функций F_1 и g_0, можно убедиться, что интеграл

$$\int_R^\infty \int_R^\infty | r F_3(r, r_0) |^2 dr_0 dr$$

существует, и, следовательно, равенство (14) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода [2] относительно величины $w(r)$. Решение этого уравнения может быть выражено через числитель и знаменатель Фредгольма, построенные из ядра

$$K_1(r, r_0) = \rho_0 \omega^2 r F_3(r, r_0)$$

по формулам [3]

$$R_1(r, r_0) = K_1(r, r_0) - 1/1! \int_R^\infty \begin{vmatrix} K_1(r, r_0) & K_1(r_1, r_0) \\ K_1(r, r_1) & K_1(r_1, r_1) \end{vmatrix} dr_1 + \ldots,$$

$$D_1 = 1 - \int_R^\infty K_1(r, r) dr + 1/2! \int_R^\infty \int_R^\infty \begin{vmatrix} K_1(r_1, r_1) & K_1(r_1, r_2) \\ K_1(r_2, r_1) & K_1(r_2, r_2) \end{vmatrix} dr_1 dr_2 - \ldots,$$

следующим образом:

$$w(r_0) = \int_0^R (\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0} F_3(r, r_0) r dr + \int_R^\infty p_1(r_1, r_0)/D_1 \int_0^R (\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0} \times$$
$$\times F_3(r, r_1) r dr dr_1, \qquad (15)$$

или, после введения упрощающих обозначений:

$$w(r_0) = \int_0^R (\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0} F_5(r, r_0) r dr. \qquad (16)$$

Явный вид функции может быть легко найден путем сопоставления последней формулы с формулой (15).

Рассмотрим теперь продольные колебания трубы. Используя формулу Грина–Римана и граничное условие (3), для функции $v(z)$ и для функции $G_t(z, z_0)$, определенной уравнением

$$\partial^2 G_t/\partial z^2 + \kappa^2 G_t = \delta(z - z_0),$$

нетрудно придти к соотношению

$$v(z_0) = w(R)\Phi_1(z_0), \tag{17}$$

где

$$\Phi_1(z_0) = (\partial G_t(z, z_0)/\partial z)_{z=0} + G_t(0, z_0)(\partial^2 G_t(z, z_0)/\partial z\, \partial z_0)_{\substack{z=0\\ z_0=0}} (1 -$$

$$- (\partial G_t(0, z_1)/\partial z_1)_{z=0})^{-1}.$$

Использовав здесь выражение (16), получим следующее:

$$v(z_0) = \Phi_1(z_0)\int_0^R (\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0} F_5(r, R) r\,dr.$$

Теперь подставим (16) в (9)

$$p_1(r_0, z_0) = \int_R^\infty (\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0} F_6(r, r_0, z_0) r\,dr, \tag{18}$$

$$F_6(r, r_0, z_0) = g_0(r, 0, r_0, z_0) + \rho_0\omega^2 \int_R^\infty g_0(r_1, 0, r_0, z_0) F_5(r, r_1) r_1\, dr_1,$$

и учтем в (10) граничное условие (6):

$$p_{2\,\text{отр}}(r_0, z_0) = -\rho_1/\rho_0 \int_0^R (\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0} g_1(r, 0, r_0, z_0) r\,dr +$$

$$+ ik_1 p_0 \int_0^R g_1(r, 0, r_0, z_0) r\,dr. \tag{19}$$

В результате вся задача свелась к нахождению $(\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0}$. Чтобы это проделать, подставим выражения (18) и (19) в граничное условие (5):

$$\int_0^R (\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0} F_7(r, r_0) r\,dr = p_0 F_8(r_0), \tag{20}$$

$$F_7(r, r_0) = \rho_1/\rho_0 g_1(r, 0, r_0, 0) + F_6(r, r_0, 0),$$

$$F_8(r_0) = 1 + ik_1 \int_0^R g_1(r, 0, r_0, 0) r\,dr.$$

Используя явный вид функций g_1 и F_6, можно показать, что интеграл

$$\int_0^R \int_0^R |F_7(r, r_0) r|^2 dr_0\, dr$$

существует, и, следовательно, равенство (20) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно величины $(\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0}$. Построим его приближенное решение. Для этого сначала заменим интеграл, стоящий в левой части (18), на выражение, даваемое квадратурной формулой Симпсона [4]:

$$\sum_{i=1}^N h_N/6 (F_7(r_{i-1}, r_0)(\partial p_1(r_{i-1}, z)/\partial z)_{z=0} r_{i-1} +$$

$$+ 4F_7(r_i - h_N/2, r_0)(r_i - h_N/2)(\partial p_1(r_i - h_N/2, z)/\partial z)_{z=0} +$$

