

УДК 534.26

© 1992 г. А.И. Бойко, А.Л. Дышко, М.Ю. Тэтюхин

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ВЫТЯНУТОМ АКУСТИЧЕСКИ МЯГКОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

На основании метода сращивания асимптотических разложений решена задача дифракции плоской звуковой волны на вытянутом акустически мягком теле вращения. В качестве малого параметра принято отношение максимального диаметра тела к его длине. Рассеянное поле представлено в виде асимптотического ряда по степени этого малого параметра. Проведено численное сравнение полученных результатов с задачей рассеяния плоской волны на тонких вытянутых сфероидах.

Рассмотрим в изотропном акустическом пространстве вытянутое тело вращения конечной длины, поверхность S_0 которого в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной с осью вращения тела, описывается уравнением $r = \epsilon F(z)$. Функция $F(z)$ задана на отрезке $[-l/2, l/2]$, достаточно гладкая на нем и обращается в нуль только в его концах. Параметр ϵ есть отношение максимального диаметра тела к его длине l . Для рассматриваемого нами вытянутого тела параметр ϵ является малой величиной.

Обозначим $S(z) = [F(z)]^2$. Тогда произведение $\pi \epsilon^2 S(z)$ будет определять площадь поперечного сечения тела как функцию координаты z . Предположим, что $S(z)$ регулярна на отрезке $[-l/2, l/2]$, в концах которого имеют место следующие представления:

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (l/2 + z)^n, \quad S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (l/2 - z)^n, \quad (1)$$

где $c_n = S^{(n)}(-l/2) (n!)^{-1}$, $d_n = (-1)^n S^{(n)}(l/2) (n!)^{-1}$. Причем $c_1 \neq 0$ и $d_1 \neq 0$, что означает наличие отличных от нуля радиусов кривизны в концах тела.

На тело падает плоская звуковая волна

$$v(r, \varphi, z) = A_0 \exp \{ i(k_z z + k_x r \cos \varphi + k_y r \sin \varphi) \}. \quad (2)$$

Здесь A_0 — амплитуда плоской волны k_x, k_y и k_z — проекции волнового вектора на декартовы оси координат. Множитель $\exp\{-i\omega t\}$, соответствующий временной зависимости, здесь и далее будем опускать.

Полное звуковое давление во внешности тела описывается функцией $p(r, \varphi, z) = u(r, \varphi, z) + v(r, \varphi, z)$, где через $u(r, \varphi, z)$ обозначено поле дифракции. Функция $p(r, \varphi, z)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) p(r, \varphi, z) = 0, \quad (3)$$

краевому условию

$$p(r, \varphi, z)|_{S_0} = [u(r, \varphi, z) + v(r, \varphi, z)]|_{S_0} = 0, \quad (4)$$

отвечающему акустически идеально мягкому случаю, а функция $u(r, \varphi, z)$ удовлетворяет, кроме того, условию излучения Зоммерфельда

$$u(r, \varphi, z) = f(\theta, \varphi; \epsilon) R^{-1} \exp\{ikR\} + O(R^{-2}) \quad (5)$$

при $R \rightarrow \infty$. Здесь R, θ, φ — сферические координаты с тем же центром, что и цилиндрические.

Цель работы — отыскание функции $u(r, \varphi, z)$, описывающей рассеянное поле.

При решении задачи мы будем применять метод двухмасштабных разложений, получивший в акустике название метода сращивания асимптотических разложений [1–6]. С этой целью сделаем преобразование координат следующего вида:

$$r = \epsilon r^*, \quad z = z. \quad (6)$$

Координаты r^*, z , определенные формулой (6), носят название внутренних переменных. Преобразование (6) растягивает координатную ось r в ϵ раз так, чтобы независимые переменные r^* и z имели порядок единицы в окрестности тела вращения.

Выражение (2) для плоской волны от внутренних переменных r^*, z можно представить следующим образом:

$$v(r^*, \varphi, z) = A_0 \exp\{ik_z z\} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n v_n(r^*, \varphi), \quad (7)$$

где $v_n = (n!)^{-1} [ir^* (k_x \cos \varphi + k_y \sin \varphi)]^n$.

Функция $u(r^*, \varphi, z)$ удовлетворяет уравнению (3), которое в переменных r^*, z запишем в виде

$$[L_1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right)] u(r^*, \varphi, z) = 0, \quad (8)$$

где

$$L_1 = L_0 + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_0 = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} r^* \frac{\partial}{\partial r^*}.$$

Будем искать рассеянное поле $u(r^*, \varphi, z)$ в виде асимптотического ряда для $\epsilon \rightarrow 0$ при фиксированных внутренних переменных:

$$u(r^*, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{2n} \sum_{m=1}^{\infty} (\ln \epsilon)^{-m} u_{nm}(r^*, z) + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n [u_{n0}(r^*, \varphi, z) + u_{n,-1}(r^*, \varphi, z) \ln \epsilon]. \quad (9)$$

Здесь функции $u_{nm}(r^*, z)$ при $m \neq 0$ не зависят от угла φ и определяют только осевую симметрию рассеянного поля. Ряд (9) называется внутренним разложением. Внутреннее разложение для рассеянного поля пригодно в ближней зоне дифракции плоской волны на теле.

