АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 5

УДК 534

 В.Н. Алексеев, А.Г. Семенов

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА ДВИЖУЩЕЙСЯ СФЕРОЙ

В работе теоретически исследовалось звуковое поле в окрестности сферы малого радиуса, движущейся в идеальной жидкости с постоянной скоростью, много меньшей скорости звука. Вычислены амплитуды и сечения рассеяний звука, как парциальные, учитывающие рассеяние звуковых волн на движущемся теле и на сопутствующем течении по отдельности, так и суммарные.

Задача о рассеянии звуковых волн на неподвижной сфере принадлежит к числу классических и служит эталонной задачей при изучении рассеяния звука на телах произвольной формы. Однако в реальных ситуациях рассеивающие тела нередко находятся в состоянии движения и увлекают за собой окружающую жидкость. Обычно движением тела и соответствующим течением среды можно пренебречь, но в ряде случаев роль движений оказывается существенной, и тогда их влияние на распространение звука приходится учитывать [1, 2]. Соответствующие расчеты носят при этом приближенный характер, но зачастую они бывают недостаточны и не совсем корректны, поскольку движения тела и среды рассматриваются по отдельности и вне зависимости друг от друга [3, 4]. В работе [5] приведено решение для частного случая акустически прозрачной сферы, где действие окружающей жидкости на звук можно отделить. Последовательное рассмотрение задачи о распространении звука в окрестности движущегося тела с учетом течения жидкости и в более общем случае составляет главную цель настоящей работы.

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда в безграничной и однородной жидкости, покоящейся на бесконечности, движется твердая сфера радиуса a с постоянной скоростью $\mathbf{V}$. Движущаяся сфера увлекает за собой прилегающие к ее поверхности частички жидкости и окружающая среда в окрестности тела также приходит в движение. Если скорость движения сферы, а следовательно, и скорость течения жидкости много меньше скорости звука в среде, то жидкость можно считать несжимаемой. При условии, что обтекание тела потенциально, а жидкость можно считать идеальной, распределение скорости в среде $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ описывается хорошо известной формулой

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \frac{a^3}{2}\,\frac{3(\mathbf{V}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{V}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \geqslant a. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{r}_0(t)$ – координата центра сферы, который движется со скоростью $\dot{\mathbf{r}}_0(t) = \mathbf{V}$, а $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности среды, направленный в точку наблюдения $\mathbf{r}$.

Будем считать теперь, что на сферу падает приходящая из бесконечности по направлению $\mathbf{n}_0$ плоская звуковая волна. Для простоты будем рассматривать ее как монохроматическую, имеющую обычный вид $p_i(\mathbf{r}, t) = p_0 \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - i\omega_0 t)$. Волновой вектор $\mathbf{k}_0$ направлен здесь вдоль единичного вектора $\mathbf{n}_0$, а его модуль связан с частотой звука ω_0 и его скоростью c обычным соотношением $k_0 = \omega_0/c$. В линейном приближении по гидродинамическому числу Маха $M = V/c$ распространение звука в среде с течением описывается следующим уравнением:

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -2\rho \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(U_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right), \tag{2}$$

где ρ – плотность жидкости. Скорость частиц жидкости в звуковой волне $\mathbf{v}$ при этом связана с акустическим давлением p посредством линеаризованного уравнения Эйлера

$$\rho\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\beta \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + U_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}, \tag{3}$$

используя которое можно легко написать замкнутое уравнение для любой из акустических величин– p или $\mathbf{v}$. При решении задачи о рассеянии звука на движущейся сфере уравнения (2) и (3) вместе с условием на бесконечности надо дополнить граничным условием равенства давлений и нормальных скоростей на поверхности сферы при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = a$. При этом для внутренней задачи, решаемой в области $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < a$, соответствующие уравнения записываются в форме, аналогичной (2) и (3). Однако ниже мы рассмотрим наиболее простой случай, когда сферу можно считать абсолютно жестким телом. В этом случае решение дополнительной внутренней задачи отпадает, а для нахождения единственности решения системы уравнений (2) и (3) достаточно одного граничного условия на поверхности $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = a$ – условия равенства нулю нормальной компоненты скорости $\mathbf{v}$. При отсутствии завихренности у гидродинамического течения жидкости ($\mathrm{rot}\,\mathbf{U} = 0$) можно ввести скалярный потенциал φ, связанный со скоростью v, так же как и в случае покоящейся жидкости, формулой $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ [1]. В этом случае упомянутое выше единственное граничное условие на движущейся поверхности сферы записывается формально так: $(\mathbf{n}\nabla\varphi)_{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t) + a\mathbf{n}} = 0$.

