АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 4

УДК 534.4

© 1992 г. И.А. Урусовский

О ПРОХОЖДЕНИИ ЗВУКА ЧЕРЕЗ ДВЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ, СКРЕПЛЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ РЕБРАМИ

Решена задача о прохождении падающей плоской волны через две параллельные пластинки, скрепленные между собой периодически расположенными массивными ребрами. Найдены амплитуды пространственного спектра прошедших через пластинки и рассеянных волн.

В работе [1] рассмотрено прохождение плоской звуковой волны через две параллельные пластинки, соединенные периодически расположенными ребрами. Однако в исходных уравнениях не был учтен фазовый множитель при силе, действующей на пластинки со стороны ребра, обусловленный косым падением плоской волны на пластинки, не учтена и инерция ребер. Кроме того, уже в промежуточных формулах пренебрежено акустическим воздействием на пластинки со стороны среды, находящейся между пластинками, а окончательные формулы не содержат явных выражений для амплитуд пространственного спектра дифрагированных, в том числе прошедших, волн.

Для устранения указанных недостатков рассмотрим задачу заново и применим более прямой метод расчета, при котором акустические поля с самого начала представлены в виде дискретных пространственных спектров. Как и в [1], будем считать пластинки опертыми на ребра. Ограничимся плоским случаем, когда плоская падающая волна задана в виде

$$p_i(x,z) = \exp\{i[k_x^0 x - k_z^0 (z-d)]\}, \tag{1}$$

где $k_z^0 = \sqrt{k^2 - (k_x^2)^2}$, x – координата вдоль пластинки, z – координата, перпендикулярная пластинкам, первая пластинка расположена в плоскости $z = 0$, вторая – в плоскости $z = d$, $k = \omega/c$ – волновое число, ω – круговая частота колебаний, c – скорость звука в окружающей среде; временной множитель $\exp(-i\omega t)$ подразумевается. Пусть ребра расположены в точках $x = nl$. Уравнения движения пластинок, связанных этими ребрами, имеют вид

$$D_1 \frac{d^4}{dx^4} v_1(x) - m_1 \omega^2 v_1(x) = i\omega \{p_0(x,0) - p_t(x,0) -$$

$$- \exp(ik_x^0 x)\, Q_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl)\}, \tag{2}$$

$$D_2 \frac{d^4}{dx^4} v_2(x) - m_2 \omega^2 v_2(x) = i\omega \{p_i(x,d) + p_s(x,d) -$$

$$- p_0(x,d) + \exp(ik_x^0 x)\, Q_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl)\}, \tag{3}$$

где $v_j(x)$ – скорость колебаний j-й пластинки вдоль оси z, m_j – поверхностная плотность пластинки, $D_j = E_j h_j^3 | [12(1-\nu_j^2)]$, E_j – модуль Юнга пластинки, h_j – ее толщина, ν_j – ее коэффициент Пуассона, Q_j – сосредоточенная сила, действующая на пластинку, l – расстояние между соседними ребрами, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

$$p_s(x, z) = \sum_n R_n \exp\{i[k_x^n x + k_z^n (z-d)]\} \tag{4}$$

– звуковое давление в дифрагированном поле в области $z > d$,

$$k_x^n = k_x^0 + nq, \quad q = 2\pi/l, \quad k_z^n = \sqrt{k^2 - (k_x^n)^2}; \quad \mathrm{Re}, \mathrm{Im}\, k_x^n \geqslant 0,$$

$$p_t(x, z) = \sum_n T_n \exp[i(k_x^n x - k_z^n z)] \tag{5}$$

– звуковое давление за пластинками, в области $z < 0$,

$$p_0(x, z) = \sum_n [A_n \exp(ik_{0z}^n z) + B_n \exp(-ik_{0z}^n z)] \exp(ik_x^n x) \tag{6}$$

– звуковое давление между пластинками, $k_{0z}^n = \sqrt{k_0^2 - (k_x^n)^2}$, $k_0 = \omega/c_0$, c_0 – скорость звука в среде между пластинками. Функции (4) – (6) удовлетворяют уравнениям Гельмгольца в соответствующей среде и условиям непрерывности

$$i\omega\rho v_2(x) = \frac{\partial}{\partial z}[p_i(x, z) + p_s(x, z)]_{z=d}, \tag{7}$$

$$i\omega\rho_0 v_2(x) = \frac{\partial}{\partial z} p_0(x, z)|_{z=d}, \tag{8}$$

$$i\omega\rho_0 v_1(x) = \frac{\partial}{\partial z} p_0(x, z)|_{z=0}, \tag{9}$$

$$i\omega\rho v_1(x) = \frac{\partial}{\partial z} p_t(x, z)|_{z=0}, \tag{10}$$

где ρ_0 – плотность среды между пластинками, ρ – плотность окружающей среды. В силу периодичности структуры v_j представимы в виде

$$v_1(x) = \exp(ik_x^0 x)\sum_n U_n \exp(inqx), \quad v_2(x) = \exp(ik_x^0 x)\sum_n V_n \exp(inqx). \tag{11}$$