Подставим внутреннее разложение (9) в уравнение (8) и краевые условия (4), также записанные во внутренних переменных (6), и получим бесконечную последовательность рекуррентных соотношений, связывающую все входящие в формулу (9) величины

$$\begin{aligned} L_0 u_{0m} &= 0 && \text{при } m = 1, 2, 3; \dots, \\ L_0 u_{nm} &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u_{n-1, m} && \text{при } n, m = 1, 2, 3, \dots, \\ L_1 u_{0j} &= L_1 u_{1j} = 0 && \text{при } j = -1, 0, \\ L_1 u_{nj} &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u_{n-2, j} && \text{при } n = 2, 3, 4, \dots; j = -1, 0, \\ u_{n0}|_{S_0} &= -A_0 \exp\{ik_z z\} v_n|_{S_0} && \text{при } n = 0, 1, 2, \dots, \\ u_{nm}|_{S_0} &= 0 && \text{при } n = 0, 1, 2, \dots, m \neq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Неизвестные функции, связанные рекуррентными соотношениями (10), являются аналитическими и в малой окрестности тела вращения при $-l/2 \leq z \leq l/2$ имеют

следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u_{0m} &= c_{0m}(z) \ln r^* + c_{0m}^*(z), \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \\
 u_{nm} &= c_{nm}(z) \ln r^* + c_{nm}^*(z) - \frac{1}{4} (r^*)^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \times \\
 &\times [c_{n-1,m}(z) \ln r^* + c_{n-1,m}^*(z) - c_{n-1,m}(z) \sum_{q=1}^1 \frac{1}{q}] + \dots \\
 &\dots + \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} (r^*)^{2n} \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right)^n [c_{0m}(z) \ln r^* + c_{0m}^*(z) - c_{0m}(z) \sum_{q=1}^n \frac{1}{q}], \\
 u_{n0} &= \sum_{j=1}^n \left\{ \left[\frac{b_{nj}(z)}{(r^*)^j} + b_{nj}^*(z)(r^*)^j \right] \cos j\varphi + \right. \\
 &\left. + \left[\frac{d_{nj}(z)}{(r^*)^j} + d_{nj}^*(z)(r^*)^j \right] \sin j\varphi + \tilde{u}_{nj}(r^*, z) \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь функция $\tilde{u}_{nj}(r^*, z)$ имеет представление, аналогичное представлению функции u_{nm} . Остальные функции, входящие в последнее разложение, из экономии места не приводятся.

Явные выражения для неизвестных коэффициентов $c_{nm}(z)$, $b_{nj}(z)$ и $d_{nj}(z)$, входящих в общий вид функций u_{nm} , должны быть определены в результате процедуры сращивания с внешним разложением. В частности, важно отметить, что в результате этой процедуры получим $u_{0,-1} \equiv 0$.

Заметим, что пользоваться внутренним разложением можно только при конечных значениях переменной r^* , поскольку во входящих в это разложение функциях присутствуют растущие по r^* решения, которые непригодны на бесконечность. Поэтому в качестве функции $u(r, \varphi, z)$, описывающей рассеянное поле вне некоторой окрестности тела вращения, следует взять комбинацию функций, удовлетворяющих условию излучения. Такую комбинацию будем называть внешним разложением. Представим внешнее разложение в виде следующего ряда:

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{2n} \sum_{m=1}^{\infty} (\ln \epsilon)^{-m} U_{nm}(r, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{2n} U_{n0}(r, \varphi, z). \quad (11)$$

Учитывая тот факт, что при $\epsilon \rightarrow 0$ поверхность тела S_0 стягивается к отрезку $[-l/2, l/2]$, будем искать неизвестные функции $U_{nm}(r, z)$ при $m \neq 0$ в виде потенциалов простого слоя, сосредоточенных на некотором отрезке $[\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon)]$, таком, что $-l/2 < \alpha(\epsilon) < \beta(\epsilon) < l/2$:

$$U_{nm}(r, z) = \Pi_{nm}(r, z, \epsilon) = \int_{\alpha(\epsilon)}^{\beta(\epsilon)} \mu_{nm}(t) G(r, t - z) dt, \quad (12)$$

а функции $U_{n0}(r, \varphi, z)$ — в виде суммы производных потенциалов простого слоя, сосредоточенных на отрезке $[-l/2, l/2]$:

$$\begin{aligned}
 U_{10}(r, \varphi, z) &= D_1 \Pi_{10}^{(1)} + D_2 \Pi_{10}^{(2)}, \\
 U_{20}(r, \varphi, z) &= (D_1^2 - D_2^2) \Pi_{20}^{(1)} + 2D_1 D_2 \Pi_{20}^{(2)} + D_1 \Pi_{20}^{(3)} + D_2 \Pi_{20}^{(4)}, \\
 U_{30}(r, \varphi, z) &= \frac{1}{2} (D_1^3 - 3D_1 D_2^2) \Pi_{30}^{(1)} + \frac{1}{2} (3D_1^2 D_2 - \\
 &- D_2^3) \Pi_{30}^{(2)} + (D_1^2 - D_2^2) \Pi_{30}^{(3)} + 2D_1 D_2 \Pi_{30}^{(4)} + D_1 \Pi_{30}^{(5)} + D_2 \Pi_{30}^{(6)},
 \end{aligned} \quad (13)$$

и так далее. Каждому потенциалу $\Pi_{n0}^{(j)}$, входящему в представление функции $U_{n0}(r, \varphi, z)$, отвечает своя плотность объемной скорости. Кроме того, из формулы (12) следует, что функция U_{nm} , входящая в ряд (11), есть функция параметра ϵ .