Поскольку рассматриваемое тело движется в жидкости с постоянной скоростью, то при решении задачи удобно перейти в движущуюся систему координат $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, в которой сфера покоится. В этом случае коэффициенты преобразованных уравнений (2) и (3) станут постоянными величинами, не зависящими от времени, а граничное условие на поверхности сферы, также не зависящее от временной переменной, ставится уже на поверхности, положение которой в пространстве $\mathbf{r}'$ не меняется. При подобной постановке задачи зависимость от времени сохраняется только при формулировке граничного условия на бесконечности для падающей волны. При переходе в подвижную систему координат $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ поле падающей плоской монохроматической волны $p_i(\mathbf{r}, t)$ преобразуется в звуковую волну того же вида $p_i(\mathbf{r}', t) = p_0 \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}' - i\omega t)$, но с другой частотой. Новая частота звука ω оказывается смещенной относительно старой частоты ω_0 на небольшую величину, пропорциональную числу Маха, и равна $\omega = \omega_0(1 - \mathbf{M}\mathbf{n}_0)$. В связи с этим временная зависимость всех искомых величин в подвижной системе координат определяется временным множителем вида $\exp(-i\omega t)$, который, как обычно, будем опускать.

После перехода в подвижную систему координат уравнение (3) или, точнее, его следствие, устанавливающее связь акустического давления p со скалярным потенциалом φ, преобразуется к виду

$$p(\mathbf{r}') \cong i\omega\rho\left\{\varphi(\mathbf{r}') + \frac{i}{\omega}\left[U_\alpha(\mathbf{r}') - V_\alpha\right]\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\alpha}\right\}. \tag{4}$$

Используя это соотношение, можно сформулировать в системе координат r' и замкнутое уравнение для скалярного потенциала φ. При этом, чтобы привести уравнение для $\varphi(\mathbf{r}')$ к виду, близкому к стандартному волновому уравнению, введем новую функцию – калибровочный потенциал $\psi(\mathbf{r}')$, который свяжем со скалярным потенциалом φ соотношением $\varphi(\mathbf{r}') = \Psi(\mathbf{r}')\exp(ik\mathbf{r}'\mathbf{M})$. Новое волновое число $k = \omega/c$ определяется здесь уже через доплеровскую частоту ω. Подставляя это значение потенциала в уравнение (2) и используя соотношение (4), после несложных преобразований находим, что с точностью до линейного члена по гидродинамическому числу Маха уравнение для калибровочного потенциала $\psi(\mathbf{r}')$ выглядит так:

$$\Delta\psi + k^2\psi = -\frac{2ik}{c} U_\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} + O(M^2). \tag{5}$$

Для упрощения записи штрихи при координате $\mathbf{r}'$ здесь и всюду далее опущены. Однако при этом надо помнить, что все результаты, полученные ниже, будут верны только в подвижной системе координат, так что в окончательных формулах необходимо будет сделать формальную замену координаты $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Используя определение калибровочного потенциала, найдем, что граничное условие на поверхности сферы при $r = a$ выглядит теперь так

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=a} = -ik\,\mathbf{n}\mathbf{M}\,\psi(a). \tag{6}$$

Вид выражения для падающей волны в терминах калибровочного потенциала также изменяется. Обращая соотношение (4) и подставляя в него значение $p_i(\mathbf{r}) = p_0 \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - i\omega t)$, находим, что с точностью до линейных членов по числу Маха падающее поле ψ_i выглядит теперь следующим образом:

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{ik\mathbf{r}(\mathbf{n}_0 - \mathbf{M}_1)} \left[1 + \frac{\mathbf{U}\mathbf{n}_0 - \mathbf{V}\mathbf{n}_0}{c}\right] + O(M^2), \tag{7}$$

где $\psi_0 = p_0/(i\omega\rho)$, а $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} - \mathbf{n}_0(\mathbf{M}\mathbf{n}_0)$. Заметим, что калибровочный потенциал (7) уже не удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, так как калибровочное преобразование изменяет вид самого уравнения.