Сумма δ-функций в формулах (2) и (3) может быть представлена по формуле Пуассона в виде [1]

$$\sum_n \delta(x - nl) = \frac{1}{l}\sum_n \exp(inqx). \tag{12}$$

Подставив функции (1), (4) – (6), (11) и (12) в уравнения (2), (3), (7) – (11) и приравняв суммы коэффициентов при $\exp(inqx)$ при каждом n в обеих частях получающихся равенств, получим, учитывая (13), систему алгебраических уравнений

$$[D_1(k_x^n)^4 - m_1\omega^2]U_n = i\omega(A_n + B_n - T_n + \frac{1}{l}Q_1), \tag{13}$$

$$[D_2(k_x^n)^4 - m_2\omega^2]V_n = i\omega[\delta_n + R_n - A_n \exp(ik_{0z}^n d) -$$

$$- B_n \exp(-ik_{0z}^n d) + \frac{1}{l}Q_2], \tag{14}$$

где $\delta_0 = 1$, $\delta_n = 0$ при $n \neq 0$,

$$V_n = (R_n - \delta_n)k_z^n/(\omega\rho), \tag{15}$$

$$V_n = [A_n \exp(ik_{0z}^n d) - B_n \exp(-ik_{0z}^n d)]k_{0z}^n/(\omega\rho_0), \tag{16}$$

$$U_n = (A_n - B_n)k_{0z}^n/(\omega\rho_0), \tag{17}$$

$$U_n = -T_n k_z^n/(\omega\rho). \tag{18}$$

Решение этой системы уравнений дается формулами

$$U_n = i\omega\left[\frac{2}{\Delta_0} K_0\omega^2\delta_n + \frac{1}{l\Delta_n}(Q_2K_n\omega^2 + Q_1L_{2n})\right], \tag{19}$$

$$V_n = i\omega\left[\frac{2}{\Delta_0} L_{10}\delta_n + \frac{1}{l\Delta_n}(Q_2L_{1n} + Q_1K_n\omega^2)\right], \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} &2A_n = i[U_n\exp(-ik^n_{0z}d) - V_n]\rho_0\omega/(k^n_{0z}\sin k^n_{0z}d) \\ &B_n = A_n - \frac{\omega\rho_0}{k^n_{0z}}U_n, \quad R_n = \delta_n + \frac{\omega\rho}{k^n_z}V_n, \quad T_n = -\frac{\omega\rho}{k^n_z}U_n \end{aligned}\right\}, \tag{21}$$

где

$$L_{1n} = D_1(k^n_x)^4 - \left[m_1 - K_n\exp(-ik^n_{0z}d) + i\left(\frac{\rho}{k^n_z} - \frac{\rho_0}{k^n_{0z}}\right)\right]\omega^2,$$

$$L_{2n} = D_2(k^n_x)^4 - \left[m_2 - K_n\exp(ik^n_{0z}d) + i\left(\frac{\rho}{k^n_z} - \frac{\rho_0}{k^n_{0z}}\right)\right]\omega^2,$$

$$K_n = \rho_0/(k^n_{0z}\sin k^n_{0z}d), \quad \Delta_n = L_{1n}L_{2n} - K_n^2\omega^2.$$

Проведя в равенствах (19) и (20) суммирование по n, с учетом соотношений (11) получим

$$v_1(0) = i\omega\left(\frac{2}{\Delta_0}K_0\omega^2 + Q_1\lambda_2 + Q_2\kappa\omega^2\right), \tag{22}$$

$$v_2(0) = i\omega\left(\frac{2}{\Delta_0}L_{10} + Q_1\kappa\omega^2 + Q_2\lambda_1\right), \tag{23}$$

где

$$\kappa = (1/l)\sum_n K_n/\Delta_n, \quad \lambda_j = (1/l)\sum_n L_{jn}/\Delta_n.$$

