

УДК 534.26

© 1992 г. А.-Р. Багхаи-Ваджи, В.П. Плесский, А.В. Симонян

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН РЭЛЕЕВСКОГО ТИПА В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ ИЗ РЕЗОНИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Теоретически изучено распространение поверхностных акустических волн рэлеевского типа в упругом изотропном полупространстве, на поверхности которого имеется периодическая система резонирующих элементов. Для описания распространения волн в системах с произвольной величиной возмущения поверхности развита концепция сфазированных поверхностных источников и периодических функций Грина (удовлетворяющих теореме Флоке). Резонирующие элементы моделируются классическими резонаторами, реагирующими на вертикальные или горизонтальные смещения поверхности и имеющие некоторую собственную частоту  $\omega_0$ . Показано, что при частотах  $\omega < \omega_0$  существуют медленные волны Рэля с фазовой скоростью, существенно меньшей, чем на невозмущенной поверхности, если частота  $\omega_0$  мала по сравнению с брэгговской. В этом случае при частотах, близких к  $\omega_0$ , возможно также сильное отражение и затухание волны. Если же частота резонаторов  $\omega_0$  приближается к брэгговской, расчет предсказывает сильное увеличение полосы непропускания и усложнение вида дисперсионных кривых.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Периодические отражающие структуры (решетки) играют основную роль в ряде приборов на поверхностных акустических волнах (ПАВ), таких, как резонаторы, дисперсионные линии задержки, узкополосные фильтры и многих других. По этой причине распространение ПАВ в периодических структурах интенсивно изучалось теоретически и экспериментально (см., например, [1–3]). Как правило, приборы на отражательных решетках являются узкополосными вследствие того, что для достижения эффективного отражения обычно используется большое число отражающих элементов, таких, как электроды или мелкие канавки, действующих синфазно.

В недавних работах [4–7] наметился другой подход. Авторы этих работ показали, что, используя более сложный профиль сечения электродов или используя неоднородности с размерами, сравнимыми с длиной волны (см. рис. 1), можно существенно повысить эффективность отражения волн Рэля от одного элемента. Несколько типов таких элементов были реализованы экспериментально [4, 8], с использованием современной технологии. Было также показано [9], что в случае сдвиговых поверхностных волн (СПВ), взаимодействующих с одиночными высокими выступами на поверхности упругого тела, вблизи таких сильных неоднородностей возникают "поверхностные акустические резонансы формы" — локализованные в выступе и вблизи него акустические колебания. Относительно небольшая добротность этих резонансов объясняется излучением энергии колебаний в объем звукопровода в виде объемных акустических волн. Для интерпретации лежащих в основе этого физических явлений может оказаться полезным моделирование сложных элементов с внутренними степенями свободы в виде механических резонаторов, имеющих некоторую характерную собственную резонансную частоту  $\omega_0$ .

В прикладном плане общей тенденцией последних лет является стремление умень-

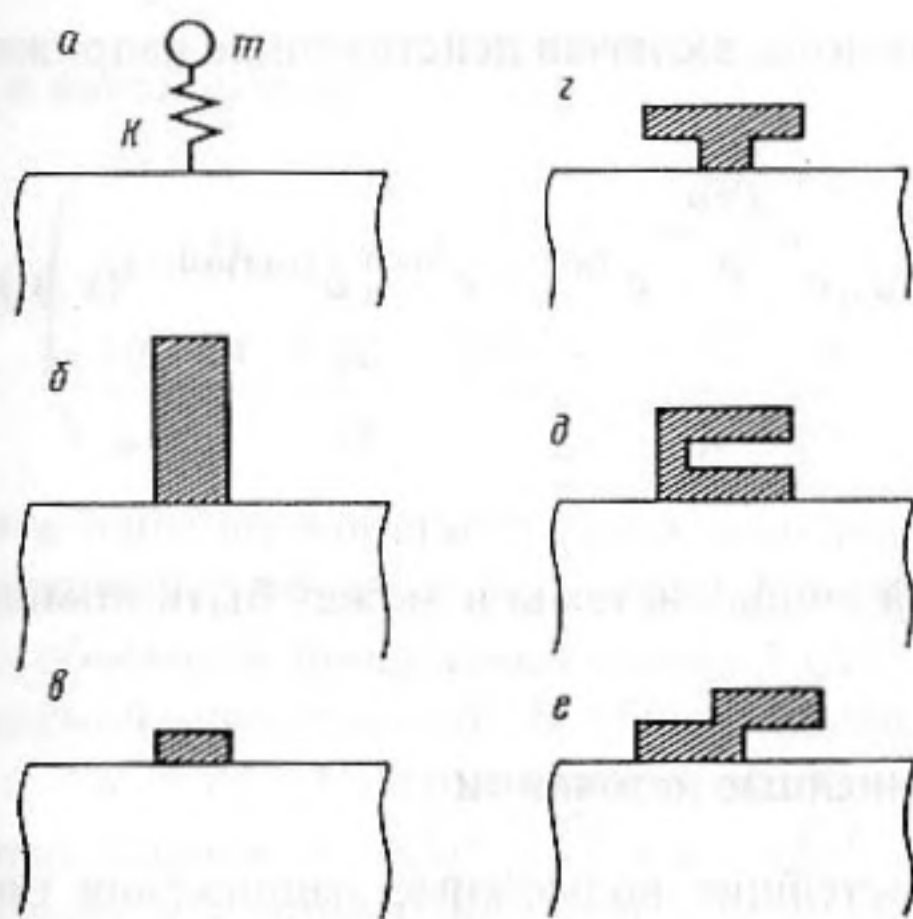


Рис. 1. Резонирующие элементы

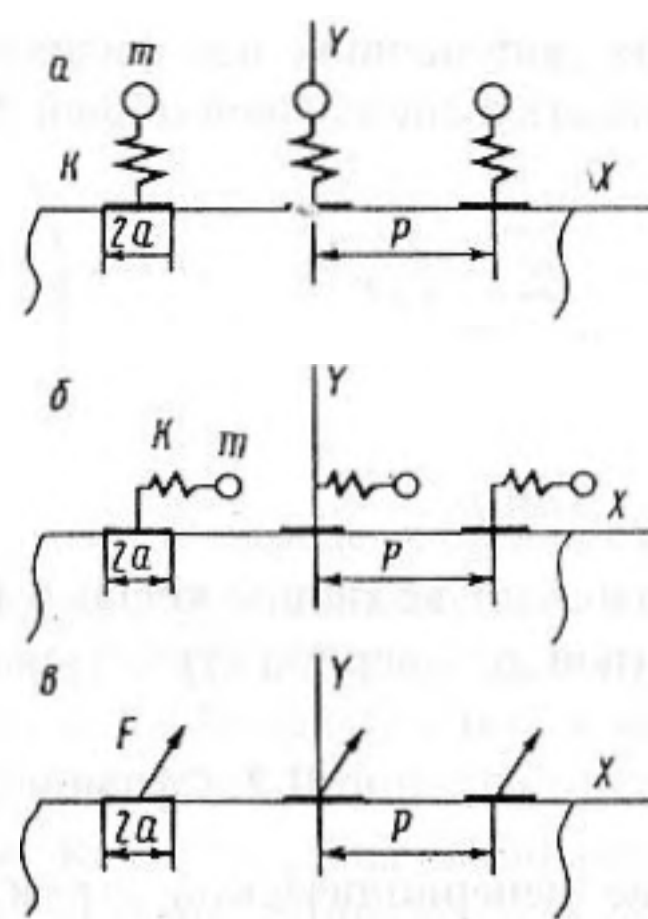


Рис. 2. а, б — периодические системы резонирующих элементов, в — сфазированные источники акустических полей

шить вносимые потери ПАВ-устройств. Продемонстрированы макеты приборов с уровнем вносимых потерь в единицы децибел [10–11]. Одним из используемых методов для создания приборов с малыми потерями является применение сильно отражающих элементов [4, 8, 12].

Цель данной работы — рассмотреть распространение волн рэлеевского типа в периодической системе резонаторов (рис. 2). Таким способом мы моделируем более сложные реальные системы, состоящие из резонирующих элементов. Два основных параметра резонирующего отражателя, масса и упругость, можно альтернативно заменить на два других — собственную частоту рассеивающего и отражающего волну элемента  $\omega_0$  и основной параметр задачи  $\epsilon$ . Параметр  $\epsilon$  определяется как отношение  $M/\rho\lambda^2$ , где  $M$  и  $\rho$  — соответственно масса резонатора и плотность материала подложки, а  $\lambda$  — некоторая характерная длина волны. В нашей модели величина  $\epsilon$  может быть произвольной. Рассматривается двумерная геометрия ( $\partial/\partial z = 0$ ) (см. рис. 1).

Одним из существенных результатов данной статьи является обнаружение возможности существования медленных волн рэлеевского типа в рассматриваемых структурах. Показано, что такие волны могут существовать, если собственная резонансная частота отражателя  $\omega_0$  меньше брэгговской частоты периодической структуры. В этом случае, как будет показано, энергия волны сосредоточена в основном в системе резонаторов, а не в упругом полупространстве, через которое взаимодействуют резонаторы.

## II. ТЕОРИЯ

### II.1. Постановка задачи

Будем рассматривать изотропное упругое полупространство, занимающее область  $y \leq 0$ , покрытое периодической системой двумерных резонирующих элементов, расположенных параллельно оси  $OZ$  и присоединенных к поверхности ( $y = 0$ ) в областях, имеющих форму узких полосок ( $2a \ll p$ ) (рис. 2). Это ограничение позволяет описывать движение полоски как единой линии, вводя единый для всех точек полоски вектор смещения (см. Приложение). В дальнейшем предполагается, что резонатор реагирует только на вертикальные или только на горизонтальные смещения поверхности упругого полупространства.

В данном случае действие резонаторов на упругое полупространство может быть описано при помощи периодического распределения нормальных или тангенциальных напряжений.

При этих допущениях все физические величины, включая действующие напряжения, можно записать в следующей общей форме:

$$\psi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n e^{iq_n x + \gamma_n y} = e^{iq_0 x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n e^{i \frac{2\pi n}{p} x} e^{\gamma_n y} = e^{iq_0 x} \psi^{(\text{periodic})}(x, y), \quad (1)$$

где

$$q_n = q_0 + 2\pi n/p. \quad (2)$$

Здесь  $q_0$  означает волновое число собственной моды системы и может быть комплексной величиной,  $p$  — период структуры.

