

УДК 534.222.1

© 1992 г. В.А. Буров, М.Н. Рычагов

**ДИФРАКЦИОННАЯ ТОМОГРАФИЯ  
КАК ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЙНИЯ.  
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОДХОД. УЧЕТ МНОГОКРАТНЫХ РАССЕЙНИЙ**

Разработана процедура реконструкции, позволяющая учитывать многократные рассеяния первичного поля на восстанавливаемых неоднородностях. Проведенные аналитические и численные исследования подтверждены экспериментальными результатами.

Разработанные к настоящему времени методы волновой томографии, в частности, приближение однократного рассеяния (приближение Борна) и приближение плавных возмущений (приближение Рытова), имеют существенные ограничения. Удовлетворительная реконструкция при этом достигается лишь в случае слабых неоднородностей, либо в том случае, когда рассеиватели описываются достаточно гладкими функциями.

Если отклонения величины какого-либо параметра (скорости звука, плотности, коэффициента сжимаемости и т.д.) от некоторого среднего уровня оказываются значительными, в алгоритмах реконструкции необходимо учитывать эффекты многократных рассеяний. Учет многократности процесса рассеяния падающей на неоднородность волны делает задачу определения характеристик рассеивателя (например, коэффициента преломления среды) нелинейной по искомому параметру, что вносит дополнительные, весьма существенные трудности в ее решение. Тем не менее, особую актуальность имеют именно такие подходы к решению акустических обратных задач, которые обеспечивают нахождение их точных решений [1, 2].

В [3] был предложен пертурбативный подход к решению квантовомеханических ОЗР, сущность которого состоит в восстановлении потенциала обращением борновского ряда для матрицы рассеяния, оцениваемой на энергетической поверхности. В дальнейшем этот подход продолжал развиваться [4–7]. Однако, возможности его применения в задачах дифракционной томографии существенно ограничены требованием избыточности экспериментальных данных по отношению к количеству степеней свободы искомого потенциала и связанным с ним ограничением на область сходимости. Так, в [4–5] предлагается специальный отбор экспериментальных данных.

В настоящей работе решается обратная задача рассеяния (ОЗР) акустических волн в томографической постановке. Учет многократных рассеяний производится с помощью итерационного решения уравнения Липпмана–Швингера для  $T$ -матрицы. Предусмотрена возможность эффективной обработки данных при наличии их избыточности. Рассматриваются вопросы, связанные с включением интерполяционных процедур в итерационный процесс. Приводятся результаты численного восстановления контрастных рассеивателей с помощью разработанных алгоритмов. Проведенные аналитические и численные исследования подтверждаются экспериментальными результатами.

# 1. Итерационная процедура интерполяционной реконструкции контрастных неоднородностей в пространстве Фурье

Волновое уравнение при гармоническом возмущении среды с постоянной плотностью  $\rho_0$  и изменяющейся скоростью звука  $c = c(\mathbf{r})$  имеет вид [8]

$$\Delta(U(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) - U_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha)) + k_0^2(U(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) - U_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha)) = \omega_0^2 \xi(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha), \quad (1)$$

где  $\mathbf{k}_0^\alpha = k_0 \mathbf{s}_0^\alpha$  — волновой вектор падающего излучения,  $\mathbf{s}_0^\alpha = \mathbf{s}_0(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  — единичный вектор, характеризующий направление распространения падающей волны,  $\omega_0$  — циклическая частота,  $\xi(\mathbf{r})$  — функция описывающая неоднородность скорости звука:

$$\xi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1/c_0^2 - 1/c^2(\mathbf{r}), & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{R} \\ 0, & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{R}^c \end{cases}, \quad (2)$$

$c_0$  — скорость звука в невозмущенной среде,  $\mathcal{R}$  — область локализации неоднородности. Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение рассеяния скалярных волн на неоднородности  $\epsilon(\mathbf{r}) = \omega_0^2 \xi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ , в котором  $U$  — полное поле, а  $U_0$  — первичное падающее поле.