Уравнение (5) вместе с граничными условиями (6) и (7) позволяет найти единственное решение задачи о рассеянии звука на движущемся теле. Общее решение уравнения (5) будем искать в форме

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) + \psi_{sp}(\mathbf{r}) + \psi_{sf}(\mathbf{r}), \tag{8}$$

где $\psi_i(\mathbf{r})$ — поле падающей волны, определенное формулой (7), функция $\psi_{sp}(\mathbf{r})$ соответствует полю рассеянных волн, исходящих от движущегося тела, и удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\psi_{sp} + k^2\psi_{sp} = 0, \tag{9}$$

а ψ_{sp} — решение неоднородного уравнения. Поскольку, как было отмечено выше, падающее поле $\psi_i(\mathbf{r})$ не удовлетворяет уравнению (9), то уравнение для решения $\psi_{sf}(\mathbf{r})$ выглядит несколько иначе, чем уравнение (5). Подставляя в уравнение (5) решение в виде суммы (8) и используя определение (7) падающего поля ψ_i, находим, что с точностью до линейного члена по гидродинамическому числу Маха уравнение для ψ_{sf} будет выглядеть так:

$$\Delta\psi_{sf} + k^2\psi_{sf} = -\frac{2ik}{c} U_\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} - \frac{2ik}{c} n_{0\alpha} n_{0\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} \psi_i. \tag{10}$$

Для однозначного нахождения неизвестных функций ψ_{sp} и ψ_{sf}, удовлетворяющих уравнениям (9) и (10), последние должны быть дополнены соответствующими отдельными граничными условиями. Используя общее условие (6), можно положить, в частности, что на поверхности сферы при $r = a$ имеют место равенства

$$\frac{\partial(\psi_i + \psi_{sp})}{\partial r} = -ik\,\mathbf{n}\mathbf{M}(\psi_i + \psi_{sp})_{r=a}; \quad \left(\frac{\partial\psi_{sf}}{\partial r}\right)_{r=a} = -ik\,\mathbf{n}\mathbf{M}\,\psi_{sf}(a). \tag{11}$$

Представление решения в форме (8) физически означает, что полное поле вблизи движущейся сферы можно представить в виде суперпозиции падающего поля ψ_i и звуковых полей, возникающих в результате рассеяния звука в отдельности на сфере и на неоднородностях течения среды. В отсутствие течений в жидкости рассеянное поле определяется однозначно. В случае же, когда тело движется, разбиение рассеянного поля на две составляющие – поля ψ_{sp}, рассеянного на движущемся теле, и поля ψ_{sp}, рассеянного на течении, – несколько условно и неоднозначно. Формально это видно уже из произвольности разбиения граничного условия (6) на два соотношения (11). Ниже будет показано, что в рамках однократного рассеяния волн на самом деле имеет смысл только суммарное рассеянное поле $\psi_s = \psi_{sp} + \psi_{sf}$.

Нахождение парциальных рассеянных полей ψ_{sp} и ψ_{sf} будем осуществлять с помощью методов теории возмущений, раскладывая каждую из составляющих общего решения (8) в ряд по малому параметру. Заметим, что представление решения уравнения (5) в виде ряда имеет смысл только с точностью до линейных по числу Маха членов, поскольку само уравнение справедливо лишь с этой же точностью. Таким образом, составляющую волнового поля ψ_{sp}, возникшую в результате рассеяния звука на движущейся сфере, представим в виде $\psi_{sp} = \psi_{sp}^{(0)} + \psi_{sp}^{(1)}$, где $\psi_{sp}^{(0)}$ – решение уравнения (9), найденное при условии, что на теле рассеивается "нулевая" падающая волна $\psi_i^{(0)} = \psi_0 \exp(ik\mathbf{r}\mathbf{n}_0)$, а на поверхности сферы при $r = a$ имеет место "нулевое" граничное условие (11): $(\partial\psi_{sp}^{(0)}/\partial r)_{r=a} = -(\partial\psi_i^{(0)}/\partial r)_{r=a}$. Общее же выражение для $\psi_{sp}(\mathbf{r})$, являющееся решением уравнения (9), запишем, как и в случае покоящейся сферы, в виде разложения в ряд по сферическим функциям:

$$\psi_{sp}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{n,m} h_n(kr) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \tag{12}$$

где $h_n(kr)$ – сферические функции Ханкеля первого рода, а P_n^m – присоединенные полиномы Лежандра. Разложим далее падающую волну $\psi_i(\mathbf{r})$ также в ряд по сферическим гармоникам и, подставляя найденное значение и выражение (12) в граничное условие (11), найдем неизвестные коэффициенты $A_{n,m}$.