## II.2. Сфазированные линейные источники

В случае непериодической структуры простейшие возможные напряжения описываются линейными  $\delta$ -источниками, а генерируемые ими акустические поля известны как функции Грина полупространства. Для периодической структуры естественно ввести ансамбль сфазированных линейных источников:

$$F(x) = F_0 e^{iq_0 x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - np) = F_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iq_0 np} \delta(x - np) \quad (3)$$

в качестве силы, возбуждающей акустические поля в системе [13]. Решение, описывающее эти поля, будем называть периодической функцией (матрицей) Грина. Как видно из формулы (3), линейные силы распределены с периодом  $p$ , имеют одинаковую амплитуду и направление, но смещены по фазе друг относительно друга на одну и ту же величину, что учитывается множителем  $e^{iq_0 np}$ . Возбуждаемые в среде смещения — отклик среды на напряжения (3), очевидно, в соответствии с теоремой Флоке имеют вид (1).

## II.3. Периодические функции Грина

Начнем с рассмотрения возбуждения упругого полупространства напряжениями, распределенными на поверхности по гармоническому закону:

$$F(x | q_0) = F_{\parallel}(x | q_0) e_x + F_{\perp}(x | q_0) e_y, \quad (4a)$$

где

$$F_{\parallel}(x | q_0) = F_{\parallel}^{(0)} e^{iq_0 x}, \quad (4b)$$

$$F_{\perp}(x | q_0) = F_{\perp}^{(0)} e^{iq_0 x}. \quad (4c)$$

Можно легко показать, что возбуждаемые этими напряжениями акустические поля  $u_x(x | q_0)$  и  $u_y(x | q_0)$  записываются в виде:

$$u_x(x | q_0) = G^{(u_x, F_x)}(q_0) F_{\parallel}(x | q_0) + G^{(u_x, F_y)}(q_0) F_{\perp}(x | q_0), \quad (5a)$$

$$u_y(x | q_0) = G^{(u_y, F_x)}(q_0) F_{\parallel}(x | q_0) + G^{(u_y, F_y)}(q_0) F_{\perp}(x | q_0), \quad (5b)$$

где

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} G^{(u_x, F_x)}(q_0) & G^{(u_x, F_y)}(q_0) \\ G^{(u_y, F_x)}(q_0) & G^{(u_y, F_y)}(q_0) \end{pmatrix}. \quad (5c)$$

или, в явной форме

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \frac{k_t^2 \cdot s}{\mu D} & -\frac{i q_0}{\mu} \frac{s^2 + q_0^2 - 2\kappa s}{D} \\ \frac{i q_0}{\mu} \frac{s^2 + q_0^2 - 2\kappa s}{D} & \frac{k_t^2}{\mu} \frac{\kappa}{D} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь  $\mu$  означает константу Ламэ, а величины  $k_t, k_l, s, \kappa$  и  $D$  определяются соответственно следующим образом:  $k_t$  — волновое число объемных сдвиговых волн,  $k_l$  — волновое число объемных продольных волн  $s = \sqrt{q_0^2 - k_t^2}$ ,  $\kappa = \sqrt{q_0^2 - k_l^2}$ , а  $D = 4q^2 \kappa s - (q^2 + s^2)^2$  — рэлеевский определитель. В общем случае величину  $q$  необходимо считать комплексной:  $q = q' + iq''$ . На этом этапе необходимо также определить однозначно ветви комплексных корней:  $s = \sqrt{q^2 - k_t^2}$  и  $\kappa = \sqrt{q^2 - k_l^2}$ . Если  $|\operatorname{Re} q| > k_t$ , мы выбираем то значение корня, у которого  $\operatorname{Re} s > 0$ , а если  $|\operatorname{Re} q| < k_t$  — корень с  $\operatorname{Im} s < 0$ . Можно проверить, что такой выбор соответствует разрезам на комплексной плоскости  $q$ , показанным на рис. 3. Аналогично определяются требуемые ветви функции  $\kappa$ . Физически этот выбор ветвей означает, что если действительная часть  $s$  или  $\kappa$  велика по сравнению с мнимой частью этой же величины, то необходимо выбирать ветвь двузначной функции  $s$  или  $\kappa$ , имеющую положительную действительную часть, чтобы исключить из рассмотрения нефизические экспоненциально растущие в глубь решения. В этом случае никаких ограничений на знак мнимой части соответствующих величин не накладывается. В противном случае, когда  $|\operatorname{Re} q| < k_t$  и  $\operatorname{Im} s > \operatorname{Re} s$ , мы фактически имеем дело с объемными волнами, распространяющимися от поверхности в глубь полупространства. Амплитуда этих волн может как убывать с глубиной, так и нарастать (волны утечки). Поэтому знак действительной части величин  $s$  и  $\kappa$  может быть как "+", так и "-".

Элементы матрицы  $\mathfrak{G}$  являются механическими аналогами часто используемой в теории волн в пьезоэлектрическом полупространстве "электрической" функции Грина [14, 15]. Формулы, аналогичные (6), были получены и обсуждались в ряде работ [16].

Учитывая интегральное представление  $\delta$ -функции Дирака

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx} dq = \delta(x).$$

интегрируя (6) по  $q$ , можно получить пространственное представление функции Грина.

На рис. 4 показана зависимость функции  $G^{(u_y, F_y)}(q)$  от нормированной переменной  $q/k_t$ . Полюс на этой кривой соответствует волне Рэлея, распространяющейся по невозмущенной поверхности изотропного упругого тела. Отметим, что эта функция не имеет нулей, так как волна рэлеевского типа не может распространяться по закрепленной поверхности с граничными условиями Дирихле:  $u_x(x, y=0) = 0$  и  $u_y(x, y=0) = 0$ . В области, где мнимая часть функции  $G^{(u_y, F_y)}(q)$  не равна нулю, имеется излучение энергии в объем среды.

Комплексные функции  $\mathfrak{G}$ , зависящие от комплексного аргумента  $q$ , полностью характеризуют все типы волн, включая волны утечки, которые могут распространяться в упругом полупространстве или могут быть возбуждены гармоническим распределением сил на поверхности.

Вернемся теперь к рассмотрению упомянутой ранее периодической системы сфазированных линейных источников:

$$\sigma(x|q) = \sigma_0 e^{iqx} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x - np), \quad (7)$$

где  $\sigma$  означает одну из компонент тензора напряжений  $\sigma_{yy}$  или  $\sigma_{xy}$ , а  $\sigma_0$  — амплитудный множитель. Функция  $f(x)$  описывает распределение напряжений на одном периоде структуры,  $|x| < a$ .

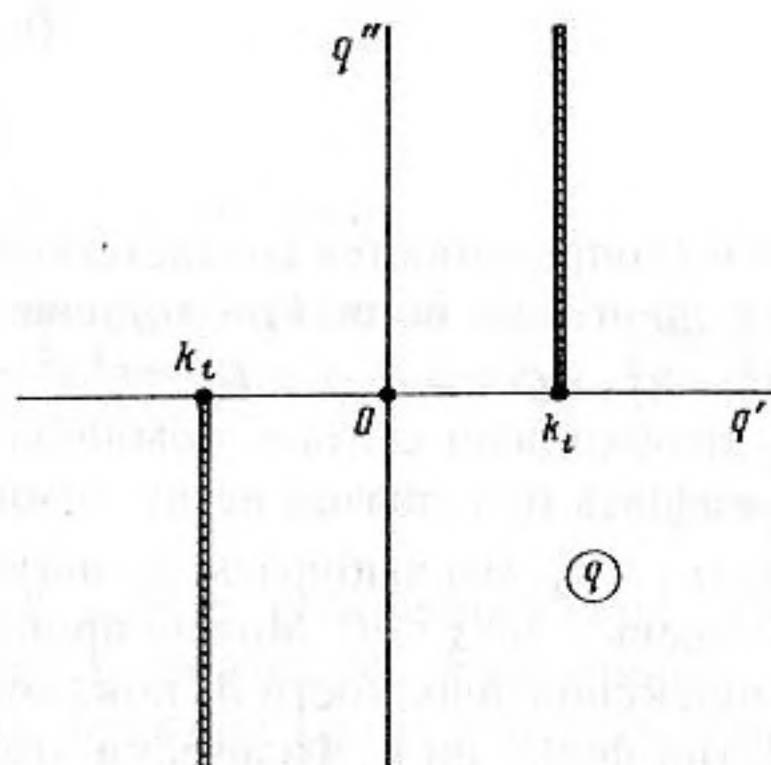


Рис. 3. Разрезы на комплексной плоскости  $q$

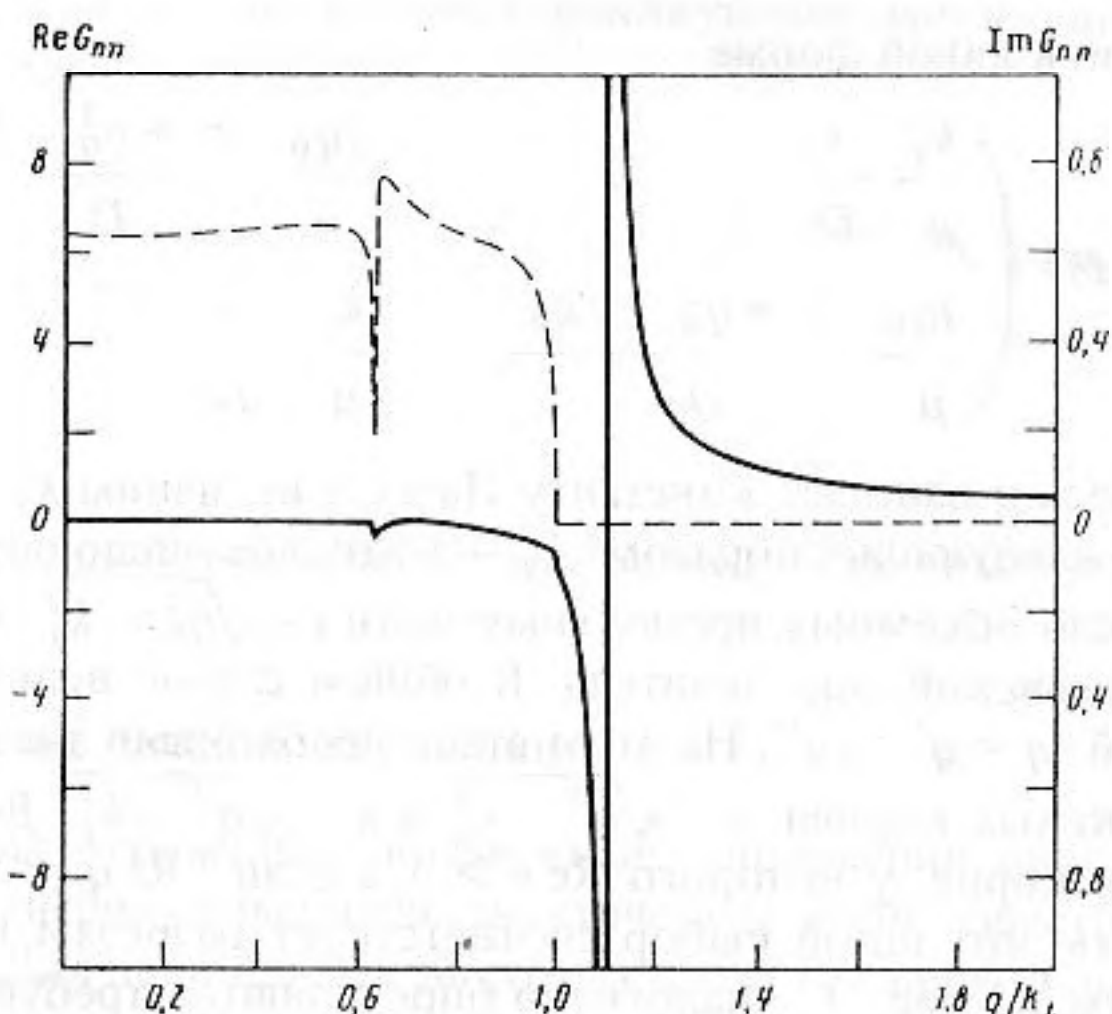


Рис. 4. Зависимость компоненты матрицы Грина  $G_{yy}$  от нормированного волнового числа

Используя преобразование Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x - np) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Pi_m e^{i(mQ)x},$$

получаем

$$\sigma = \sigma_0 e^{iqx} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Pi_m e^{i(mQ)x}. \quad (8)$$

Здесь  $\Pi_m$  — фурье-образ функции  $f(x)$ :

$$\Pi_m = \frac{1}{p} \int_{-p/2}^{+p/2} f(x) e^{-imQx} dx.$$

Волновое число структуры  $Q$  определяется как  $Q = 2\pi/p$ .