Запишем уравнение рассеяния в интегральной форме:

$$U(\mathbf{z}, \mathbf{k}_0^\alpha) = U_0(\mathbf{z}, \mathbf{k}_0^\alpha) + \int_{\mathcal{R}} g_0(\mathbf{z}, \mathbf{r}) \epsilon(\mathbf{r}) \{U_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) + u(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha)\} d\mathbf{r}, \quad (3)$$

известной как уравнение Липпмана—Швингера [9]. В (3) введены обозначения:  $U_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha)$ ,  $u(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha)$  ( $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ ) — распределения первичного и рассеянного полей на области  $\mathcal{R}$ ;  $U(\mathbf{z}, \mathbf{k}_0^\alpha)$ ,  $U_0(\mathbf{z}, \mathbf{k}_0^\alpha)$  — распределения полного и первичного полей на области приема  $Z$ ;  $g_0(\mathbf{z}, \mathbf{r})$  — функция Грина уравнения (1) для однородного пространства.

Пусть рассеянное поле  $u(\mathbf{z}, \mathbf{k}_0^\alpha) = U(\mathbf{z}, \mathbf{k}_0^\alpha) - U_0(\mathbf{z}, \mathbf{k}_0^\alpha)$  измеряется в некоторой удаленной от  $\mathcal{R}$  области  $Z$ . Асимптотическая аппроксимация  $u(\mathbf{z}, \mathbf{k}_0^\alpha)$  при  $|\mathbf{z}| \rightarrow \infty$  имеет вид

$$u(\mathbf{z}, \mathbf{k}_0^\alpha) = -i(1/8\pi k_0 z)^{1/2} \exp\{-j\pi/4\} \exp\{jk_0 \mathbf{s}^\beta \mathbf{z}\} f(k_0 \mathbf{s}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha), \quad (4)$$

в котором амплитуда рассеяния

$$f(k_0 \mathbf{s}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} \exp\{-jk_0 \mathbf{s}^\beta \mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) d\mathbf{r}, \quad (5)$$

а  $\mathbf{s}^\beta$  — единичный вектор, характеризующий направление приема (рассматривается двумерная задача). Из теории рассеяния известно [10], что ненулевые значения  $f(k_0 \mathbf{s}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha)$  в (5) порождаются излучающими источниками рассеянного поля и могут регистрироваться в эксперименте.

Объединяя (3) и (5), получим

$$f(k_0 \mathbf{s}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}(k_0 \mathbf{s}^\beta - \mathbf{k}_0^\alpha) + \int_{\mathcal{R}} \exp\{-jk_0 \mathbf{s}^\beta \mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) d\mathbf{r}, \quad (6)$$

в котором

$$\tilde{\epsilon}(k_0 \mathbf{s}^\beta - \mathbf{k}_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} \epsilon(\mathbf{r}) \exp\{-j[k_0 \mathbf{s}^\beta - \mathbf{k}_0^\alpha] \mathbf{r}\} d\mathbf{r} \quad (7)$$

— фурье-образ рассеивателя  $\epsilon(\mathbf{r})$  в пространстве волновых векторов  $\mathcal{L}$ :  $\mathbf{l} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ ;  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$ ,  $\mathbf{k}_0 \in \mathcal{K}_0$ , где  $\mathcal{K}$  — пространство волновых векторов, характеризующих рассеянные волны,  $\mathcal{K}_0$  — аналогичное пространство для падающих полей.

Запишем (6) относительно  $\tilde{\epsilon}(k_0 \mathbf{s}^\beta - \mathbf{k}_0^\alpha)$ :

$$\tilde{\epsilon}(k_0 \mathbf{s}^\beta - \mathbf{k}_0^\alpha) = f(k_0 \mathbf{s}^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha) - \int_{\mathcal{R}} \exp\{-jk_0 \mathbf{s}^\beta \mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) d\mathbf{r}. \quad (8)$$

Обратная задача рассеяния в постановке (7)–(8) состоит в определении компонент

пространственного спектра неоднородности  $\tilde{\epsilon}(k_0 s^\beta - k_0 s_0^\alpha)$  на основании экспериментально определенных амплитуд рассеяния  $f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha)$ , зарегистрированных в количестве, достаточном для формирования адекватного конечномерного описания истинного рассеивателя. Приближение Борна

$$\left\| \frac{u(\mathbf{r}, k_0^\alpha)}{U_0(\mathbf{r}, k_0^\alpha)} \right\| \ll 1, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}$$

соответствует пренебрежению вкладом интегрального члена в правой части (8).