В формулах (12) и (13) приняты следующие обозначения: $\mu_{nm}(t)$ — неизвестные плотности объемной скорости, $G(r, z) = -(4\pi R)^{-1} \exp\{ikR\}$, $D_1 = \partial/\partial x$, $D_2 = \partial/\partial y$. Функции $\alpha(\epsilon)$ и $\beta(\epsilon)$ представляют собой ряды вида:

$$\alpha(\epsilon) = -l/2 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \epsilon^{2j}, \quad \beta(\epsilon) = l/2 - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \epsilon^{2j}.$$

Ряд (11) для осесимметричного случая $m \neq 0$ был приведен в работе [7] и там же в весьма громоздком и труднообозримом виде были найдены функции $\mu_{0m}(t)$ и $\mu_{1m}(t)$ при $m = 1, 2, 3, \dots$, описывающие главные члены разложения рассеянного поля.

Поскольку предстоящая процедура сращивания будет проводиться по переменной z в пределах $-l/2 \leq z \leq l/2$, то для дальнейшего нам понадобятся некоторые свойства потенциала простого слоя, а именно если плотность $\mu(t)$ является аналитической функцией на отрезке $-l/2 \leq z \leq l/2$, то при $r \rightarrow 0$ имеет место следующее представление:

$$\begin{aligned} \Pi(r, z) &= \int_{-l/2}^{l/2} \mu(t) G(r, t-z) dt = \\ &= \ln \left\{ \frac{r}{\sqrt{l^2 - 4z^2}} \right\} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z) r^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z) r^{2j}, \quad -l/2 \leq z \leq l/2, \end{aligned} \quad (14)$$

где $a_j(z)$ и $b_j(z)$ — бесконечно дифференцируемые функции, причем

$$2\pi a_0(z) = \mu(z),$$

$$4\pi b_0(z) = - \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\exp\{ik|t-z|\} \mu(t) - \mu(z)}{|t-z|} dt,$$

а для остальных коэффициентов выполняются соотношения:

$$2\pi a_j(z) = \frac{(-1)^j}{2^{2j} (j!)^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right)^j \mu(z),$$

$$\begin{aligned} 2\pi b_j(z) &= \frac{(-1)^j}{2^{2j} (j!)^2} \left\{ \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right)^j [2\pi b_0(z) - \mu(z) \sum_{q=1}^j \frac{1}{q}] + \right. \\ &+ \left. (\ln \sqrt{l^2 - 4z^2}) \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right)^j \mu(z) - \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right)^j [\mu(z) \ln \sqrt{l^2 - 4z^2}] \right\}. \end{aligned}$$

Действительно, представив $\Pi(r, z)$ в следующей форме:

$$\Pi(r, z) = - \int_{-l/2}^{l/2} \mu(t) \frac{\exp\{ikR\} - 1}{4\pi R} dt - \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu(t)}{4\pi R} dt,$$

рассмотрим второй интеграл

$$\begin{aligned} I(r, z) &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu(t)}{4\pi R} dt = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu(t) - \mu(z)}{4\pi R} dt + \mu(z) \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dt}{4\pi R} = \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu(t) - \mu(z)}{4\pi R} dt + \frac{1}{4\pi} \mu(z) \int_{-l/2}^{l/2} d \{ \ln(t-z+R) \}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $r \rightarrow 0$, получим выражение вида:

$$I(r, z) = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu(t) - \mu(z)}{4\pi |t-z|} dt - \frac{1}{2\pi} \mu(z) \ln \left\{ \frac{r}{\sqrt{l^2 - 4z^2}} \right\} + O(r^2 \ln r).$$

Таким образом, при $r \rightarrow 0$ выполняется следующее соотношение:

$$\Pi(r, z) = \frac{1}{2\pi} \mu(z) \ln \left\{ \frac{r}{\sqrt{l^2 - 4z^2}} \right\} - \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\exp\{ik|t-z|\} \mu(t) - \mu(z)}{|t-z|} dt + O(r^2 \ln r).$$

Значения остальных коэффициентов найдем, подставив асимптотическое разложение (14) в уравнение (3) и приравняв нулю сомножители при соответствующих степенях r^{2j} .