Для покоящейся сферы, радиус которой много меньше длины волны звука, коэффициенты ряда (12) убывают при $ka \ll 1$ и $n \to \infty$ как $(ka)^{2n+1}$ [6]. Для движущейся сферы это свойство в основном сохраняется, и ниже подробно рассматривается именно этот случай, когда имеет место неравенство $ka \ll 1$. В разложении (12) можно ограничиться тогда первыми членами ряда и записать решение в более компактном виде. Учитывая сказанное, представим решение (12) в указанном приближении в виде суммы трех сферических гармоник и запишем его в ковариантном виде

$$\psi_{sp}(r) = Ah_0(kr) + A_\alpha n_\alpha h_1(kr) + A_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta} h_2(kr), \tag{13}$$

где $Q_{\alpha\beta} = (3n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta})/2$ – тензор квадруполя. Разложим теперь падающую волну $\psi_i(\mathbf{r})$ в ряд Тейлора около нуля, и в полученном выражении перегруппируем члены таким образом, чтобы разложение осуществлялось, как и в формуле (13), по мультиполям. В результате вычислений найдем, что $\psi_i'(\mathbf{r})$ в общем случае записывается с учетом монопольной, дипольной и квадрупольной составляющих так [7]:

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{k^2 r^2}{6}\right) \psi_i(0) + rn_\alpha \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\alpha}\right)_{r=0} + \frac{1}{3} r^2 Q_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)_{r=0}. \tag{14}$$

Отметим, что радиальные функции r, r^2 представляют здесь ни что иное, как первые члены разложения в ряд по kr сферических функций Бесселя $j_n(kr)$. Подставив сюда выражение $\psi_i^{(0)} = \psi_0 \exp(ik\mathbf{r}\mathbf{n}_0)$ для падающей волны в нулевом приближении, найдем, в частности, разложение экспоненты в ряд по мультиполям при $kr \ll 1$. Используя линеаризованное граничное условие (11) и найденное разложение для $\psi_i^{(0)}$, определим значения искомых коэффициентов A, A_α и $A_{\alpha\beta}$ в нулевом приближении по числу Маха:

$$A^{(0)} = -\frac{\psi_0}{3} i(ka)^3, \qquad A_\alpha^{(0)} = -\frac{\psi_0}{2}(ka)^3 n_{0\alpha}, \qquad A_{\alpha\beta}^{(0)} = -\frac{2i\psi_0}{27}(ka)^5 n_{0\alpha} n_{0\beta}. \tag{15}$$

Отсюда видно, в частности, что для покоящейся сферы ($M = 0$) квадрупольная составляющая в $(ka)^2$ раз меньше монопольной и дипольной и при $ka \ll 1$ в общем выражении (13) для рассеянного поля $\psi_{sp}(\mathbf{r})$ ею, действительно, можно пренебречь.

Используя определение (7) для полного падающего поля $\psi_i(\mathbf{r})$ и его разложение (14) в ряд по мультиполям, можно подобным образом найти представление в виде суммы из сферических гармоник и для линейной добавки $\psi_i^{(1)}$. В частности, вычисление производной, взятой на поверхности сферы при $r = a$, дает

$$\left(\frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{\psi_0}{a}\left\{\frac{2}{5}k^2a^2(\mathbf{Mn}_0) - \frac{3}{5}ikan_\alpha[M_\alpha + 2(\mathbf{Mn}_0)n_{0\alpha}] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{5}{7}k^2a^2(\mathbf{Mn}_0)n_{0\alpha}n_{0\beta} + \left(\frac{3}{14}k^2a^2 - 3\right)M_\alpha n_{0\beta}\right]Q_{\alpha\beta}\right\}. \qquad (16)$$

Это значение производной подставим в первое из линеаризованных граничных условий (11), и после несложных но длительных вычислений найдем искомые поправки к коэффициентам $A^{(0)}$, $A_\alpha^{(0)}$ и $A_{\alpha\beta}^{(0)}$. Расчет соответствующих полных коэффициентов A, A_α и $A_{\alpha\beta}$ с учетом движения сферы дает для них следующие значения:

$$A = -\frac{i(ka)^3}{3}\psi_0\left[1 + \frac{3}{10}(\mathbf{Mn}_0)\right], \quad A_\alpha = -\frac{(ka)^3}{2}\psi_0\left[n_{0\alpha} - \frac{3}{5}M_\alpha - \frac{1}{5}(\mathbf{Mn}_0)n_{0\alpha}\right],$$