Для нахождения сосредоточенных сил Q_1 и Q_2 будем считать ребра, соединяющие пластинки, несжимаемыми, откуда следуют условия

$$v_1(0) = v_2(0) \equiv v(0), \quad Q_1 + Q_2 = -i\omega Mv(0), \tag{24}$$

где M – масса ребра. Первое условие означает равенство колебательных скоростей пластинок в точках соединения их с общими ребрами, второе выражает уравнение движения ребер. Решение уравнений (22) – (24) дает

$$Q_1 = \frac{2}{\Delta_0\Delta}M\omega^2[\omega^2(1 - \omega^2M\lambda_1)K_0 - (1 - \omega^4M\kappa)L_{10}],$$

$$Q_2 = \frac{2}{\Delta_0\Delta}M\omega^2[(1 - \omega^2M\lambda_2)L_{10} - \omega^2(1 - \omega^4M\kappa)K_0],$$

где

$$\Delta = (1 - \omega^2M\lambda_1)(1 - \omega^2M\lambda_2) - (1 - \omega^4M\kappa)^2.$$

Рассмотрим теперь более жесткое скрепление пластинок с ребрами, когда пластинки заделаны на ребрах так, что наклон пластинок в местах скрепления их с ребрами равен нулю: $\partial v_1/\partial x = \partial v_2/\partial x = 0$ при $x = ml$, m – целое. Поскольку $ql = 2\pi$, отсюда и из формул (11) найдем

$$\sum_n k^n_x U_n = \sum_n k^n_x V_n = 0. \tag{25}$$

Для обеспечения такого скрепления со стороны ребер к пластинкам должны быть приложены подходящие моменты сил. Для учета этих моментов к правым частям формул (2) и (3) следует добавить соответственно

$$\pm i\omega \exp(ik_x^0 x)(W^{\pm}/\epsilon)\sum_n [\delta(x-\epsilon-nl)-\delta(x+\epsilon-nl)]$$

с последующим устремлением ϵ к нулю. Подставив в видоизмененные таким образом уравнения (2) и (3) функции (1), (4)–(6), (11) и (12) и приравняв суммы коэффициентов при $\exp(inqx)$ при каждом n в обеих частях получающихся равенств, приходим к алгебраическим уравнениям

$$[D_1(k_x^n)^4 - m_1\omega^2]U_n = i\omega\left[A_n + B_n - T_n + \frac{Q_1}{l} - 2i\frac{W^+}{l}\frac{\sin nq\epsilon}{\epsilon}\right], \tag{26}$$

$$[D_2(k_x^n)^4 - m_2\omega^2]V_n = i\omega\left[\delta_n + R_n - A_n\exp(ik_{0z}^n d) - B_n\exp(-ik_{0z}^n d) + \frac{1}{l}Q_2 + 2i\frac{W^-}{l}\frac{\sin nq\epsilon}{\epsilon}\right]. \tag{27}$$

Уравнения (15)–(18) и (21) сохраняют силу и в рассматриваемом случае. Решение системы уравнений (26), (27) и (21) для U_n и V_n получится прибавлением к правым частям выражений (19) и (20) соответственно величин

$$\frac{2\omega}{\Delta_n l}\frac{\sin nq\epsilon}{\epsilon}(L_{2n}W^+ - \omega^2 K_n W^-) \quad \text{и} \quad \frac{2\omega}{\Delta_n l}\frac{\sin nq\epsilon}{\epsilon}(\omega^2 K_n W^+ - L_{1n}W^-).$$

Суммирование по n в этих выражениях для U_n и V_n с учетом соотношений (11) дает выражения для $v_1(0)$ и $v_2(0)$, получающиеся прибавлением к правым частям выражений (22) и (23) соответственно величин

$$2\omega(\nu_2 W^+ - \omega^2\mu W^-) \quad \text{и} \quad 2\omega(\omega^2\mu W^+ - \nu_1 W^-),$$

где

$$\mu = \frac{1}{l}\sum_n \frac{\sin nq\epsilon}{\epsilon\Delta_n}K_n, \quad \nu_j = \frac{1}{l}\sum_n \frac{\sin nq\epsilon}{\epsilon\Delta_n}L_{jn}.$$

Составив теперь из найденных выражений для U_n и V_n суммы (25), найдем

$$\tilde{\lambda}_2 Q_1 + \tilde{\kappa}\omega^2 Q_2 = -2k_x^0\omega^2(K_0/\Delta_0) + 2i(\tilde{\nu}_2 W^+ - \tilde{\mu}\omega^2 W^-), \tag{28}$$

$$\tilde{\kappa}\omega^2 Q_1 + \tilde{\lambda}_1 Q_2 = -2k_x^0(L_{10}/\Delta_0) + 2i(\tilde{\mu}\omega^2 W^+ - \tilde{\nu}_1 W^-), \tag{29}$$