Исходя из представления (14) будем искать разложение функции $U_{nm}(r, z, \epsilon)$ при $\epsilon, r \rightarrow 0$ и $-l/2 \leq z \leq l/2$ в следующей форме:

$$U_{nm}(r, z, \epsilon) \sim \ln \left\{ \frac{r}{\sqrt{l^2 - 4z^2}} \right\} \sum_{j=0}^{\infty} a_{nmj}(z) r^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{nmj}(z) r^{2j} + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{2q}}{(2q)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^{2j}}{(2j)!} \Psi_{qj}(\mu_{nm}(z)), \quad m \geq 1. \quad (15)$$

В формуле (15) введены обозначения:

$$a_{nm0}(z) = \mu_{nm}(z),$$

$$\Psi_{qj}(\mu_{nm}(z)) = \left\{ \frac{d^{2j}}{dr^{2j}} \left[\frac{d^{2q}}{d\epsilon^{2q}} U_{nm}(r, z, \epsilon) \right] \Big|_{\epsilon=0} \right\} \Big|_{r=0}.$$

Откуда следует, что правую часть формулы (15) можно рассматривать как формальное разложение функции $U_{nm}(r, z, \epsilon)$ в ряд Тейлора по степеням малого параметра ϵ . Из разложения (15), в частности, следует, что, например, функция $\Psi_{10}(\mu_{nm}(z))$ имеет вид:

$$\Psi_{10}(\mu_{nm}(z)) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \beta_1 \frac{\exp\{ik(l/2 - z)\}}{l/2 - z} \mu_{nm}(l/2) + \alpha_1 \frac{\exp\{ik(l/2 + z)\}}{l/2 + z} \mu_{nm}(-l/2) \right\}. \quad (16)$$

В выражении (12) для потенциалов $U_{nm}(r, z, \epsilon)$ плотности объемной скорости $\mu_{nm}(z)$ являются неизвестными аналитическими функциями на интервале интегрирования $-l/2 < \alpha(\epsilon) \leq z \leq \beta(\epsilon) < l/2$. Допустим, что эти функции могут быть аналитически продолжены на весь отрезок $[-l/2, l/2]$. Ниже будет показано, что это допущение и правомочность всего разложения (15) выполняются при определенном выборе коэффициентов α_n и β_n . Таким образом, далее будем рассматривать функции $\mu_{nm}(z)$, стоящие в правой части формулы (15), в качестве аналитических продолжений объемных плотностей $\mu_{nm}(z)$ на отрезок $[-l/2, l/2]$.

Заменим во внешнем разложении все функции $U_{nm}(r, z, \epsilon)$ их асимптотическим представлением (15). Тогда асимптотические ряды (9) и (11) будут представлять одну и ту же аналитическую функцию $u(r, \varphi, z)$ в разных областях. Процедура срачивания основывается на том, что в некоторой промежуточной зоне, являющейся пересечением этих областей, представления (9) и (11) должны совпадать. Эта область есть пересечение областей $r^* \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$. Учитывая изложенное выше, перейдем к процедуре срачивания. Для этого перепишем полученное внешнее разложение во внутренних переменных и сравним на отрезке $-l/2 \leq z \leq l/2$ все члены, стоящие при одинаковых степенях r^* и ϵ . При этом становится понятным присутствие членов вида $u_{n,-1}(r^*, \varphi, z) \ln \epsilon$ во внутреннем разложении (9). Этот факт вызван наличием особенности порядка $\ln r$ при $r \rightarrow 0$ в представлении (14) для потенциалов простого слоя. При процедуре срачивания будут автоматически исключены из внутреннего разложения все растущие на бесконечности решения.

Приняв во внимание краевые условия (10), после трудоемких промежуточных выкладок получим для неизвестных плотностей объемной скорости $\mu_{nm}(z) = 2\pi\Phi_{nm}(z)$ следующие рекуррентные выражения:

$$\Phi_{01}(z) = -A_0 \exp\{ik_z z\},$$

$$\Phi_{0,m+1}(z) = \frac{1}{2} \Phi_{0m}(z) \ln \left\{ \frac{l^2 - 4z^2}{S(z)} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\exp\{ik|t-z|\} \Phi_{0m}(t) - \Phi_{0m}(z)}{|t-z|} dt,$$

$$\Phi_{n,m+1}(z) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j)!} \Psi_{j0}(\Phi_{n-j,m}(z)) + \frac{1}{2} \Phi_{nm}(z) \ln \left\{ \frac{l^2 - 4z^2}{S(z)} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\exp\{ik|t-z|\} \Phi_{nm}(t) - \Phi_{nm}(z)}{|t-z|} dt -$$

$$- (-1)^n [S(z)]^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{2j+1}(j!)^2} \left\{ \ln S(z) \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right)^j \Phi_{0m}(z) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right)^j \left[\Phi_{0m}(z) \left(\ln S(z) + 2 \sum_{q=1}^j \frac{1}{q} \right) \right] \right\}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