Методика интерполяционного решения (8) в борновском приближении рассмотрена в правой части [11]. Здесь будем рассматривать такие неоднородности, которые создают рассеянные поля на  $\mathcal{R}$ , сравнимые по величине с  $U_0(\mathbf{r}, k_0^\alpha)$ , но не превосходящие его (неоднородности средней силы).

Для определения  $u(\mathbf{r}, k_0^\alpha)$  в (8) воспользуемся тем, что уравнение рассеяния (3) может быть аналогичным образом записано для случая, когда точка наблюдения  $\mathbf{r}$  и текущая координата  $\mathbf{r}'$  принадлежат пространству  $\mathcal{R}$ :

$$U(\mathbf{r}, k_0^\alpha) = U_0(\mathbf{r}, k_0^\alpha) + \int_{\mathcal{R}} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}', k_0^\alpha) d\mathbf{r}'. \quad (9)$$

Уравнение (9), с помощью которого будет производиться вычисление  $U(\mathbf{r}, k_0^\alpha)$  – нелинейное уравнение относительно искомой функции. В случае восстановления рассеивателей средней силы одной из форм его решения являются итерационные методы.

Действительно, представим (9) в операторном виде:

$$U = U_0 + \hat{G}_0 \hat{\epsilon} U, \quad (10)$$

где  $\hat{G}_0$  – интегральный гриновский оператор,  $\hat{\epsilon}$  – оператор умножения на функцию  $\epsilon(\mathbf{r})$ . Обозначим через  $U_k$  оценку функции  $U(\mathbf{r}, k_0^\alpha)$ , полученную на  $k$ -ом итерационном шаге решения (10).

Будем рассматривать полные поля на области рассеяния  $U_k$  как элементы пространства  $L_2$ . Тогда, если оператор  $\hat{G}_0 \hat{\epsilon}$  – сжимающий, то есть выполняется условие

$$\| \hat{G}_0 \hat{\epsilon} \|_{L_2} < t, \quad 0 \leq t < 1, \quad (11)$$

то в  $L_2$  существует единственное решение  $U_G$ , такое, что произвольная последовательность вида

$$U_{k+1} = U_0 + \hat{G}_0 \hat{\epsilon} U_k \quad (12)$$

сходится к  $U_G$  при  $k \rightarrow \infty$ , а скорость сходимости итерационного процесса (12) определяется соотношением [12]

$$\| U - U_k \| \leq \frac{t^{k+1}}{1-t} \| U - U_G \|_{L_2}. \quad (13)$$

С математической точки зрения конструирование итерационной процедуры (12) при выполнении условия (11) соответствует разложению уравнения (10) в ряд по итерированным ядрам

$$U = [\hat{E} + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{G}_0 \hat{\epsilon})^{n-1}] U_0; \quad (14)$$

здесь  $\hat{E}$  – единичный оператор на  $\mathcal{R}$ , такой что

$$\hat{E} U_0(\mathbf{r}') = \int_{\mathcal{R}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = U_0(\mathbf{r}). \quad (15)$$

Выражение (14) известно в теории рассеяния как борновский ряд. Физический смысл выражения (14) применительно к рассматриваемой задаче (9) состоит в учете многократных рассеяний падающего поля  $U_0(\mathbf{r})$  на неоднородности средней силы  $\epsilon(\mathbf{r})$ , локализованной в  $\mathcal{R}$ , при условии, что неравенство (11) справедливо [13].

Тогда (9) можно записать в виде

$$u_{j+1}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') \{U_0(\mathbf{r}', \mathbf{k}_0^\alpha) + u_j(\mathbf{r}', \mathbf{k}_0^\alpha)\} d\mathbf{r}'. \quad (16)$$

Дополним итерационную процедуру (16) соответствующим правилом останова:  $\delta_1 = \delta_1(j)$ . Пусть  $\hat{u}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) = u_j(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha)$  — решение (13), удовлетворяющее неравенству

$$\|u_j(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) - u_{j-1}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha)\|_{L_2} \leq \delta_1. \quad (17)$$

Подставляя  $\hat{u}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha)$  в (8), будем иметь

$$\tilde{\epsilon}(k_0 s^\beta - k_0 s_0^\alpha) = f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha) - \int_{\mathcal{R}} \exp\{-jk_0 s^\beta \mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) \hat{u}(\mathbf{r}, k_0 s_0^\alpha) d\mathbf{r}. \quad (18)$$

Вклад интегрального члена в (18) можно рассматривать как поправку к данным, обусловленную учетом многократных рассеяний с помощью (16).