Таким образом, в отличие от предыдущей ситуации, когда рассматривалось возбуждение среды одной гармоникой поверхностных напряжений, сейчас имеем набор гармоник

$$\sigma = \sigma_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Pi_m e^{iq_m x}, \quad (9)$$

где  $q_m = q + mQ$ . Вследствие линейности рассматриваемой системы распределение акустических полей, являющееся откликом системы на воздействие (9), также будет суммой откликов:

$$\mathbf{u} = \sigma_0 e^{iqx} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( \begin{array}{cc} \frac{k_t^2}{\mu} \frac{s_m}{D_m} \Pi_m & -\frac{iq_m}{\mu} \frac{s_m^2 + q_m^2 - 2\kappa_m s_m}{D_m} \Pi_m \\ \frac{iq_m}{\mu} \frac{s_m^2 + q_m^2 - 2\kappa_m s_m}{D_m} \Pi_m & \frac{k_t^2}{\mu} \frac{\kappa_m}{D_m} \Pi_m \end{array} \right) \times e^{imQx}, \quad (10)$$

где величины  $s_m$ ,  $\kappa_m$  и  $D_m$  — суть соответственно  $s$ ,  $\kappa$  и  $D$  при  $q_m = q + mQ$ . Если распределение напряжений однородно на интервале  $|x| < a$ , обозначая силу, действующую

на единицу длины полоски в направлении  $OZ$   $F_0$ , имеем:

$$\sigma_0 = \frac{F_0}{2a} \quad (11a)$$

и

$$\Pi_m = \frac{2a}{p} \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi am}{p}\right). \quad (11b)$$

Соответственно для распределения в виде  $\delta$ -функции Дирака, в пределе  $a \rightarrow 0$  получаем

$$\sigma_0 \Pi_m \rightarrow \frac{F_0}{p}, \quad (11c)$$

а результирующее распределение смещений на поверхности можно назвать периодической функцией (матрицей) Грина  $\mathfrak{G}$ :

$$\mathfrak{G} = \frac{F_0}{p\mu} e^{iqx} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{k_t^2}{\mu} \frac{s_m}{D_m} & -\frac{iq_m}{\mu} \frac{s_m^2 + q_m^2 - 2\kappa_m s_m}{D_m} \\ \frac{iq_m}{\mu} \frac{s_m^2 + q_m^2 - 2\kappa_m s_m}{D_m} & \frac{k_t^2}{\mu} \frac{\kappa_m}{D_m} \end{pmatrix} e^{imQx}. \quad (12)$$

Очевидно что элементы этой матрицы (без множителя  $e^{iqx}$ ) являются периодическими функциями  $x$  с периодом  $p$ . Также легко показать, что имеет место и периодичность по волновому числу:  $\mathfrak{G}(x | q + mQ) = \mathfrak{G}(x | q)$ . Это можно проверить, производя замену  $q + kQ \rightarrow q$  и одновременно изменяя соответствующим образом индекс суммирования.

Отметим, что в зависимости от частоты  $\omega$  естественно приписывать небольшие по модулю номера (например, 0, -1, -2, ...) тем гармоникам, которые наиболее эффективно возбуждаются в системе при заданных значениях  $\omega$  и  $q$ . При этом может оказаться удобным не ограничиваться первой зоной Бриллюэна, а использовать расширенные диаграммы Бриллюэна.

### III. ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

#### III.1. Полупространство, нагруженное системой резонаторов

Для описания взаимодействия резонаторов с подложкой введем смещение  $u_0$  поверхности подложки в точке присоединения резонатора и силу  $F_0$ , приложенную к поверхности в этой области, создаваемую резонатором. Обозначим, далее  $K$  — упругость пружины резонатора и  $\omega_0 = \sqrt{K/m}$  — собственная частота резонатора,  $m$  — масса резонатора.

Используя классические формулы для механического резонатора, можно записать связь между  $u_0$  и  $F_0$ :

$$F_0 = K \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} u_0 e^{-i\omega t}. \quad (13)$$

Будем считать, что резонатор реагирует только на вертикальные смещения поверхности полупространства, а сила  $F_0$  приложена к узкой полосе ширины  $|x| < a$ . Используя (10), получаем

$$u_1(y) = u_0 = \frac{K}{2a} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} u_0 \frac{k_t^2}{\mu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_m}{D_m} \Pi_m. \quad (14)$$

В этих формулах опущен множитель  $e^{iqx}$ .

Так как нас интересует нетривиальное решение  $u_0 \neq 0$ , сокращая  $u_0$ , получаем дис-

персионное уравнение

$$1 = \epsilon \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_m k_t^2}{D_m a} \Pi_m. \quad (15)$$

В (15) введен основной параметр задачи  $\epsilon = K/2\mu$ . Этот параметр сравнивает жесткость пружинки резонатора и жесткость упругого полупространства. Параметр  $\epsilon$  может быть записан в эквивалентной форме  $\epsilon = 2\pi^2(m/\rho\lambda_{t0}^2)$ , где  $m$  — плотность материала подложки,  $\lambda_{t0}$  — длина волны сдвиговых объемных волн в подложке при частоте  $\omega_0$ . Параметр  $\epsilon$  является также отношением массы резонатора к некоторой характерной движущейся массе подложки с сечением  $\lambda_{t0} \times \lambda_{t0}$ , т.е. определяет "силу" резонатора и величину возмущения поверхностной волны системой резонаторов. Следует упомянуть, что во всех предыдущих выкладках величина  $\epsilon$  считается произвольной, т.е. теория малых возмущений здесь не используется. Аналогично в случае системы горизонтальных резонаторов (рис. 2) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 = \epsilon \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{s_m k_t^2}{D_m a} \Pi_m. \quad (16)$$

### III.2. Тяжелые полоски

Теперь рассмотрим периодическую структуру, состоящую из тяжелых узких полосок  $|x| < a \ll p$ , размещенных непосредственно на поверхности упругого полупространства. В этом случае сила, действующая на поверхность подложки в районе полоски, имеет две компоненты:

$$F_{x,y} = m\omega^2 u_{x,y}, \quad (17)$$

где  $m$  означает массу полоски на единицу длины. Используя (17) и периодичность структуры, можно записать:

$$\begin{aligned} u_x(x=0) &= G^{(u_x, F_x)}(x=0) \frac{m\omega^2}{2a} u_x + G^{(u_x, F_y)}(x=0) \frac{m\omega^2}{2a} u_y, \\ u_y(x=0) &= G^{(u_y, F_x)}(x=0) \frac{m\omega^2}{2a} u_x + G^{(u_y, F_y)}(x=0) \frac{m\omega^2}{2a} u_y. \end{aligned} \quad (18)$$

Для существования нетривиальных решений детерминант системы (18) необходимо приравнять к нулю:

$$\left\{ G^{(u_x, F_x)}(x=0) \frac{m\omega^2}{2a} - 1 \right\} \left\{ G^{(u_y, F_y)}(x=0) \frac{m\omega^2}{2a} - 1 \right\} + \left\{ G^{(u_x, F_y)}(x=0) \frac{m\omega^2}{2a} \right\}^2 = 0 \quad (19)$$

или в явном виде:

$$\begin{aligned} &\left\{ \epsilon_1 \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{s_m k_t^2}{D_m a} \Pi_m \right) - 1 \right\} \left\{ \epsilon_1 \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_m k_t^2}{D_m a} \Pi_m \right) - 1 \right\} - \\ &- \epsilon_1^2 \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{s_m^2 + q_m^2 - 2\kappa_m s_m}{a D_m} \Pi_m \right\}^2 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где введен основной параметр задачи  $\epsilon(\omega)$  в виде

$$\epsilon_1 \equiv \frac{m\omega^2}{2a\mu} = \frac{2\pi^2 m}{\lambda_t^2 \rho}$$

В рамках теории возмущений исследуем распространение волн рэлеевского типа в рассматриваемой структуре, когда вносимое резонаторами возмущение относительно невелико,  $\epsilon \ll 1$ . Рассмотрим детально первый случай, когда резонаторы реагируют на вертикальные перемещения поверхности звукопровода.

Величина и взаимодействие различных пространственных гармоник волны, распространяющейся в периодической структуре, существенно зависят от соотношения между длиной волны  $\lambda$  и периодом структуры  $p$ . Диаграммы *a-e* на рис. 5 схематически иллюстрируют три возможные ситуации. На рис. 5, *a* показано соотношение волновых векторов для случая относительно низких частот, когда  $2q \ll Q$ . В этом случае, как легко видеть, волновое число  $n$ -й гармоники  $q_n$  с  $n \neq 0$  велико по сравнению с волновыми числами  $k_t$ ,  $k_l$  и  $q$ . Это значит, что ни одна из этих гармоник не может эффективно возбуждаться и все гармоники, кроме нулевой, имеют малую амплитуду. Эти гармоники сильно локализованы вблизи поверхности и их присутствие лишь слабо изменяет скорость волны Рэлея, которая описывается гармоникой с номером  $n = 0$ . Иногда этот эффект называют "эффектом накопления энергии". Такая ситуация имеет место, если резонансная частота относительно велика  $\omega_0 \gg \omega$ , а возмущение мало:  $\epsilon_1 \ll 1$ . При этом для относительного изменения скорости легко получить следующее выражение:

$$\frac{\Delta v}{v} \approx -2\epsilon_1 \frac{\kappa_0/q_0}{pk_t} \frac{k_t^3}{D'_q} \quad (21)$$

Знак "-" здесь указывает на то, что волна Рэлея распространяется со слегка уменьшенной скоростью. Индексом "0" отмечены величины, относящиеся к невозмущенной волне Рэлея на гладкой поверхности. Величина  $D'_q$  означает производную рэлеевского определителя по  $q$ . Безразмерная величина  $D'_q/k_t^3$  при  $q = q_0$  зависит только от коэффициента Пуассона [1].