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{2i(ka)^5}{27}\psi_0\left[n_{0\alpha}n_{0\beta} + \frac{9}{2}\frac{M_\alpha n_{0\beta}}{(ka)^2} + \frac{13}{14}(\mathbf{Mn}_0)n_{0\alpha}n_{0\beta} - \frac{23}{28}n_{0\alpha}M_\beta\right]. \qquad (17)$$

Обратим здесь внимание на то, что при отсутствии движения ($M = 0$) коэффициенты A и A_α имеют наибольшие значения, пропорциональные $(ka)^3$. Фактически в ряде (12) можно ограничиться первыми двумя, а не тремя членами разложения, без квадруполя. Однако при учете движения тела, как это видно из выражения (17), в квадруполе помимо основного члена и поправок, пропорциональных $(ka)^5$, возникает дополнительный член, пропорциональный $(ka)^3$. Отсюда следует, что при нахождении рассеянного поля $\psi_{sp}(\mathbf{r})$ с точностью до линейных членов по числу Маха в разложении (13) необходимо сохранить помимо монопольной и дипольной составляющих также и квадрупольную компоненту.

Зная теперь рассеянное поле ψ_{sp}, можно найти соответствующую амплитуду рассеяния звука. Используя асимптотические представления функций Ханкеля, из выражения $\psi_{sp} \simeq \psi_0 f_p \exp(ikr)/r$, справедливого при $r \to \infty$, находим искомое значение амплитуды рассеяния звука на движущейся сфере:

$$f_p = k^2a^3\left\{-\frac{1}{3}\left[1 + \frac{3}{10}(\mathbf{Mn}_0)\right] + \frac{1}{2}\left[(\mathbf{nn}_0) - \frac{(\mathbf{nn}_0)(\mathbf{Mn}_0)}{5} - \frac{3}{5}(\mathbf{Mn})\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left[3(\mathbf{Mn})(\mathbf{nn}_0) - (\mathbf{Mn}_0)\right]\right\}\left[1 + O(M^2)\right]. \qquad (18)$$

Перейдем теперь к нахождению решения $\psi_{sf}(\mathbf{r})$ неоднородного уравнения (10) вместе с соответствующим граничным условием (11). Уравнение будем решать методом теории возмущений, считая изначально малыми уже два параметра: M и ka. Поскольку второй член в правой части уравнения (10) сам по себе имеет порядок малости, равный M, то вместо точного выражения для падающей волны ψ_i в нем можно использовать его приближенное значение $\psi_i^{(0)}$. Что касается первого члена, то в приближении однократного рассеяния вместо точного значения полного потенциала ψ, определенного формулой (8), можно использовать его приближенное выражение, равное $\psi_i + \psi_{sp}$. При этом поскольку обсуждаемый член уже имеет порядок малости, равный M, то значения полей ψ_i и ψ_{sp} должны браться в нулевом приближении. Кроме того, выше было показано, что для сферы малого радиуса ($ka \ll 1$) рассеянное поле ψ_{sp} уже на поверхности $r = a$ в $(ka)^2$ раз меньше падающего поля $\psi_i^{(0)}$. Поэтому в первом приближении вместо неизвестной функции $\psi(\mathbf{r})$ в первом члене правой части уравнения (10) можно использовать ее приближенное значение, равное $\psi_i^{(0)} = \psi_0 \exp(ik\mathbf{r}\mathbf{n}_0)$. Подставляя это значение в оба члена правой части уравнения (10), находим, что оно выглядит теперь приближенно так:

$$(\Delta + k^2)\,\psi_{sf} = -\frac{2ik}{c}\,\psi_0 n_{0\alpha} n_{0\beta}\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,(U_\beta e^{ik\mathbf{r}\mathbf{n}_0}). \tag{19}$$

Для однозначного нахождения решения ψ_{sf} уравнения (19) последнее надо дополнить граничным условием. При этом поскольку весь расчет ведется в линейном приближении по числу Маха, а рассеянное на неоднородностях течения жидкости поле ψ_{sf} уже пропорционально числу M, то соответствующее условие (11) на границе $r = a$ можно упростить, приближенно записав его в виде однородного граничного условия Неймана – $(\partial\psi_{sf}/\partial r)_{r=a} = 0$.