Система уравнений (16)–(18), дополненная начальными условиями  $u_0(\mathbf{r}', k_0 s_0^\alpha) = 0$  и  $\epsilon^{(0)}(\mathbf{r}') = \tilde{\epsilon}^{(0)}(\mathbf{r}') = \hat{F}^{-1}(\epsilon(k_0 s^\beta - k_0 s_0^\alpha))$ , составляет основу следующего итерационного алгоритма реконструкции контрастной рефракционной неоднородности в пространстве Фурье:

$$\tilde{\epsilon}^{(i+1)}(k_0 s^\beta - k_0 s_0^\alpha) = f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha) - \int_{\mathcal{R}} \exp\{-jk_0 s^\beta \mathbf{r}\} \epsilon^{(i)}(\mathbf{r}) \hat{u}(\mathbf{r}, k_0 s_0^\alpha) d\mathbf{r}, \quad (19)$$

$$\hat{u} = u_{j+1}(\mathbf{r}, k_0 s_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \epsilon^{(i)}(\mathbf{r}') \{U_0(\mathbf{r}', k_0 s_0^\alpha) + u_j(\mathbf{r}', k_0 s_0^\alpha)\} d\mathbf{r}'$$

с некоторым условием останова, например,

$$\|\tilde{\epsilon}^{(i+1)}(k_0 s^\beta - k_0 s_0^\alpha) - \tilde{\epsilon}^{(i)}(k_0 s^\beta - k_0 s_0^\alpha)\|_{L_2} \leq \delta_2(i). \quad (20)$$

Уравнение рассеяния (9) можно записать в терминах операторов

$$\mathbf{T}(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha) = \int_{\mathcal{R}} \exp\{-j\mathbf{k}\mathbf{r}\} \epsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, k_0 s_0^\alpha) d\mathbf{r}, \quad (21)$$

переводящих плоскую падающую волну с волновым вектором  $\mathbf{k}_0^\alpha$  в рассеянные волны с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{T}(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 s_0^\alpha) + \int g_0(\mathbf{k}') \mathbf{T}(\mathbf{k}', k_0 s_0^\alpha) \tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad (22)$$

где  $g_0(\mathbf{k}')$  — фурье-образ функции Грина.

Из (19) видно, что интеграл в правой части берется по всем значениям аргумента  $\mathbf{k}'$ , и при использовании этого уравнения для решения прямых и обратных задач рассеяния необходима информация о значениях матричных элементов  $\mathbf{T}$  — оператора для всех значений  $\mathbf{k}$ , а не только для доступных при измерениях в дальней зоне значений на энергетических поверхностях. Поэтому, также как и в (19), оказывается необходимым строить итерационную процедуру решения (8)–(22), основанную на попеременной оценке  $\mathbf{T}(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha)$  и  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - k_0 s_0^\alpha)$  для всех значений  $\mathbf{k}$  и  $k_0 s_0^\alpha$ , либо более сложную процедуру, неявно содержащую такие оценки [14].

Для произвольного параметра  $\alpha$  функция  $\mathbf{T}(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha)$  является образом Фурье вторичных источников  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha) = \epsilon(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0^\alpha)$ . При этом экспериментальному определению в (22) поддаются лишь излучающие компоненты в спектре рассеяния, а именно —  $f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 s^\beta) \mathbf{T}(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha)$ . Имея в виду, что  $\mathbf{T}(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha)$  в (22) определена для любого  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$ , запишем уравнение наблюдений в виде

$$\mathbf{T}(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}(k_0 s^\beta - k_0 s_0^\alpha) + \Delta \mathbf{T}(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha), \quad (23)$$

или относительно  $\tilde{\epsilon}$ :

$$\tilde{\epsilon}(k_0 s^\beta - k_0 s_0^\alpha) = f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha) - \Delta \mathbf{T}(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha), \quad (24)$$

где  $\Delta \mathbf{T}(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 s^\beta) \int g_0(\mathbf{k}') \mathbf{T}(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha) \tilde{\epsilon}(k_0 s^\beta - \mathbf{k}') d\mathbf{k}$ .