причем $\Phi_{n1}(z) = 0$ для $n = 1, 2, 3, \dots$

Плотности объемной скорости $\Phi_{n0}^{(j)}(z)$ потенциалов $\Pi_{n0}^{(j)}(r, z)$, входящих в формулы (13), выпишем в форме

$$\Phi_{10}^{(1)}(z) = -A_0 i \exp\{ik_z z\} k_x S(z), \quad \Phi_{10}^{(2)}(z) = -A_0 i \exp\{ik_z z\} k_y S(z),$$

$$\Phi_{20}^{(1)}(z) = -\frac{1}{4} A_0 \exp\{ik_z z\} (k_x^2 - k_y^2) [S(z)]^2,$$

$$\Phi_{20}^{(2)}(z) = -\frac{1}{2} A_0 \exp\{ik_z z\} k_x k_y [S(z)]^2,$$

$$\Phi_{20}^{(3)}(z) = \frac{1}{8} A_0 i \exp\{ik_z z\} k_x (k^2 - k_z^2) [S(z)]^2,$$

$$\Phi_{20}^{(4)}(z) = \frac{1}{8} A_0 i \exp\{ik_z z\} k_y (k^2 - k_z^2) [S(z)]^2,$$

$$\Phi_{30}^{(1)}(z) = \frac{1}{24} A_0 i \exp\{ik_z z\} (k_x^3 - 3k_x k_y^2) [S(z)]^3,$$

$$\Phi_{30}^{(2)}(z) = \frac{1}{24} A_0 i \exp\{ik_z z\} (3k_x^2 k_y - k_y^3) [S(z)]^3,$$

$$\Phi_{30}^{(3)}(z) = \frac{1}{48} A_0 \exp\{ik_z z\} (k_x^2 - k_y^2) (k^2 - k_z^2) [S(z)]^3,$$

$$\Phi_{30}^{(4)}(z) = \frac{1}{24} A_0 \exp\{ik_z z\} k_x k_y (k^2 - k_z^2) [S(z)]^3,$$

$$\Phi_{30}^{(5)}(z) = -\frac{1}{192} A_0 i \exp\{ik_z z\} k_x (k^2 - k_z^2)^2 [S(z)]^3,$$

$$\Phi_{30}^{(6)}(z) = -\frac{1}{192} A_0 i \exp\{ik_z z\} k_y (k^2 - k_z^2)^2 [S(z)]^3,$$

ограничившись только тремя первыми зависящими от угла φ членами ряда (11).

Перейдем теперь к определению коэффициентов α_n и β_n . Из приведенных формул следует, что при произвольных α_n и β_n потенциалы (12) имеют неинтегрируемые особенности при $z \rightarrow \pm l/2$, поскольку функции $\Phi_{nm}(z)$ при $n > 0$ в этих точках неограниченно возрастают, причем порядок возрастания увеличивается с ростом n .

Для обеспечения сходимости интегралов и правомочности процедуры сращивания потребуем, чтобы значения функций $\Phi_{nm}(z)$ в концах отрезка $[-l/2, l/2]$ были ограничены. В этой связи воспользуемся формулой (16) и рассмотрим предел:

$$\lim_{z \rightarrow -l/2} \Phi_{12}(z) = \lim_{z \rightarrow -l/2} \left\{ -\frac{1}{2} \alpha_1 \Phi_{01}(-l/2) \frac{\exp\{ik(l/2+z)\}}{l/2+z} + \frac{1}{8} \Phi_{01}(z) \frac{[S'(z)]^2}{S(z)} \right\} + O(1) = -\frac{1}{8} \Phi_{01}(-l/2) \lim_{z \rightarrow -l/2} \frac{4\alpha_1 - c_1}{l/2+z} + O(1).$$

Положим $\alpha_1 = \frac{1}{4} c_1 = \frac{1}{4} S'(-l/2)$ и тем самым устраним особенность при $z \rightarrow -l/2$. Аналогичным образом получим $\beta_1 = \frac{1}{4} d_1 = -\frac{1}{4} S'(l/2)$. По индукции легко доказывается ограниченность функции $\Phi_{1m}(z)$ для всех m при таких значениях коэффициентов α_1 и β_1 . При рассмотрении $\lim_{z \rightarrow -l/2} \Phi_{2m}(z)$ приходим к выражению $\alpha_2 = -\frac{1}{16} c_1 c_2$ и т.д.

Таким образом, мы получили тот же результат, что и в работе [8], в которой рассматривалась осесимметричная задача обтекания несжимаемой жидкостью вытянутого тела вращения. В ней были найдены несколько первых членов рядов $\alpha(\epsilon)$ и $\beta(\epsilon)$, которые имеют следующий вид:

$$\alpha(\epsilon) = -l/2 + \frac{1}{4} c_1 \epsilon^2 - \frac{1}{16} c_1 c_2 \epsilon^4 + \frac{1}{64} (c_1^2 c_3 + 2c_1 c_2^2) \epsilon^6 - \frac{1}{256} (c_1^3 c_4 + 7c_1^2 c_2 c_3 + 5c_1 c_2^3) \epsilon^8 + O(\epsilon^{10}).$$

Для $\beta(\epsilon)$ имеет место аналогичное представление, в котором следует заменить $-l/2$ на $l/2$ и c_j — на d_j . Здесь коэффициенты c_j и d_j те же, что и в формуле (1). При таких предположениях внешнее разложение будет справедливо везде вплоть до поверхности тела S_0 .