Частное решение уравнения (19) можно получить с помощью функции Грина для свободного пространства

$$\psi_{sf}^{(0)} = \frac{ikn_{0\alpha}n_{0\beta}}{2\pi c}\int d^3r'\,\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\,(U_\beta(\mathbf{r}')e^{ik\mathbf{r}'\mathbf{n}_0}), \tag{20}$$

где интегрирование ведется по области, занятой движущейся средой, т.е. вне сферы при $r' > a$. Однако в отличие от искомого решения выражение (20) не удовлетворяет поставленному выше граничному условию при $r = a$, постольку поскольку ему не удовлетворяет и сама выбранная функция Грина $\exp(ikR)/R$. В связи с этим частное решение (20) необходимо дополнить также решением однородного уравнения Гельмгольца $\psi_{sf}^{(1)}$, так чтобы суммарная функция $\psi_{sf} = \psi_{sf}^{(0)} + \psi_{sf}^{(1)}$ удовлетворяла граничному условию Неймана. Для этого потенциал $\psi_{sf}^{(1)}$, удовлетворяющий уравнению (8), можно представить в виде, аналогичном (12) или (13) при $ka \ll 1$, записав, его в последнем случае в таком виде:

$$\psi_{sf}^{(1)} = Bh_0(kr) + B_\alpha n_\alpha\, h_1(kr) + B_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}\, h_2(kr), \tag{21}$$

а неизвестные коэффициенты B, B_α и $B_{\alpha\beta}$ найти из граничного условия $(\partial\psi_{sf}^{(1)}/\partial r)_{r=a} = -(\partial\psi_{sf}^{(0)}/\partial r)_{r=a}$.

Заметим, что с формальной точки зрения волну $\psi_{sf}^{(0)}$ можно рассматривать теперь как падающую, а волну $\psi_{sf}^{(1)}$ – как рассеянную. Тогда, разложив "падающую" волну $\psi_{sf}^{(0)}$ в ряд по сферическим гармоникам с помощью общей формулы (14) и подставив найденное выражение в упомянутое выше граничное условие, найдем конкретные значения коэффициентов B, B_α и $B_{\alpha\beta}$ в разложении (21). Однако при условии $ka \ll 1$ можно произвести грубую оценку коэффициентов B, B_α и $B_{\alpha\beta}$ исходя из физического рассмотрения задачи. По существу решение (21) представляет собой волну, отраженную от поверхности сферы при падении на нее звука, который предварительно рассеялся на неоднородностях течения жидкости, окружающей тело. Как показывает расчет, амплитуду "падающего" поля $\psi_{sf}^{(0)}$ при $r = a$ можно оценить на основании ниже приведенной формулы (22) как $k^2a^2M\psi_0$. При падении же на сферу малого радиуса звуковой волны с амплитудой порядка единицы значение амплитуды расходящейся волны, возникшей в результате отражения звука от тела, оказывается пропорциональной k^2a^3. Отсюда следует, что при $ka \ll 1$ величина амплитуды звуковой волны, которая рассеивается вначале на неоднородностях течения жидкости, а затем отражается от тела, вызвавшего это течение, оказывается пропорциональной k^4a^5M, т.е. в $(ka)^2$ раз меньше, чем у $\psi_{sf}^{(0)}$. Таким образом, видно, что в указанном приближении точную функцию Грина в решении неоднородного уравнения (19), удовлетворяющую однородному граничному условию Неймана, можно аппроксимировать с достаточной точностью функцией Грина $\exp(ikR)/R$ для свободного пространства.