Включение интегрального члена в правой части (22) в уравнение наблюдений (24) позволяет при реконструкции пространственного спектра неоднородности оценить вклад неоднородных волн с волновыми векторами  $|\mathbf{k}| > k_0$ , а также возмущений среды неволновой природы ( $|\mathbf{k}| < k_0$ ).

Тогда

$$T_{j+1}(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 s_0^\alpha) + \int g_0(\mathbf{k}') T_j(\mathbf{k}', k_0 s_0^\alpha) \tilde{\epsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (25)$$

Пусть  $\hat{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0^\alpha) = T_j(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0^\alpha)$  — решение (25), а

$$\|T_j(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0^\alpha) - T_{j-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0^\alpha)\|_{L_2} \leq \delta_1(j)$$

— правило останова. Условие сходимости итерационной процедуры (25) тождественно (11). Подставляя  $\hat{T}(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha)$  в (24), получим

$$\tilde{\epsilon}(k_0 s^\beta - k_0 s_0^\alpha) = f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha) - \int g_0(\mathbf{k}') \hat{T}(\mathbf{k}', k_0 s_0^\alpha) \tilde{\epsilon}(k_0 s^\beta - \mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (26)$$

В итоге будем иметь

$$\tilde{\epsilon}^{(i+1)}(\mathbf{k}_0^\beta - \mathbf{k}_0^\alpha) = f(\mathbf{k}_0^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha) - \int g_0(\mathbf{k}') \hat{T}(\mathbf{k}', \mathbf{k}_0^\alpha) \tilde{\epsilon}^{(i)}(\mathbf{k}_0^\beta - \mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad (27)$$

$$T_{j+1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0^\alpha) = \epsilon^{(i)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 s_0^\alpha) + \int g_0(\mathbf{k}') T_j(\mathbf{k}', \mathbf{k}_0^\alpha) \epsilon^{(i)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}'.$$

Итерационный процесс (27) выполняется до тех пор, пока не будет справедливым неравенство (20).

## 2. Включение интерполяционных процедур в итерационный процесс

Фурье-образ  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{l})$  определен во всем пространстве соответствующей размерности (2-х или 3-мерной, в зависимости от физического содержания задачи). Аналитичность  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{l})$  определяемая финитным характером  $\xi(\mathbf{r})$ , позволяет, однако, ограничиться определением  $\tilde{\epsilon}$  на финитной подобласти  $\mathcal{R}$  — пространства размерности  $N$ . Областью определения  $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0^\alpha)$ , доступной в волновом эксперименте, является пространство  $\mathcal{K}^*$ , соответствующее прямому произведению двух подобластей на сферах Эвальда размерности  $N - 1$ ; таким образом,  $\dim \mathcal{K}^* = (N - 1)^2$ . При  $N = 3$  размерность области определения неизвестной функции  $\epsilon(\mathbf{l})$  меньше размерности  $\mathcal{K}^*$ , что приводит к избыточности данных: каждой точке  $\mathbf{l} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$  области определения  $\epsilon(\mathbf{l})$  отвечает континуальное множество возможных данных  $f(\mathbf{k}_0^\beta, \mathbf{k}_0^\alpha)$ . Существование такой избыточности должно учитываться либо на этапе сбора экспериментальных данных, либо в алгоритме их обработки.

В двумерном варианте (27) учет всей совокупности имеющихся данных можно осуществить введением в итерационный процесс интерполяционных процедур согласования сеток дискретизации данных и реконструируемой функции.

Интерполяцию в итерационных алгоритмах (19), (27) приходится выполнять дважды. Первый раз — при решении прямой задачи (ПЗР — интерполяция), второй — при решении ОЗР на основе скорректированных данных. Имеется в виду, что обработка массивов данных должна осуществляться наиболее эффективным образом — с помощью процедуры БПФ, требующей представления функциональных зависимостей в узлах эквидистантной сетки. Поэтому формирование массивов  $\hat{u}(\mathbf{r}, k_0 s_0^\alpha)$  в (19),  $T(\mathbf{k}, k_0 s_0^\alpha)$  в (27), а также интегральных членов в (19) и в (27) производится с использованием указанной дискретизации. В то же время  $f(k_0 s^\beta, k_0 s_0^\alpha)$  и  $\tilde{\epsilon}(k_0 s^\beta - k_0 s_0^\alpha)$  имеют иной характер дискретизации.