где

$$\tilde{\kappa} = k_x^0\kappa + q\kappa', \quad \tilde{\lambda}_j = k_x^0\lambda_j + q\lambda_j', \quad \tilde{\nu}_j = k_x^0\nu_j + q\nu_j', \quad \tilde{\mu} = k_x^0\mu + q\mu',$$

$$\kappa' = \frac{1}{l}\sum_n \frac{n}{\Delta_n}K_n, \quad \lambda_j' = \frac{1}{l}\sum_n \frac{n}{\Delta_n}L_{jn}, \quad \mu' = \frac{1}{l}\sum_n n\frac{\sin nq\epsilon}{\Delta_n\epsilon}K_n,$$

$$\nu_j' = \frac{1}{l}\sum_n n\frac{\sin nq\epsilon}{\epsilon\Delta_n}L_{jn},$$

причем при $\epsilon \to 0$ $(\sin nq\epsilon)/\epsilon \to nq$.

Из найденных выражений для $v_1(0)$, $v_2(0)$ и уравнений (24), (28) и (29) получим

$$Q_j = \frac{2}{\Delta}M\omega^2(C_j + iW^+A_j + iW^-B_j),$$

где

$$C_1 = [(1 - M\omega^2\lambda_1)K_0\omega^2 - (1 - M\kappa\omega^4)L_{10}]/\Delta_0,$$

$$C_2 = [(1 - M\omega^2\lambda_2)L_{10} - (1 - M\kappa\omega^4)K_0\omega^2]/\Delta_0,$$

$$A_1 = (1 - M\kappa\omega^4)\mu\omega^2 - (1 - M\lambda_1\omega^2)\nu_2,$$

$$A_2 = (1 - M\kappa\omega^4)\nu_2 - (1 - M\lambda_2\omega^2)\mu\omega^2,$$

$$B_1 = (1 - M\lambda_1\omega^2)\mu\omega^2 - (1 - M\kappa\omega^4)\nu_1,$$

$$B_2 = (1 - M\lambda_2\omega^2)\nu_1 - (1 - M\kappa\omega^4)\mu\omega^2,$$

$$iW^+ = (b_1a_4 - b_2a_2)\omega^2/(a_1a_4 - a_2a_3), \quad iW^- = (b_1a_3 - b_2a_1)/(a_1a_4 - a_2a_3),$$

$$a_1 = \tilde{\nu}_2 - (A_1\tilde{\lambda}_2 + A_2\tilde{\kappa}\omega^2)\frac{M}{\Delta}\,\omega^2, \quad a_2 = \tilde{\mu} + (B_1\tilde{\lambda}_2 + B_2\tilde{\kappa}\omega^2)\,\frac{M}{\Delta},$$

$$a_3 = \tilde{\mu} - (A_1\tilde{\kappa}\omega^2 + A_2\tilde{\lambda}_1)\,\frac{M}{\Delta}\,, \quad a_4 = \tilde{\nu}_1 - (B_1\tilde{\kappa}\omega^2 - B_2\tilde{\lambda}_1)\,\frac{M}{\Delta}\,,$$

$$b_1 = k_x^0\,\frac{K_0}{\Delta_0} + (C_1\tilde{\lambda}_2 + C_2\tilde{\kappa}\omega^2)\,\frac{M}{\Delta}\,,$$

$$b_2 = k_x^0\,\frac{L_{10}}{\Delta_0} + (C_1\tilde{\kappa}\omega^2 + C_2\tilde{\lambda}_1)\frac{M}{\Delta}\,\omega^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin Gau-Feng and Carrelick J.M.* Sound transmission through periodically framed parallel plates // J. Acoust. Soc. Amer. 1977. V. 61. No 4. P. 1014–1018.

Акустический институт
им. Н.Н. Андреева
Российской Академии наук

Поступила в редакцию
04.07.91

I.A. Urusovskii

ON SOUND TRANSMITTION THROUGH PERIODICALLY FRAMED PARALLEL PLATES

The plane problem of transmission of plane sound wave through two infinite parallel plates connected by identical periodically spaced massive frames is solved. Fluid loading within and without the cavity space as well as the net interaction inertial and elastic forces produced by the supports is taken into account. The velocity of sound and density of fluid placed between those plates may be, in general, different from ones of two semi-infinite fluids in contact with the plates concerning. The amplitudes of spatial spectrum of waves transmitted throgh an scattering by the plates with those supports are presented.