Рассмотрим теперь брэгговское отражение (рис. 5, *b*). Мы считаем, что резонансная частота  $\omega_0$  сильно отличается от брэгговской. В этом случае гармоника с номером  $-1$ , волновое число  $q_{-1}$  которой равно  $q - Q \approx -q$ , соответствует волне Рэлея, распространяющейся в противоположном направлении. Это значит, что в дисперсионном уравнении (15) слагаемые, содержащие  $D_0$  и  $D_{-1}$ , дают сравнимый вклад и по крайней мере два эти члена должны учитываться при анализе. Отбрасывая остальные слагаемые, приходим к так называемому приближению связанных волн (мод).

Разложим рэлеевский определитель в ряд Тейлора вблизи брэгговской частоты  $\omega_B$ , определяемой из условия  $q(\omega_B) = Q/2$ , т.е. положим  $\omega = \omega_B + \Delta\omega$  и  $q = Q/2 + \Delta q$ . Стандартным путем получаем  $D_0 \approx D'_q(\Delta q - \Delta\omega/v_R)$  и  $D_{-1} \approx -D'_q(\Delta q + \Delta\omega/v_R)$ . Здесь  $v_R$  — скорость волны Рэлея на невозмущенной поверхности. Как легко видеть из (11в), причем  $a/p \ll 1$  величины  $\Pi_0$  и  $\Pi_{-1}$  отличаются незначительно. Пренебрегая этим различием, приходим к классическим формулам для брэгговского отражения в рамках теории связанных мод:

$$\Delta q = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{v_R} + \delta\right)^2 - \delta^2}, \quad (22)$$

где  $\delta \equiv \epsilon_1(2\kappa_0 k_t^2 / pD'_q)$ . Как видно из (22), ширина полосы непропускания  $\Omega = 2\delta v_R$  определяется соотношением

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = 4\epsilon_1 \frac{\kappa_0 k_t}{pD'_q} \quad (23)$$

Из (22) также легко видеть, что полоса частот непропускания смещена примерно на половину собственной ширины в сторону низких частот вследствие замедления, связанного с эффектом массовой нагрузки.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда частота волны близка к собственной частоте ре-



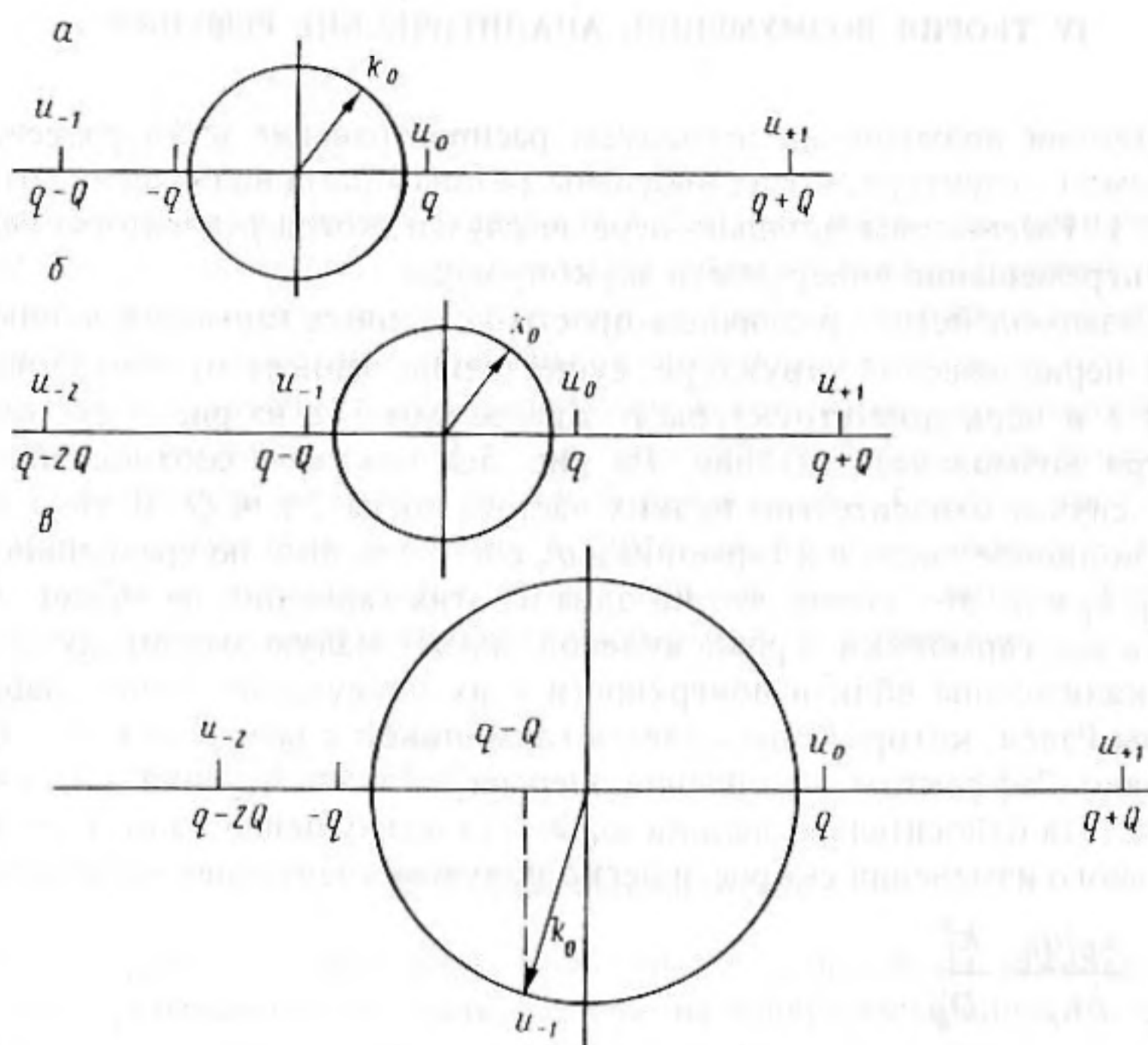


Рис. 5. Диаграммы рассеяния ПАВ при различных соотношениях между волновым вектором и волновым числом структуры

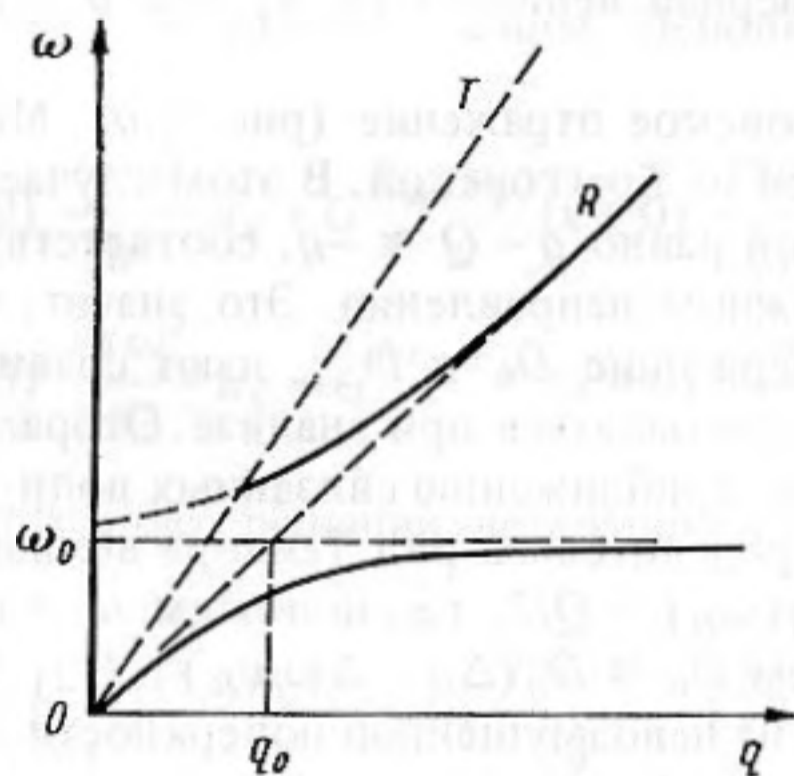


Рис. 6. "Медленные" волны Рэлея, примерный вид дисперсионных кривых

зонаторов:  $\omega \approx \omega_0$  и обе частоты малы по сравнению с брэгговской. В этом случае  $|D_n| \gg D_0$  для всех  $n \neq 0$ , и дисперсионное уравнение можно приближенно записать в виде

$$1 = \epsilon \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \left( \frac{2\kappa_0 k_t^2}{D_0 p} + \dots \right). \quad (24)$$

Разлагая  $D_0$  в ряд вблизи точки  $\omega_0$ ,  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ , имеем:

$$\left( \Delta q - \frac{\Delta\omega}{v_R} \right) \Delta\omega = -C, \quad (25)$$

где обозначено  $C = \epsilon \omega_0 (\kappa_0 k_t^2 / p D'_q)$ .

Решение уравнения (25) схематически показано на рис. 6. Подчеркнем два существенных момента. Во-первых, при приближении к резонансной частоте  $\omega_0$  волна Рэлея замедляется. Ее фазовая скорость может стать в несколько раз меньше, чем скорость в невозмущенной волне, тогда как групповая скорость стремится к нулю. В следующем разделе статьи мы обсудим более детально эти *замедленные волны рэлеевского типа*. Во-вторых, при частотах несколько выше  $\omega_0$  имеет место излучение объемных волн и волны сильно затухают вдоль поверхности.

Теперь остановимся на случае, когда обе частоты  $\omega$  и  $\omega_0$  выше, чем частота Брэгга. В этом случае главный механизм затухания — это рассеяние в объем в виде поперечных и продольных объемных акустических волн, см. рис. 5, в. Вблизи частоты резонаторов  $\omega_0$ , ( $\omega \approx \omega_0$ ) это рассеяние должно сильно возрастать.

В следующем разделе мы также обсудим поведение полученных численно дисперсионных кривых в ситуации, когда все характерные частоты близки:  $\omega \approx \omega_0 \approx \omega_B$ .