Другой подход был предложен в работе [9] для оператора Лапласа и применен в работе [10] для уравнения Гельмгольца. Он позволил избежать трудности, связанные с сингулярностью внешнего разложения в концах тела. В этих работах приближенное решение ищется в виде потенциала, сосредоточенного на отрезке, который также целиком лежит внутри тела, а сама задача рассматривается в вытянутых сфероидальных координатах. Отрезок выбирается подходящим образом. Например, если S_0 — вытянутый сфероид, то искомый отрезок есть отрезок, соединяющий его фокусы. В этих работах содержатся оценки сходимости метода, основанного на таком подходе.

При вычислении амплитуды рассеяния функции $u(r, \varphi, z)$ в дальней зоне, т.е. функции $f(\theta, \varphi; \epsilon)$, удовлетворяющей условию (5), введем обозначения:

$$k_x = k \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \quad k_y = k \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \quad k_z = k \cos \theta_0$$

и получим:

$$\begin{aligned} -2f(\theta, \varphi; \epsilon) = & \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{2n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln \epsilon)} \frac{\beta(\epsilon)}{\alpha(\epsilon)} \int \Phi_{nm}(t) \exp\{-ikt \cos \theta\} dt + \\ & + A_0 \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ \epsilon^2 k^2 \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) S(t) + \frac{1}{8} \epsilon^4 k^4 \sin \theta \sin^2 \theta_0 \times \right. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \times [2 \sin \theta \cos 2(\varphi - \varphi_0) - \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] [S(t)]^2 + \frac{1}{192} \epsilon^6 k^6 \sin \theta \times \\ & \times \sin^3 \theta_0 [4 \sin^2 \theta \cos 3(\varphi - \varphi_0) - 4 \sin \theta \sin \theta_0 \cos 2(\varphi - \varphi_0) + \\ & + \sin^2 \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] [S(t)]^3 \} \exp \{ ikt(\cos \theta_0 - \cos \theta) \} dt + \\ & + \sum_{n=4}^{\infty} \epsilon^{2n} \int_{-l/2}^{l/2} \Phi_{n0}(\varphi, t) \exp \{ -ikt \cos \theta \} dt. \end{aligned}$$

В интегралах, входящих в формулу (17) с индексом $m=0$, область интегрирования распространена на весь отрезок $[-l/2, l/2]$, поскольку подынтегральная функция не имеет особенностей на этом отрезке.

При вычислении функции $f(\theta, \varphi; \epsilon)$ использовалась асимптотика интегралов, входящих во внешнее разложение (11), при $R \rightarrow \infty$. Функции $\Phi_{n0}(\varphi, z)$ при $n \geq 4$ имеют следующий общий вид:

$$\Phi_{n0}(\varphi, z) = \tilde{\Phi}_n(\varphi, k) [S(z)]^n.$$

Явное выражение для функций $\tilde{\Phi}_n$ в статье не приведено, но оно аналогичным образом может быть найдено в результате процедуры сращивания внутреннего и внешнего разложений.

Все приведенные в настоящей работе результаты справедливы при $k \rightarrow 0$, т.е. в случае задачи Дирихле для уравнения Лапласа, описывающей поле возмущения потока невязкой несжимаемой жидкости, набегающей на тело вращения. На этот факт указано также в работе [7].

С целью численной проверки полученных результатов и определения скорости сходимости ряда (11) при различных значениях ϵ и угла падения θ_0 плоской волны, рассмотрим случай, когда $S(z) = (l/2)^2 - z^2$, т.е. случай, когда тело является вытянутым акустически мягким сфероидом. Зададим внешнюю поверхность тела в сфероидальных координатах ξ, η, ψ как $\xi = \xi_0$, где $\xi_0^2 = 1 + \epsilon^2$; $kl = 2c\xi_0$. Здесь через c обозначен волновой размер фокусного расстояния $c = kd/2$. Для вытянутого сфероида величины c_j и d_j имеют вид:

$$c_1 = d_1 = l, \quad c_2 = d_2 = -1, \quad c_j = d_j = 0 \quad \text{при } j \geq 3.$$

Таким образом, главные члены для нижнего $\alpha(\epsilon)$ и верхнего $\beta(\epsilon)$ пределов интегрирования могут быть легко вычислены по приведенным выше формулам.