$$+ F_7(r_i, r_0)(\partial p_1(r_i, z)/\partial z)_{z=0}) = p_0 F_8(r_0).$$

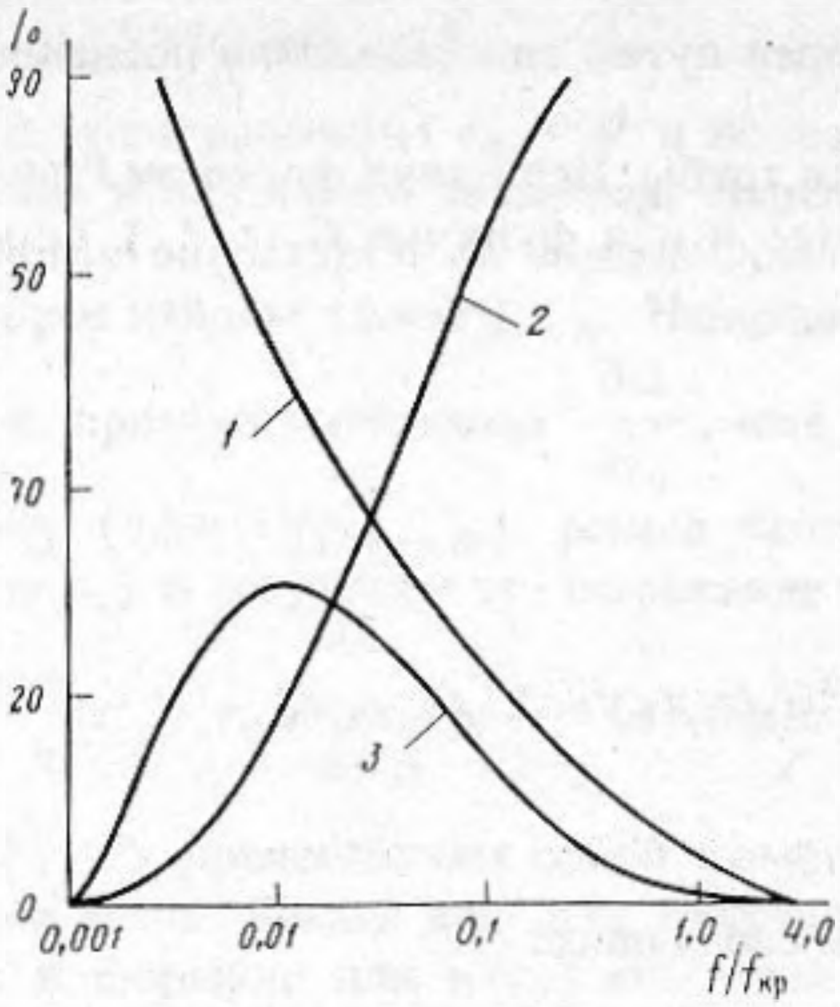

Рис. 3. Энергетический баланс в системе в зависимости от частоты падающей волны. Кривая *1* – энергия, уносимая отраженной волной обратно в трубу, кривая *2* – энергия, уходящая в полупространство, кривая *3* – энергия, уносимая по пластине изгибной волной

Полагая здесь по очереди $r_0 = r_1, r_1 + h_N/2, \ldots, r_N - h_N/2, r_N$, получим систему уравнений для определения значений величины $(\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0}$ в точках $r_1, r_1 + h_N/2, \ldots$ $\ldots, r_N - h_N/2, r_N$. Затем по этим значениям восстановим вид функции $(\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0}$ с помощью интерполяционной формулы

$$(\partial p_1(r,z)/\partial z)_{z=0} = \sum_{n=0}^{2N} c_n J_0(j_n K_0 r), \tag{21}$$

где $j_0 = 1$, а j_n при $n = 1, 2, \ldots, 2N$ – корни функции $J_0(z)$. Коэффициенты могут быть найдены из системы уравнений

$$(\partial p_1(r_i, z)/\partial z)_{z=0} = \sum_{n=0}^{2N} c_n J_0(j_n k_0 r_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 2N.$$

Решив эту систему, найдем коэффициенты и, подставив их в (21), найдем $(\partial p_1(r, z)/\partial z)_{z=0}$. Затем подставим найденную величину в формулы (19), (18), (17) и (16) и получим полное решение поставленной задачи.

Что касается выбора числа узлов, то оно выбиралось из условия

$$\max_{r_0 \in [0, R]} \left| \int_0^R F_7(r, r_0) \sum_{n=0}^{2N} c_n J_0(j_n k_0 r) r dr - p_0 F_8(r_0) \right| < \epsilon,$$

где ϵ – наперед заданная величина. Как показали расчеты, это условие выполняется при $\epsilon = 10^{-3}$ при $N \sim 60$–70.

По полученным формулам был произведен расчет энергетического баланса в системе. Результаты этого расчета приведены на рис. 3. В качестве примера бралась пластина из стали толщиной 5 см, радиус отверстия 15 см, среда в полупространстве и в трубе – вода. Как видно из приведенного рисунка, на низких частотах основная доля энергии уносится в трубу отраженной волной. С ростом частоты эта доля уменьшается. Доля же энергии, уходящей в полупространство, наоборот, увеличивается. Их выравнивание происходит вблизи той частоты, на которой выполняется условие $\omega \rho h = \rho_0 c_0$. С дальнейшим ростом частоты доля энергии, уходящей в полупространство, начинает преобладать.

Что касается энергии, уносимой по пластине изгибной волной, то на низких частотах она возрастает, становясь даже больше энергии, уходящей в полупространство, достигает максимума, а затем спадает до нуля. Все эти закономерности сохраняются и при варьировании параметров задачи (толщины, плотности и жесткости пластины, размера отверстия, акустического импеданса среды в трубе).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белинский Б.П., Коузов Д.П.* О формулах типа формул Грина для изгибно колеблющейся пластины // Акуст. журн. Т. 27. 1981. Вып. 5. С. 710–718.
2. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: ИЛ, 1951.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.

Центральный научно-исследовательский
институт им. А.Н. Крылова

Поступила в редакцию
17.10.91

G.I. Ivanov

PLANE WAVE RADIATION OUT OF PIPE OPEN END CONNECTED WITH INFINITE PLATE

The problem of a plane wave radiation out of the open end of a semi-infinite pipe connected with an infinite plate into an acoustic half-space has been solved.

The impedance of the pipe was taken to be finite with respect to longitudinal forces and infinitely large with respect to bending forces.

Expressions for the plate vibration and for the amplitude of the longitudinal pipe vibrations were obtained as well as expressions for the acoustic field in a half-space and for the field of a reflected wave propagating back to the pipe.

The results of calculations of the dependence of energy distribution between the plate and the medium on the incident wave frequency are given.