## V. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### V.1. Процедура вычислений

Рассмотрим теперь более подробно свойства волн в изучаемой структуре на основе численного решения уравнения (15). В качестве материала упругого полупространства возьмем плавленый кварц с коэффициентом Пуассона  $\sigma = 0,17$ . При численных расчетах удобно использовать нормированную частоту  $\eta = p\omega/\pi c_t = k_t/Q/2$  и нормированное волновое число  $\xi = q/Q/2 = pq/\pi$ . В этих координатах биссектриса  $\eta = \xi$  соответствует объемным сдвиговым волнам с волновым числом  $q = k_t$ . Точки над этой линией принадлежат "излучательной" области, в которой фазовая скорость выше  $v_t$ , а волны затухают за счет излучения энергии в объем. В координатах  $(\xi, \eta)$  линия, соответствующая волне Рэлея, имеет несколько меньший наклон, чем биссектриса.

Для плавленого кварца величина  $b = (c_t/c_l)^2$ , входящая в рэлеевский детерминант, равна 0,397. Относительная ширина полосы, к которой прикрепляется резонатор  $2a/p$ , взята равной 1/16.

Таким образом, в нормированном виде дисперсионное уравнение принимает форму:

$$F(\xi) = 1 - \frac{\eta^4}{\eta_0^2 - \eta^2} \left( \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{\tilde{\kappa}_n}{\tilde{D}_n} \Pi_n \right) = 0, \quad (26)$$

где мы уже ограничили суммирование конечными пределами от  $-N$  до  $+N$ . Далее имеем

$$\tilde{s}_n = \sqrt{\tilde{q}_n^2 - \eta^2}, \quad \tilde{q}_n = \xi + 2n, \quad \tilde{\kappa}_n = \sqrt{\tilde{q}_n^2 - b\eta^2},$$

$$\tilde{D}_n = 4\tilde{q}_n^2 \tilde{\kappa}_n \tilde{s}_n - (\tilde{q}_n^2 + \tilde{s}_n^2)^2, \quad \Pi_n = \frac{2}{\pi} \operatorname{sinc}\left(2\pi \frac{a}{p} n\right).$$

Соответственно для гауссовского закона распределения сил по полосе мы имеем  $\Pi_n = \frac{2}{\pi} \exp(-(\pi a/pn)^2)$ . Для численного решения уравнения (24) использовались несколько

методов. Вместо комплексной функции  $F(\xi)$  комплексного аргумента  $\xi$  мы приравнивали к нулю действительную и мнимую части  $F$ :  $\operatorname{Re}\{F(\xi)\} = 0$  и  $\operatorname{Im}\{F(\xi)\} = 0$ , зависящие от двух переменных — действительной и мнимой частей:  $\xi = \xi^{(r)} + i\xi^{(i)}$ .

Процедура нахождения нулей функции  $F(\xi)$  состояла в следующем. Сначала предполагаемый район значений  $\xi^{(i)}$  разбивался на эквидистантные отрезки. Затем для заданного значения  $\xi^{(i)}$ , например  $\tilde{\xi}^{(i)}$ , ищем корень действительной функции  $\operatorname{Re}\{F\}(\xi^{(r)}, \tilde{\xi}^{(i)})$  действительного переменного  $\xi^{(r)}$ , используя одну из стандартных процедур. Та же процедура применялась для нахождения корней функции  $\operatorname{Im}\{F\}(\xi^{(r)}, \tilde{\xi}^{(i)})$ . В результате в обоих случаях имеем две "линии нулей" на плоскости  $(\xi^{(r)}, \xi^{(i)})$ , возможно, состоящие из нескольких частей. Точки пересечения этих кри-

вых являются нулями комплексной функции  $F(\xi)$ . Одно существенное замечание: в некоторых случаях данная процедура, при разумном времени счета, приводила к неудовлетворительной точности результатов. В этих случаях приближенные значения корней использовались в качестве начальных значений в стандартной эффективной процедуре поиска корней по методу градиентного спуска.

## V.2. Дискуссия. Замедленные волны Рэлея

На рис. 7,а показаны численные решения дисперсионного уравнения (26) при собственной частоте резонаторов  $\eta_0 = 0,2$  и величине параметра  $\epsilon = 0,3$ . Как видно из рисунка, волна Рэлея существенно замедляется при частоте, приближающейся снизу к резонансной. При этом эффективная резонансная частота несколько меньше собственной резонансной частоты  $\eta_0$ . Этот эффект сдвига резонансной частоты в сторону уменьшения имеет место также для единичного резонатора, рассеивающего волну Рэлея [5–7]. При этом упругое полупространство играет роль дополнительной пружины, последовательно присоединенной к резонатору и уменьшающей эффективную жесткость, определяющую резонансную частоту. При частоте, близкой к резонансной, амплитуда колебаний массы  $m$  резонатора  $y_0 = (\omega_0^2/\omega_0^2 - \omega^2)u_0$  существенно больше, чем амплитуда смещений поверхности  $u_0$ .

В Приложении можно найти более подробное обсуждение распределения амплитуд колебания поверхности на участке между соседними резонаторами и самосогласованности основного приближения — постоянство смещения в пределах полосы  $|x| \leq a$ .

Таким образом, в медленной волне рэлеевского типа основная часть энергии сконцентрирована в системе резонаторов, а подложка лишь связывает резонаторы друг с другом.

При приближении к резонансной частоте величина волнового числа возрастает и достигает значения  $Q/2$ , т.е. имеет место брэгговское отражение медленных волн и возникает соответствующая полоса частот непропускания. Как видно из рис. 7,б, вблизи частоты  $\eta_0$  волны сильно затухают, причем затухание неограниченно возрастает при приближении к частоте  $\eta_0$ . В непосредственной близости от этой частоты никаких решений, соответствующих поверхностным волнам, найдено не было. Это, однако, представляется естественным: при частоте  $\eta = \eta_0$  смещения поверхности звукопровода в местах присоединения резонаторов равны нулю (13). По поверхности с периодически закрепленными полосками не могут распространяться поверхностные волны.

При увеличении частоты выше  $\eta_0$  распространение волн опять становится возможным. Дисперсионная кривая появляется на линии  $\eta = \xi$ , т.е.  $q = v_t \omega$ , что соответствует квазиобъемным скользящим вдоль поверхности поперечным волнам со смещениями, лежащими в сагиттальной плоскости. Парциальная волна сжатия при этом, как обычно, экспоненциально затухает вглубь звукопровода. Такая приповерхностная сдвиговая волна не может существовать на гладкой невозмущенной поверхности, так как не удовлетворяет граничным условиям. По мере увеличения частоты эта волна становится все более локализованной у поверхности и превращается в волну рэлеевского типа.

В рассматриваемом случае основной параметр возмущения  $\epsilon$  относительно невелик ( $\epsilon = 0,3$ ), а частота резонаторов меньше брэгговской  $\eta_0 < \eta_B$ . При этом брэгговская полоса частот непропускания отделена от области частот, при которых имеется затухание, обусловленное рассеянием в объем. На рис. 7,в представлена частотная зависимость затухания волн как в полосе непропускания, так и при более высоких частотах, когда гармоника с номером "–1" соответствует рассеянным объемным сдвиговым волнам. При расчете дисперсионных кривых в зоне с затуханием, учитывая периодичность диаграмм Бриллюэна и с целью сокращения времени счета, рассматривались только те ветви дисперсионных кривых, у которых мнимая часть  $\xi$  положительна, что соответствует волнам, затухающим вдоль оси  $OX$ .

На рис. 8 показаны дисперсионные кривые в случае более массивных резонаторов, с  $\epsilon = 1$ . Как видно из рисунка, в этом случае полоса частот непропускания объединена в область рассеяния волн.