Проведем численное сравнение полученных результатов с точным решением задачи рассеяния плоской волны на вытянутом сфероиде в дальней зоне дифракции. С этой целью выделим конечное число членов ряда (17), определяющих основной вклад в рассеянное поле как осесимметричных, так и зависящих от угла φ составляющих в рассматриваемом при численном сравнении диапазоне частот, и перепишем их следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{k}{A_0} f(\theta, \varphi; \epsilon) = & \sum_{m=1}^N \frac{c \xi_0}{[\ln(\xi_0^2 - 1)]^m} \int_{-1}^1 G_{m-1}(x) \exp \{ ic \xi_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta) x \} dx - \\ & - \frac{1}{2} (\xi_0^2 - 1) (c \xi_0)^3 \sin \theta \sin \theta_0 \int_{-1}^1 \{ \cos(\varphi - \varphi_0) + \\ & + \frac{1}{8} (\xi_0^2 - 1) (c \xi_0)^2 \sin \theta_0 [2 \sin \theta \cos 2(\varphi - \varphi_0) - \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \times \\ & \times (1 - x^2) + \frac{1}{192} (\xi_0^2 - 1)^2 (c \xi_0)^4 \sin \theta_0 [4 \sin^2 \theta \cos 3(\varphi - \varphi_0) - \\ & - 4 \sin \theta \sin \theta_0 \cos 2(\varphi - \varphi_0) + \sin^2 \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] (1 - x^2)^2 \} \times \\ & \times (1 - x^2) \exp \{ ic \xi_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta) x \} dx, \end{aligned} \quad (18)$$

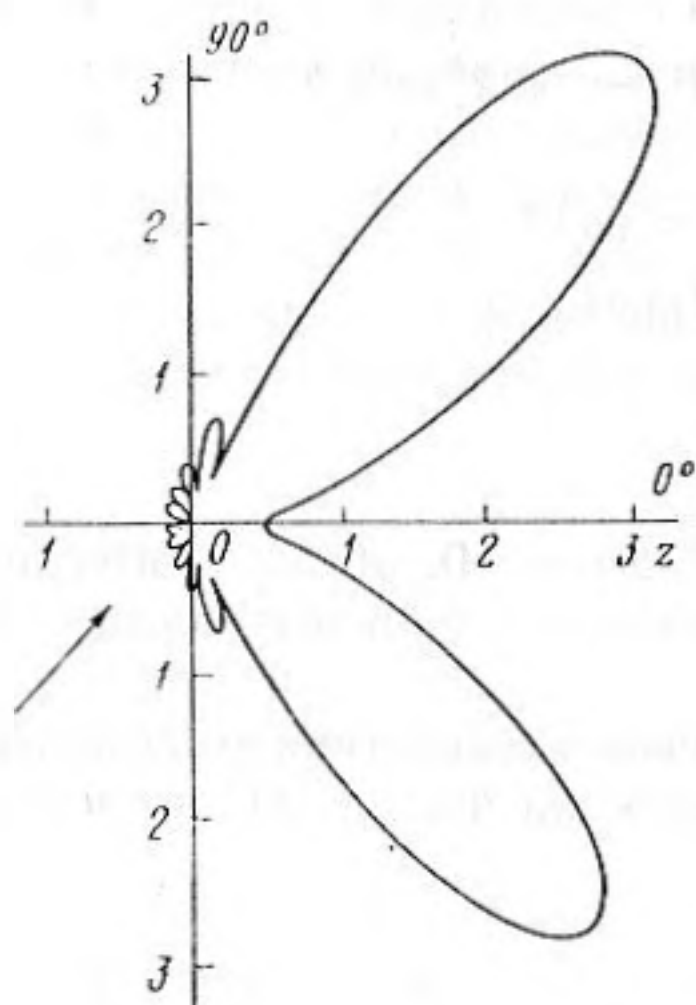


Рис. 1

Рис. 1. Диаграмма рассеянного поля для мягкого сфероида $\xi_0 = 1,0005$, $c = 10$, $\theta_0 = \pi/4$, $\varphi = \varphi_0$, $N = 4$