Зная распределение волнового поля (20), вызванное рассеянием звука на неоднородностях течения жидкости, можно найти соответствующую амплитуду рассеяния звука f_f. Записав, как обычно, функцию Грина во фраунгоферовой зоне рассеивателя в виде $\exp(ik\mathbf{r}'\mathbf{r}/r)\exp(ikr)/r$ и взяв интеграл (20) по частям, находим, что искомая амплитуда рассеяния f_f представляется в таком виде:

$$f_f = -\frac{k^2(\mathbf{nn}_0)n_{0\alpha}}{2\pi c}\int\limits_{r'>a} d^3r' U_\alpha e^{i\mathbf{qr}'} - \frac{ikn_{0\alpha}n_{0\beta}}{2\pi c}\int\limits_{r'=a} dSn'_\alpha U_\beta e^{i\mathbf{qr}'}. \qquad (22)$$

Объемный интеграл с полной дивергенцией подынтегрального выражения преобразован здесь по теореме Гаусса в поверхностный. При этом интеграл, взятый по бесконечно удаленной поверхности S_∞ обратился в нуль, поскольку скорость жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r}')$ падает с удалением от центра сферы, согласно формуле (1), как $1/r'^3$, а площадь поверхности S_∞ растет всего лишь как r'^2. Волновой вектор $\mathbf{q}$, имеющий смысл "переданного импульса", равен $\mathbf{q} = k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})$, а его модуль равен $2k\sin(\theta/2)$, где θ – угол рассеяния, определяемый скалярным произведением единичных векторов $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ $(\cos\theta = \mathbf{nn}_0)$. Подставив в формулу (22) значение скорости течения жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r}')$, определяемое формулой (1), найдем конкретное выражение для амплитуды рассеяния звука f_f.

Вычисление интегралов в формуле (22) при произвольном соотношении между длиной волны звука и радиусом сферы нетривиально, и детальный расчет амплитуды рассеяния звука на неоднородностях течения жидкости приведен в работе [5]. При условии $ka \ll 1$ взятие интегралов можно осуществить путем разложения экспоненты в подынтегральных выражениях (22) по малому параметру ka, после чего интегралы берутся просто или приводятся к известным выражениям. Так, первый интеграл в формуле (22) при $qa \to 0$ оказывается пропорциональным импульсу жидкости при обтекании ею сферы и при $\rho = 1$ равен $m_{\alpha\beta}V_\beta$, где присоединенная масса для сферы равна половине массы вытесненной жидкости. Таким образом, приближенное вычисление амплитуды рассеяния звука на неоднородностях течения жидкости дает для нее при $ka \ll 1$ следующее значение:

$$f_f = \frac{k^2a^3}{5}\left\{(\mathbf{Mn}_0)\left[\frac{4}{3} + \frac{1}{2}(\mathbf{nn}_0)\right] - (\mathbf{Mn})\left[1 + \frac{5}{2}(\mathbf{nn}_0)\right]\right\}. \qquad (23)$$

Из полученной формулы видно, что амплитуда рассеяния f_f пропорциональна числу Маха и содержит как монопольную с дипольной, так и квадрупольную компоненту. Однако в отличие от рассеяния звука на турбулентности, которое определяется в основном квадрупольными составляющими [2], полное поле, рассеянное на движущейся сфере, как показывают вычисления, содержит помимо основных, "нулевых" составляющих лишь дипольную компоненту, связанную с движением тела. Так, складывая выражения (18) и (23), находим, что полная амплитуда рассеяния звука на движущемся теле приобретает крайне простой вид и оказывается равной

$$f = k^2a^3\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\mathbf{n}(\mathbf{n}_0 - \mathbf{M})\right]. \qquad (24)$$

Зная амплитуду рассеяния (24), можно найти соответствующее сечение рассеяния звука. Возвращаясь от калибровочных потенциалов к физическим переменным – давлению и скорости – находим, что среднее количество энергии, рассеиваемое в элемент телесного угла в единицу времени, выражается через амплитуду рассеяния f согласно формуле $I_s = (1 + \mathbf{Mn})^2\,|f|^2 p_0^2/(2\rho c)$. Используя это выражение и подставив в него значение (24) для амплитуды f, можно найти дифференциальное сечение рассеяния звука $d\sigma/d\Omega$. Проинтегрировав полученное выражение по всем углам, найдем, что полное эффективное сечение рассеяния звука на движущейся сфере с точностью до линейных членов по числу Маха равно

$$\sigma = \frac{7}{9} \pi k_0^4 a^6 (1 - 6\mathbf{Mn}_0). \tag{25}$$

Аналогичным образом можно найти также парциальное сечение рассеяния звука на движущейся сфере без учета его рассеяния на течении σ_p :

$$\sigma_p = \frac{7}{9} \pi k_0^4 a^6 (1 - \frac{192}{35} \mathbf{Mn}_0) \tag{26}$$

и парциальное сечение рассеяния звука на неоднородностях течения жидкости σ_f

$$\sigma_f = \frac{3}{25} \pi k_0^4 a^6 [M^2 + \frac{5}{27} (\mathbf{Mn}_0)^2]. \tag{27}$$

В отличие от выражений (25) и (26) сечение рассеяния звука на неоднородностях течения среды (27) оказывается пропорциональным квадрату числа Маха. При этом полное сечение рассеяния звука на движущейся сфере σ с учетом рассеяния на течении окружающей жидкости не равно сумме сечений σ_p и σ_f.