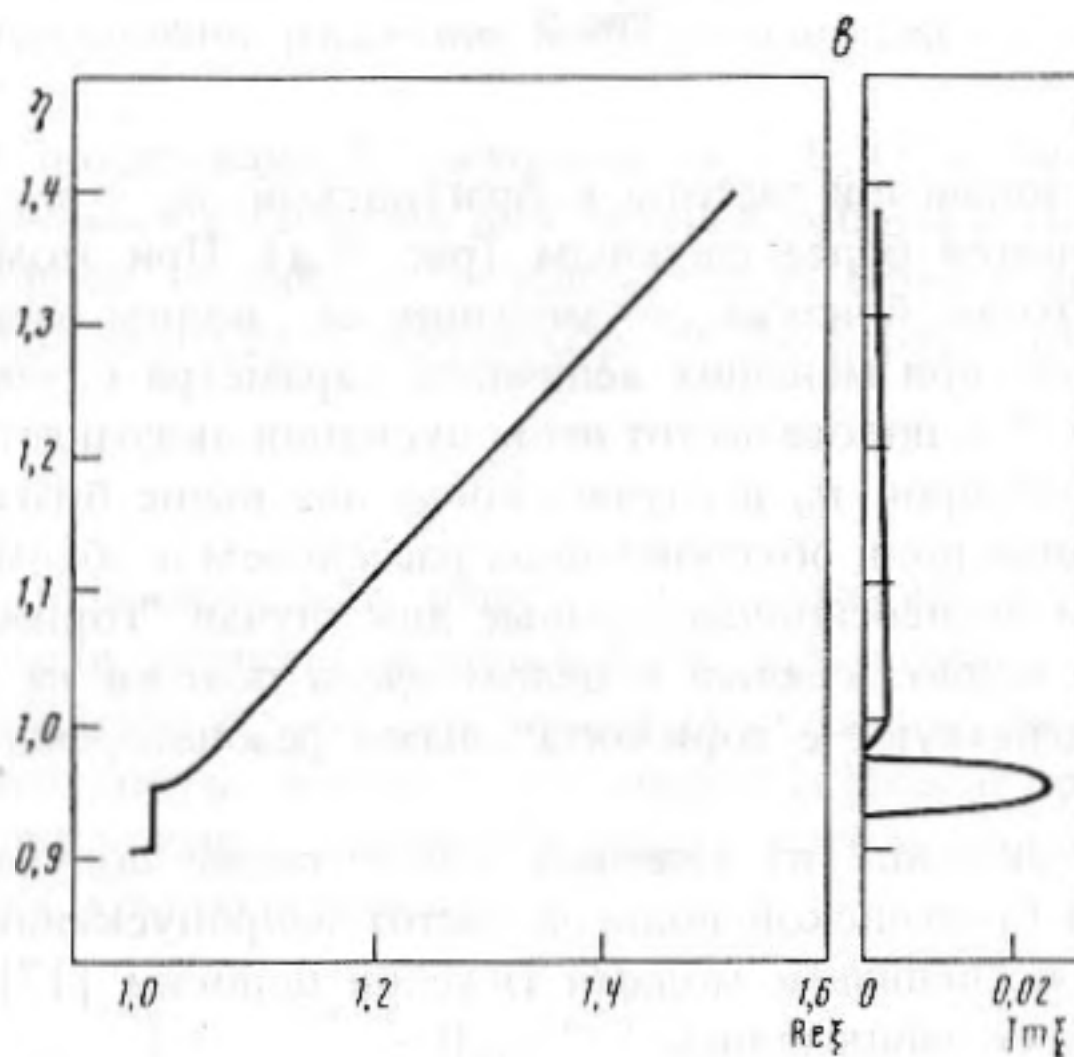
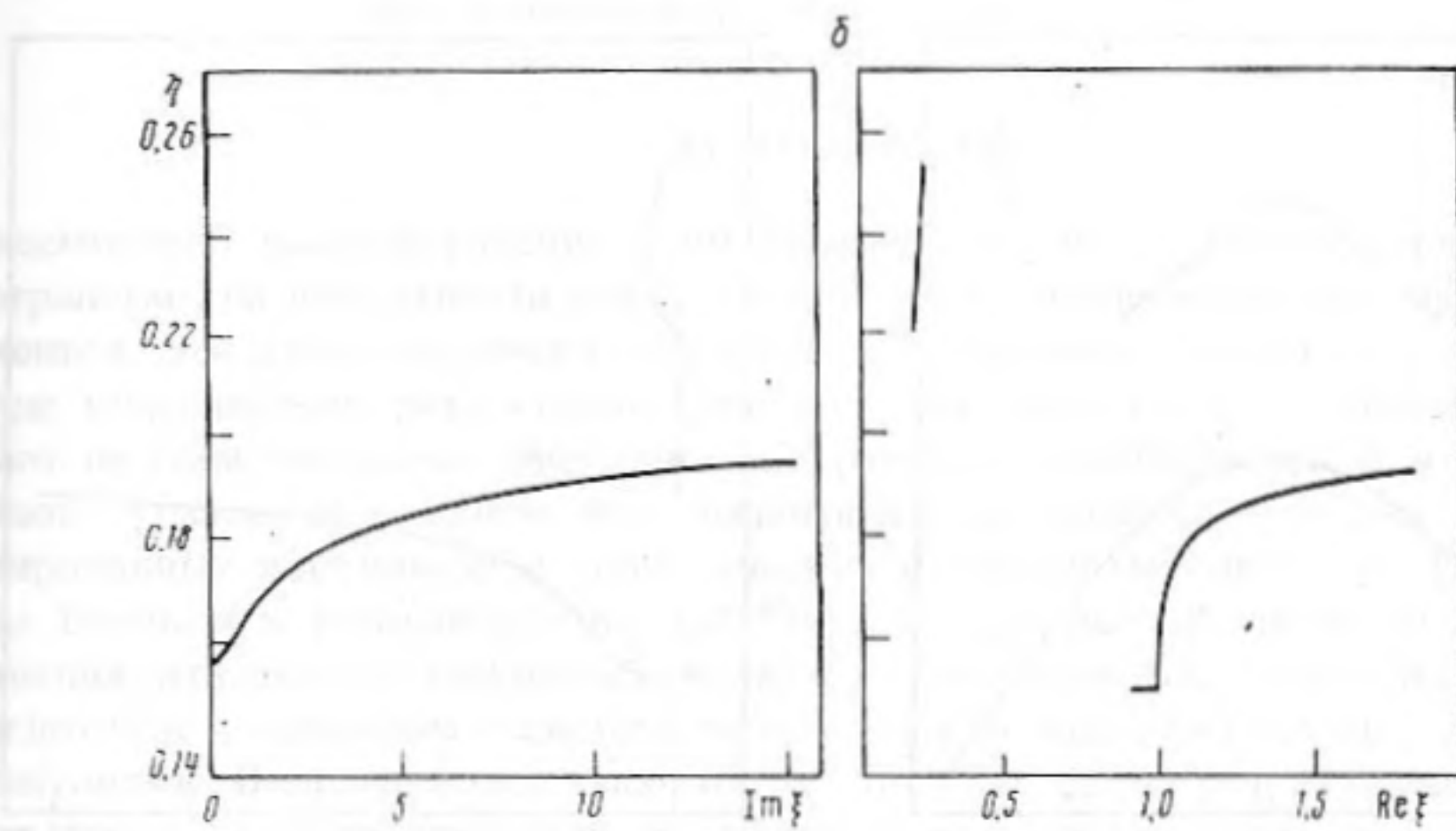
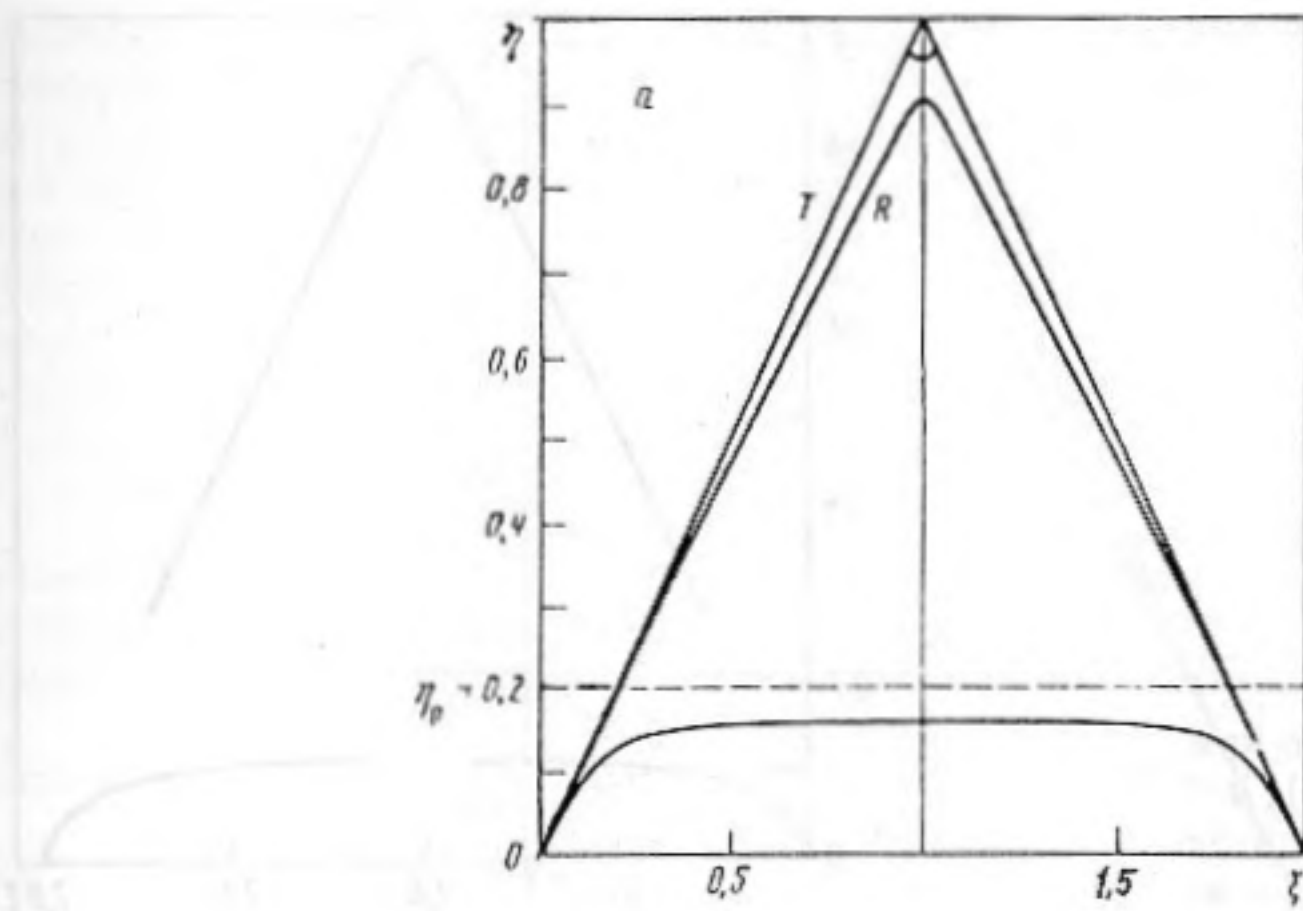


Рис. 7. Дисперсионные кривые,  $\eta_0 = 0,2$ ,  $\epsilon = 0,3$ ; а — области пропускания; б — особенности вблизи резонансной частоты; в — брэгговская полоса частот непропускания

Рис. 8. Дисперсионные кривые,  $\eta_0 = 0,2$ ,  $\epsilon = 1,0$

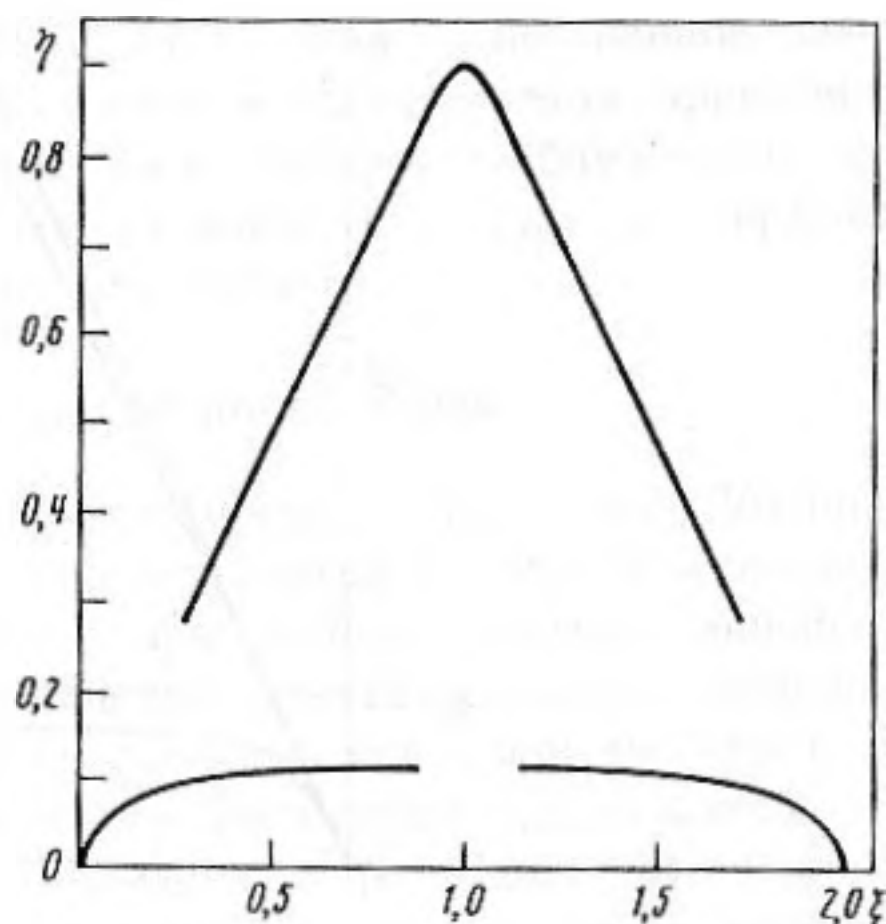


Рис. 8

Рис. 9. Дисперсионные кривые,  $\eta_0 = 0,9$ ,  $\epsilon = 0,1$ ; *a* — участки кривых вблизи резонансной частоты; *б* — затухание