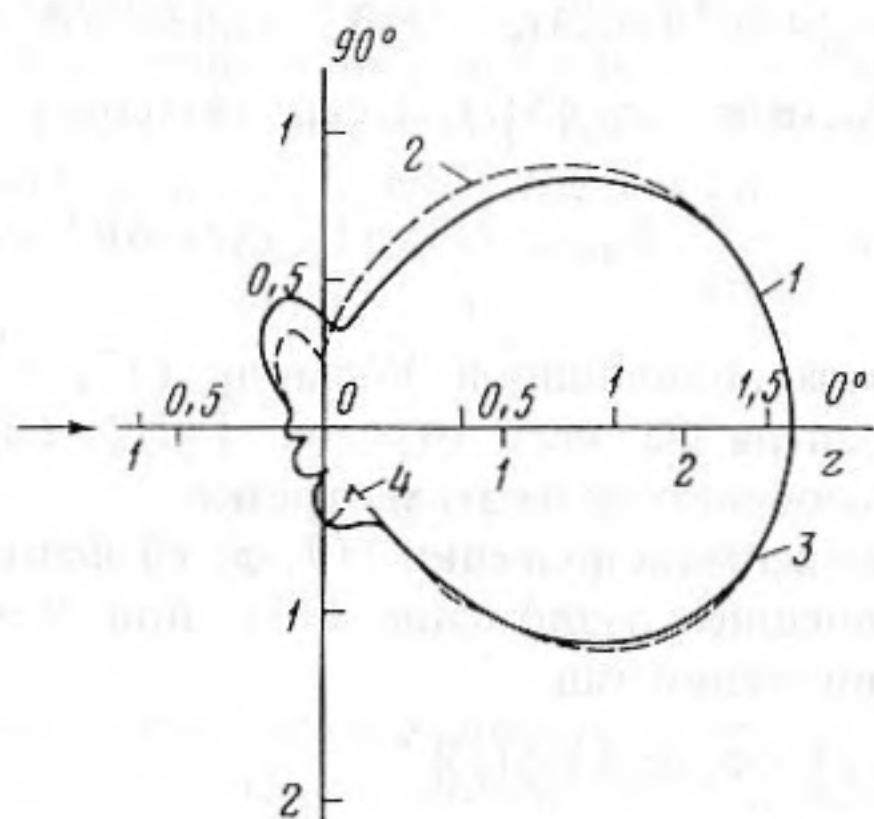


Рис. 2

Рис. 2. Диаграммы рассеянного поля для мягких сфероидов при $\xi_0 = 1,01$, $c = 3$, $\theta_0 = 0$, $N = 5$ (1), точный счет (2), при $\xi_0 = 1,005$, $c = 5$, $\theta_0 = 0$, $N = 5$ (3), точный счет (4)

где

$$G_m(x) = G_{m-1}(x) \ln 4 + \int_{-1}^1 \frac{\exp\{ic\xi_0[|t-x| + (t-x)\cos\theta_0]\} G_{m-1}(t) - G_{m-1}(x)}{|t-x|} dt,$$

$$G_0(x) \equiv 1.$$

На рис. 1 и 2 представлены графики функций $kA_0^{-1}|f(\theta, \varphi; \epsilon)|$, вычисленных по формуле (18) для различных значений параметров θ_0 , ξ_0 , c и N . Стрелки на графиках указывают направление падения плоской волны. Каждой кривой на рис. 2 отвечает свой масштаб, который на осях указывается в той же полуплоскости, где лежит соответствующая этому масштабу кривая. На этих же графиках пунктирной линией обозначена диаграмма рассеяния плоской волны на сфероидах, вычисленная по точным формулам с привлечением сфероидальных функций. На рис. 2 ось z — ось вращения диаграмм направленности.

Расчеты показали весьма хорошее совпадение результатов для точных и приближенных формул в случае тонких сфероидов, когда волновой размер их максимального диаметра мал. Так, например, графики для тонких сфероидов полностью совпадают (рис. 1) с графиками, полученными по точным формулам. Для сфероидов, не являющихся тонкими, возникают расхождения (рис. 2), увеличивающиеся с ростом угла падения θ_0 . При $\theta_0 = \pi/2$ они становятся наибольшими. Для устранения расхождений необходимо учесть большее число членов двойного ряда в формуле (17).

В заключение заметим, что дифракция плоской волны на мягком протяженном теле произвольной формы была рассмотрена в работе [11] в предположении $kl \gg 1$. Там нахождение главного члена асимптотики рассеянного поля было сведено к решению одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго ряда.

Постановка задачи предложена Федорюком М.В. Авторы приносят благодарность Тютюкину В.В. и Эгельскому Б.Л. за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1957. С. 310.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. С. 274.
3. Федорюк М.В. Рассеяние звуковых волн тонким акустически жестким телом вращения//Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 4. С. 605–609.
4. Федорюк М.В. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45. № 1. С. 167–186.
5. Бойко А.И. Рассеяние плоских волн тонким телом вращения//Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 3. С. 321–325.
6. Бойко А.И., Курочкин С.В. Дифракция плоской звуковой волны на оболочке вращения, заполненной акустической средой//Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1989. С. 41.
7. Geer J. The scattering of a scalar wave by a slender body of revolution//SIAM. J. Appl. Math. 1978. V. 34. № 2. P. 348–370.
8. Handelsman R.A., Keller J.B. Axially symmetric potential flow around a slender body//J. Fluid Mech. 1967. V. 28. № 1. P. 131–147.
9. Федорюк М.В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения. Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики//Тр. сем. С.Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1980. № 1. С. 113–131.
10. Жданова Г.В. Задача Дирихле для оператора Гельмгольца во внешности тонкого тела вращения//Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 8. С. 1403–1411.
11. Тэтыхин М.Ю., Федорюк М.В. Рассеяние плоской звуковой волны на протяженном теле произвольной формы//Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 3. С. 811–815.

Акустический институт
им. Н.Н. Андреева
Российской Академии наук

Поступила в редакцию
06.06.91
После исправления
10.02.92

A.I. Boiko, A.L. Dyshko, M.Yu. Tetyukhin

PLANE WAVE SCATTERING BY SLENDER ACOUSTICALLY SOFT
BODY OF REVOLUTION

A scattering problem is solved on the basis of a perturbation technique known as the matching technique in vibration and wave problems. This method entails the representation of the fields in the vicinity of the body by an asymptotic expansion in small parameter which is the ratio of the maximum diameter of the body to its length. This expansion is called the inner expansion. The inner expansion is matched in a certain intermediate zone with the external expansion which is valid everywhere outside the body. The external expansion is an infinity sum of wave potentials of a simple layer localized at the axis of the body and their derivatives in the far field. Diffraction of a plane wave by a prolate spheroid is considered as an example of calculations.