В заключение отметим некоторые особенности полученных выше формул. Сравнение выражений (18) и (23) показывает, что поля, рассеянные на неоднородностях течения среды, оказываются синфазными при рассеянии звука вперед и назад. В то же самое время добавки к звуковым полям, связанные с рассеянием звука на поверхности движущегося тела в направлении вперед и назад, оказываются, как и в случае покоящегося тела, в противофазе. Анализ значений дифференциального сечения рассеяния показывает, что когда звук распространяется по течению ($\mathbf{Mn}_0 > 0$), то интенсивности рассеянных полей вперед или назад уменьшаются по сравнению с интенсивностью рассеянного поля на покоящейся сфере. При распространении же звука против течения ($\mathbf{Mn}_0 < 0$) соответствующие интенсивности рассеянных полей увеличиваются. И, наконец, обратим внимание на частотную зависимость рассеянного звука, которая определяется в основном экспоненциальным множителем вида $\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{V}t| - i\omega t)$, стоящим при амплитуде рассеяния f. Используя определение доплеровской частоты ω, нетрудно показать, что в неподвижной системе координат частота рассеянного поля равна $\omega_s = \omega_0 (1 - \mathbf{Mn}_0 + \mathbf{Mn})$. Отсюда видно, что частота ω_s совпадает с частотой падающей волны ω_0 лишь при рассеянии звука на нулевой угол или при условии, когда направление скорости сферы оказывается перпендикулярным разности единичных векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_0$. В частности, когда тело пересекает трассу приемник – излучатель, то в момент ее пересечения смещение частоты $\omega_s - \omega_0$ будет отсутствовать вне зависимости от угла пересечения траектории тела и трассы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.
2. *Голдстейн М.Е.* Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981.
3. *Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л.* Распространение волн в сдвиговых гидродинамических течениях // УФН. 1989. Т. 159. Вып. 1. С. 83–123.
4. *Головчанская А.Е., Лямшев Л.М., Скворцов А.Т.* Рассеяние звука потенциальными течениями // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 2. С. 368–370.
5. *Алексеев В.Н., Семенов А.Г., Скворцов А.Т.* Рассеяние звука потенциальным течением, возникающим при движении сферы // Акуст. журн. В печати.
6. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
7. *Акуличев В.А., Алексеев В.Н., Буланов В.А.* Периодические фазовые превращения в жидкостях. М.: Наука, 1986.

Акустический институт
им. Н.Н. Андреева
Российской Академии наук

Поступила в редакцию
24.01.92

V.N. Alexeev, A.G. Semyonov

SOUND SCATTERING BY MOVING SPHERE

The results of a theoretical investigation of sound scattering near a moving sphere are presented. Since the sphere motion initiates the corresponding motion of the surrounding liquid, the sound scattering in this case occurs not only on this sphere but on inhomogeneities of a medium flow also. As the sphere velocity have been considered to be much slower than the sound velocity in this problem, so the fluid have been treated as incompressible and ideal one, and its flow was treated as a potential one. Partial scattered fields for a plane monochromatic wave have been found out for an approximation linear with respect to the Mach number for a sphere and a fluid separately and the total scattered field have been found out also. The sound field components connected with a moving sphere are shown to be of a complex structure containing monopole, dipole and quadrupole parts. However, the total field scattered by a moving rigid sphere has a very simple form and the correction due to the body motion is of clearly dipole character. Corresponding amplitudes and cross-sections of sound scattering are calculated. In contrast to scattering by a flow, the cross-section of which has turned out to be quadratic with respect to the Mach number, the cross-sections of scattering by a moving body contain linear corrections with respect to the Mach number both taking into account the flow and without it. A body motion is demonstrated to lead to the increase of the total scattering cross-section in the case of a motion towards the incident wave and to its decrease in the opposite case. A frequency dependence of scattered sound is found out and the analysis of the obtained equations is conducted.