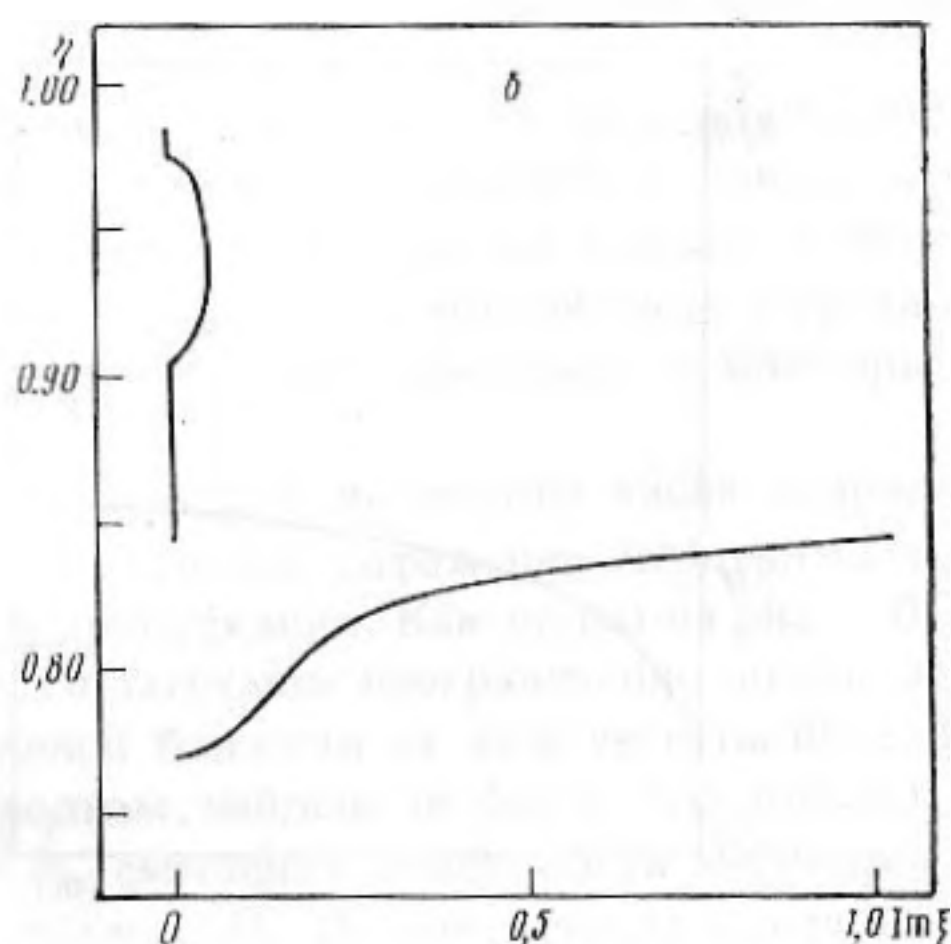
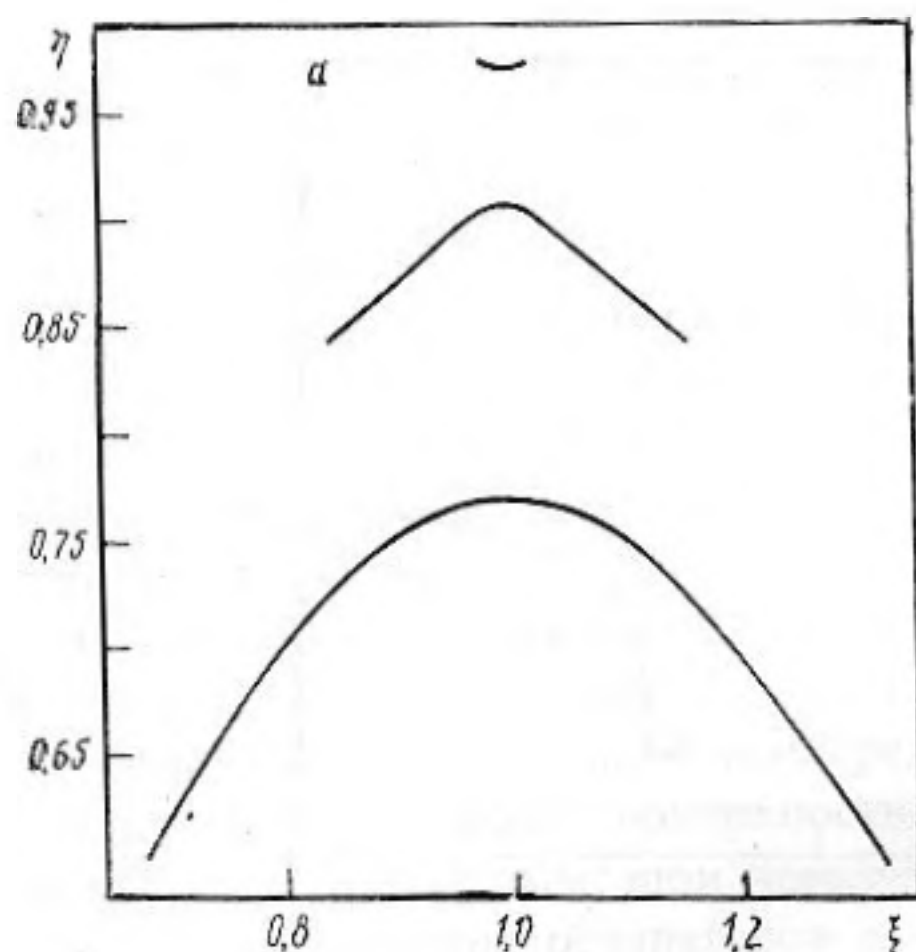


Рис. 9

При приближении резонансной частоты к брэгговской,  $\eta_0 \approx \eta_B$ , поведение дисперсионных кривых становится более сложным (рис. 9, *a*). При этом следует отметить, что во-первых, при частотах, близких, но меньших  $\omega_0$ , волны очень сильно затухают (рис. 9, *б*), и, во-вторых, при меньших величинах параметра  $\epsilon$ , чем в случае, относящемся к кривым на рис. 7, *a*, полоса частот непропускания оказывается больше.

Вблизи частот резонаторов  $\eta_0$  в случае, когда она выше брэгговской, как показывают расчеты, затухание волн обусловленное рассеянием в объем, резко возрастает.

На рис. 10 показаны дисперсионные кривые для случая "горизонтальных" резонаторов (рис. 2, *б*). Как видно, кривые в целом очень похожи на представленные на рис. 7, *a*. ПАВ взаимодействуют с горизонтальными резонаторами несколько слабее, чем с вертикальными [5–7].

Для периодической системы из тяжелых полос также получены дисперсионные кривые с классической брэгговской полосой частот непропускания. Никаких особенностей, связанных с собственными модами тяжелой полосы [17], при использованных параметрах системы не наблюдалось.

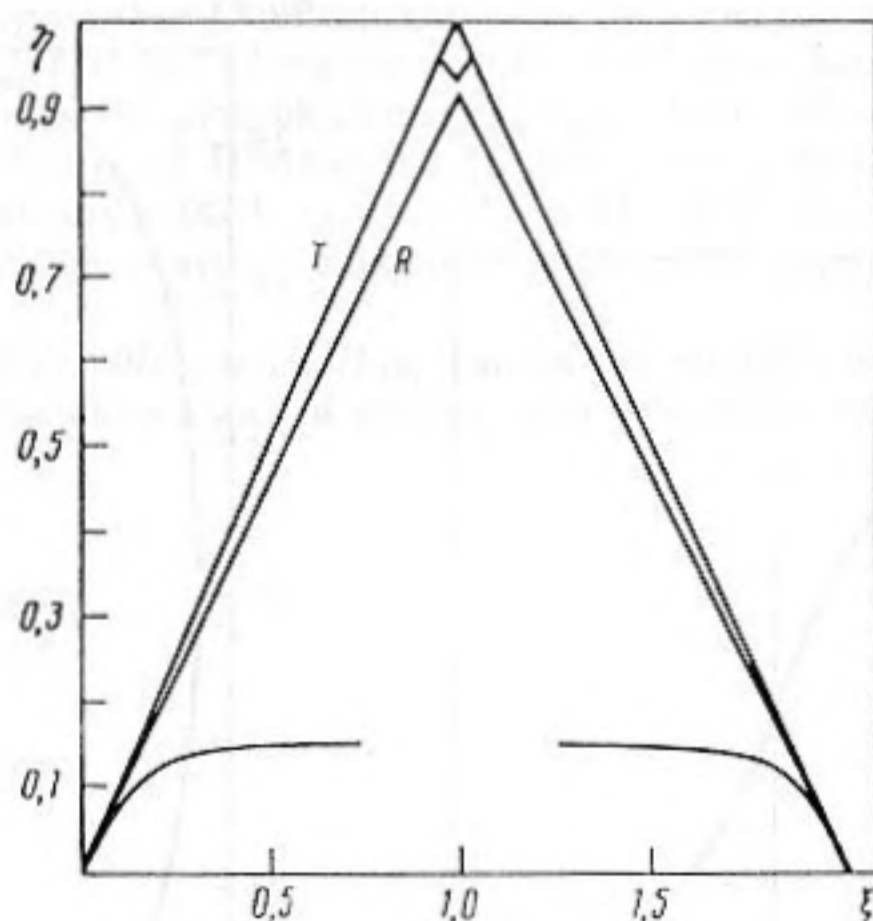


Рис. 10. Дисперсионные кривые; "горизонтальные" резонаторы,  $\eta_0 = 0,2$ ,  $\epsilon = 0,3$

## VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено распространение волн рэлеевского типа в упругом изотропном полупространстве, на поверхности которого имеется периодическая система резонирующих элементов. Эти элементы имеют собственную резонансную частоту  $\omega_0$  и моделируются в виде классических резонаторов, реагирующих либо только на вертикальные, либо только на горизонтальные смещения поверхности звукопровода. Для вывода дисперсионного уравнения в явном виде развита и использована концепция периодических сфазированных источников и периодических функций матриц Грина. При частоте волны  $\omega$ , близкой к резонансной  $\omega_0$  ( $\omega < \omega_0 < \omega_B$ ), найдено решение дисперсионного уравнения, отвечающее *медленным волнам рэлеевского типа*, поток энергии в которых сосредоточен в основном в системе резонаторов, а подложка служит для связи между резонаторами. В случае более высоких собственных частот резонаторов, при  $\omega_0 \approx \omega_B$ , имеет место сильное затухание и отражение волн в полосе непропускания, причем ширина полосы непропускания резко возрастает. Наконец, если частота  $\omega_0$  выше брэгговской, имеется сильное рассеяние волн вблизи этой частоты, приводящее к сильному затуханию.

Эта работа была поддержана Академиями наук СССР и Австрии, когда один из авторов (В.П.П.) находился с визитом для научной работы в Институте общей электротехники и электроники Технического университета Вены в рамках программы научных обменов. Авторы благодарят профессора Ф. Зайферта за интерес к работе и ценные замечания.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Проверим самосогласованность нашего приближения. Существенным предположением данной модели является использование при выводе дисперсионного уравнения (14), (15) допущение о том, что полоса  $|x| < a \ll \lambda$  движется как единое целое, имея некоторое смещение  $u_0$  вдоль оси  $Y$  (или  $X$ ). Можно проверить теперь справедливость этого предположения, вычисляя распределение смещений  $u_0(x)$  в пределах одного периода структуры по формуле:

$$\begin{aligned} \frac{u(x)}{u_0} &= \epsilon \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_m k_t^2}{D_m a} \Pi_m e^{imQx} = \\ &= \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_m k_t^2}{D_m a} \Pi_m e^{imQx} \right) / \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa_m k_t^2}{D_m a} \Pi_m \right). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

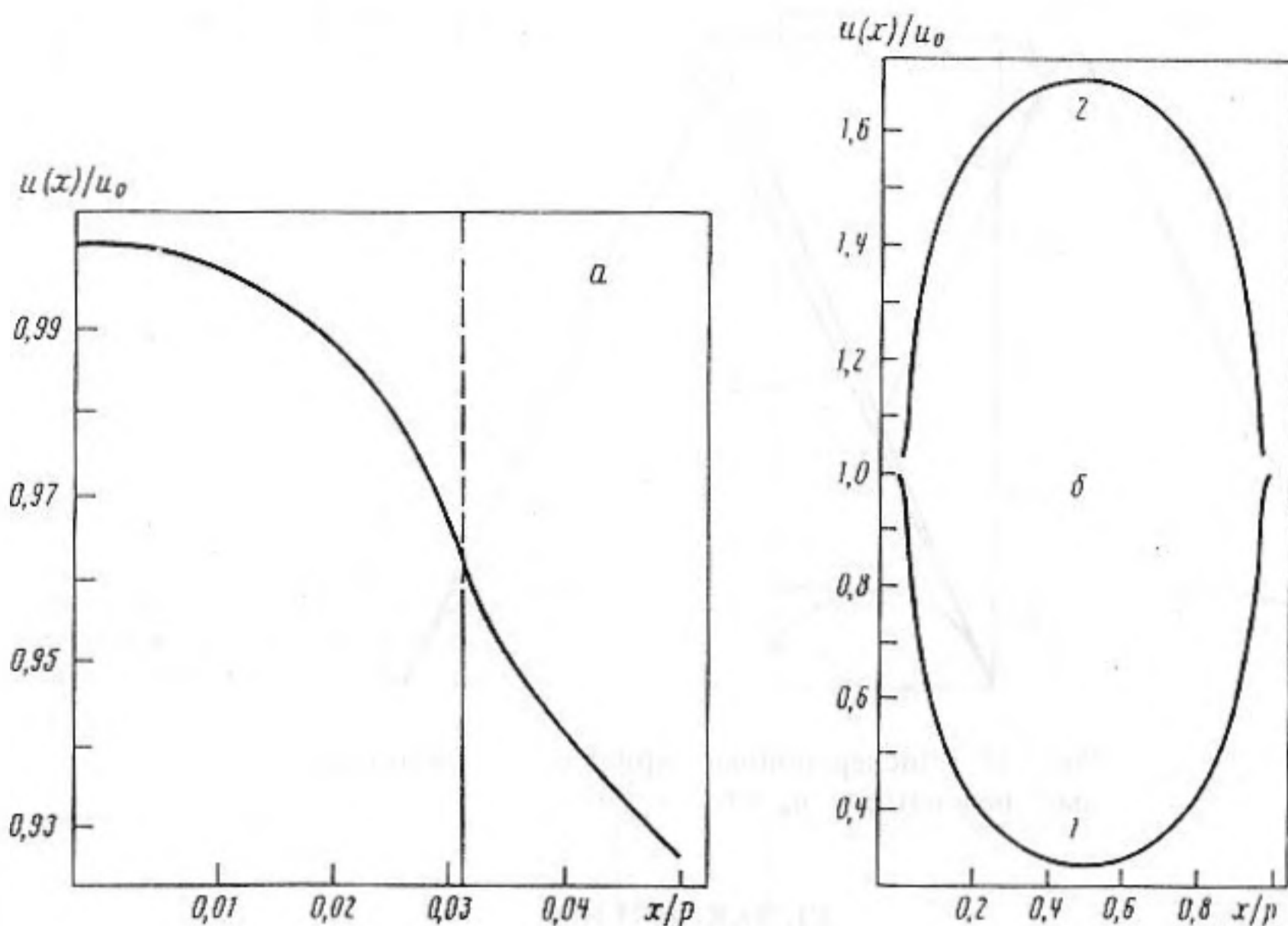


Рис. 11. Распределение амплитуд смещения поверхности звукопровода между резонаторами:  $\eta_0 = 0,2$ ;  $\epsilon = 0,3$ ; а —  $\eta = 0,1$ ; б —  $\eta = 0,15$  — кривая 1,  $\eta = 0,5$  — кривая 2

Величина смещения должна вычисляться для волнового числа  $q$  (или  $\xi$ ), являющегося корнем дисперсионного уравнения (16). На рис. 11, а, б показаны результаты вычислений для нескольких частот. Видно, что внутри полосы  $|x| < a$  при  $a/p = 1:32$  смещения одинаковы с точностью  $\approx 97\%$ .

Из рис. 11, б видно также, что амплитуда смещений максимальна (кривая 1) в области закрепления резонаторов при частотах, соответствующих "медленной" волне Рэлея. При частоте, выше резонансной, эти области, наоборот, колеблются с меньшей амплитудой, чем участки поверхности между резонаторами (кривая 2).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуляев Ю.В., Плесский В.П. Распространение поверхностных акустических волн в периодических структурах // УФН. 1989. Т. 157. Вып. 1. С. 85–127.
2. Морган Д. Устройства обработки сигналов на поверхностных акустических волнах. М.: Радио и связь, 1990.
3. Glass N.E., London R., Maradudin A.A. Propagation of Rayleigh surface waves across a large-amplitude grating // Phys. Rev. B. 1981. V. 24. № 12. P. 6843.
4. Yamouchi K., Meguro T., Chen Z.H. GHz-range wide band SAW unidirectional low-loss filters with large reflection coefficients // Proc. IEEE Ultrasonic Symp. 1987. P. 173–176.
5. Плесский В.П., Симонян А.В. Отражение волн Рэлея от резонатора // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 15. С. 4–7.
6. Plesky V.P., Simonian A.W. Rayleigh wave reflection and scattering on a resonator // Phys. Lett. A. V. 155. № 4, 5. P. 281–284.
7. Garova E.A., Plesky V.P., Shibanova N.N., Simonian A.W. Reflection and scattering of Rayleigh waves on single resonating element: Preprint IRE Acad. of Sci. of the USSR. Moscow, 1991.
8. Shimizu H., Suzuki Y., Kanda T. Love-type SAW resonator of small size with very low capacitance ratio and its application to VCO // Proc. IEEE Ultrasonics Symp. 1990. P. 103–108.
9. Maradudin A.A., Ruan P., McGurn A.R. Shear horizontal acoustic surface shape resonances // Phys. Rev. B. 1988. V. 38. № 5. P. 3068.
10. Morgan D.P., Durrant P. Low-loss filters using group-type SPUDT transducers // Proc. IEEE Ultrasonics Symp. 1990. P. 31–36.
11. Abbott B.P., Hartmann C.S., Malocha D.C. Matching of single-phase unidirectional SAE transducers and demonstration using a low-loss EWC-SPUDT filter // Proc. IEEE Ultrasonics Symp. 1990. P. 49–54.
12. Baghai-Wadji A.-R., Maradudin A.A. Rigorous analysis of surface transverse waves in periodic arrays with arbitrary electrode profiles // Proc. IEEE Ultrasonics Symp. 1990. P. 425–428.

13. *Baghai-Wadji A.-R., Mechlenbrauker Ch.* Propagation of piezoelectric waves in singly- and doubly-periodic metallic gratings // 5-th European Frequency and Time Forum, Basancon, France, 1991.
14. *Ingebrigtsen K.A.* Surface waves in piezoelectrics // *J. Appl. Phys.* 1969. V. 40. P. 2681–2686.
15. *Milson R.F., Reilly N.H., Redwood M.* Analysis of generation and detection of surface and bulk acoustic waves by interdigital transducers // *IEEE Trans.* 1977. V. SU-24. P. 147–166.
16. *Бирюков С.В.* Уравнение для поверхностного импеданса неоднородной упругой среды // *Акуст. журн.* 1985. Т. 31. № 3. С. 296–302.
17. *Гарова Е.А., Плесский В.П., Шибанова Н.Н.* Рассеяние волн Рэлея на тяжелой полосе // *Тр. XV Всесоюз. конф. "Акустоэлектроника и физическая акустика твердого тела". Ч. 2.* Л.: ЛИАП, 1991. С. 14–15.

Филиал института  
радиотехники и электроники  
Российской Академии наук

Технический университет  
Вена  
Австрия

Поступила в редакцию  
24.10.91  
После исправления  
04.02.92

A.-R. Baghai-Wadji, V.P. Plessky, A.W. Simonian

### PROPAGATION OF RAYLEIGH TYPE SAW IN PERIODIC STRUCTURES WITH RESONATING ELEMENTS

Propagation of the Rayleigh-type waves in an elastic half-space covered with a periodic system of resonators is studied. The concepts of phased line sources and the periodic Green function are developed to describe wave propagation in systems with an arbitrary magnitude of surface perturbation. At frequencies close to the eigenfrequency of resonators  $\omega_0$  ( $\omega \leq \omega_0$ ) the existence of the slow Rayleigh waves is predicted if  $\omega_0$  is smaller than the Bragg frequency of a periodic system. The motion energy in this situation is localized mainly in resonators and not in the supporting substrate. The Bragg reflection and very strong damping of slow waves have been found out close to  $\omega_0$  but with  $\omega < \omega_0$ . When  $\omega_0$  approaches the Bragg frequency, complicated behavior of the dispersion curves is observed with the essential increase of the stopband. If the resonator frequency  $\omega_0$  is higher than the Bragg frequency  $\omega_B$  then strong damping of SAW at frequencies  $\omega \approx \omega_0$  occurs due to efficient generation of bulk waves.