Тогда

$$\Delta f(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j)) = \sum_{m', n'} \Delta T(m' \Delta l, n' \Delta l) \tilde{\phi}_{\text{ПЗР}}(l_x(\alpha_i, \beta_j) - m' \Delta l, l_y(\alpha_i, \beta_j) - n' \Delta l),$$

где  $m', n'$  — целые,  $\Delta l$  — интервал дискретизации в пространстве  $\mathcal{L}$ ,  $\alpha_i, \beta_j$  — конфигура-

ционные параметры, характеризующие схему съема данных о рассеянии,  $\tilde{\varphi}_{\text{ПЗР}}$  — интерполяционная функция ПЗР.

С другой стороны,

$$\tilde{\epsilon}(m' \Delta l, n' \Delta l) = \sum_{i,j} \tilde{\epsilon}(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j)) \tilde{\varphi}_{\text{ОЗР}}(m' \Delta l - l_x(\alpha_i, \beta_j), n' \Delta l - l_y(\alpha_i, \beta_j)), \quad (29)$$

в котором  $\tilde{\varphi}_{\text{ОЗР}}$  — интерполяционная функция ОЗР.

Таким образом, (19) и (27) следует в дискретном варианте дополнить интерполяционным оператором ПЗР, действующим на сеточные функции, заданные в узлах декартовой сетки, и интерполяционным оператором ОЗР, преобразующим функцию  $\epsilon(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j))$ , определяемую в узлах круговых сеток, к виду, требующемуся для выполнения БПФ.

В операторной форме итерационно-интерполяционная процедура (27)–(29) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\alpha, \beta} &= f_{\alpha, \beta} - \mathfrak{Z}_{\text{ПЗР}} \mathbf{G}_0 \hat{T}_{m', n'} \tilde{\epsilon}_{m', n'}, \quad k \in \mathcal{L}, \\ \tilde{\epsilon}_{m', n'} &= \mathfrak{Z}_{\text{ОЗР}} \tilde{\epsilon}_{\alpha, \beta}, \quad k \in \mathcal{L}, \\ T_{m', n'} &= \tilde{\epsilon}_{m', n'} + \mathbf{G}_0 T_{m', n'}, \quad k \in \mathcal{K}, \end{aligned} \quad (30)$$

где индексы  $\alpha, \beta$  характеризуют дискретизацию на круговых сетках,  $m', n'$  — на прямоугольных,  $\mathfrak{Z}_{\text{ПЗР}}$  и  $\mathfrak{Z}_{\text{ОЗР}}$  — интерполяционные операторы ПЗР и ОЗР [15].

Разработанная формальная процедура реконструкции неоднородности фазовой скорости звука, основанная на использовании аппарата  $\mathbf{T}$ -матриц, позволяет учесть многократные рассеяния первичного поля на неоднородности средней силы; допускает использование различных интерполяционных процедур, обусловленных разнообразием схем съема данных; дает возможность полностью использовать все имеющиеся данные, в том числе и в случае их избыточности. Алгоритмически методика восстановления (30) является совместимой с существующими способами дифракционной томографии и позволяет расширить область их применимости.

### 3. Модельная интерполяционная реконструкция неоднородностей скорости звука

В вычислительном эксперименте первоначально моделировался тестовый фантом, представляющий собой набор элементарных фигур, внутри каждой из которых задано

распределение показателя преломления  $n(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{r})}$ . Выбором соответствующих значе-

ний  $n(\mathbf{r})$  внутри каждого отдельного элиза, если фантом образован суперпозицией нескольких фигур, и вариацией характерных размеров структурных неоднородностей достигалась требуемая сила рассеивателя. Исходными данными модельной задачи были: интервал пространственной дискретизации  $\delta$  в терминах длины волны  $\lambda$ , количество дискретных отсчетов  $N$  вдоль каждой из осей координат, количество дискретных направлений облучения  $I_\alpha$ , число отсчетов  $J_\beta$  рассеянного поля в проекции или — в случае разложения рассеянного поля по плоским волнам — количество направлений приема  $J_\beta$ , которые также могли варьироваться в широких пределах. Конфигурация области рассеяния и смоделированная схема съема экспериментальных данных идентичны использовавшимся в [11].

Прямая задача рассеяния решалась с учетом многократных рассеяний суммированием членов ряда Борна–Неймана (14) по перерассеяниям для пространственных спектров источников вторичного излучения (25). В результате решения ПЗР для каждо-

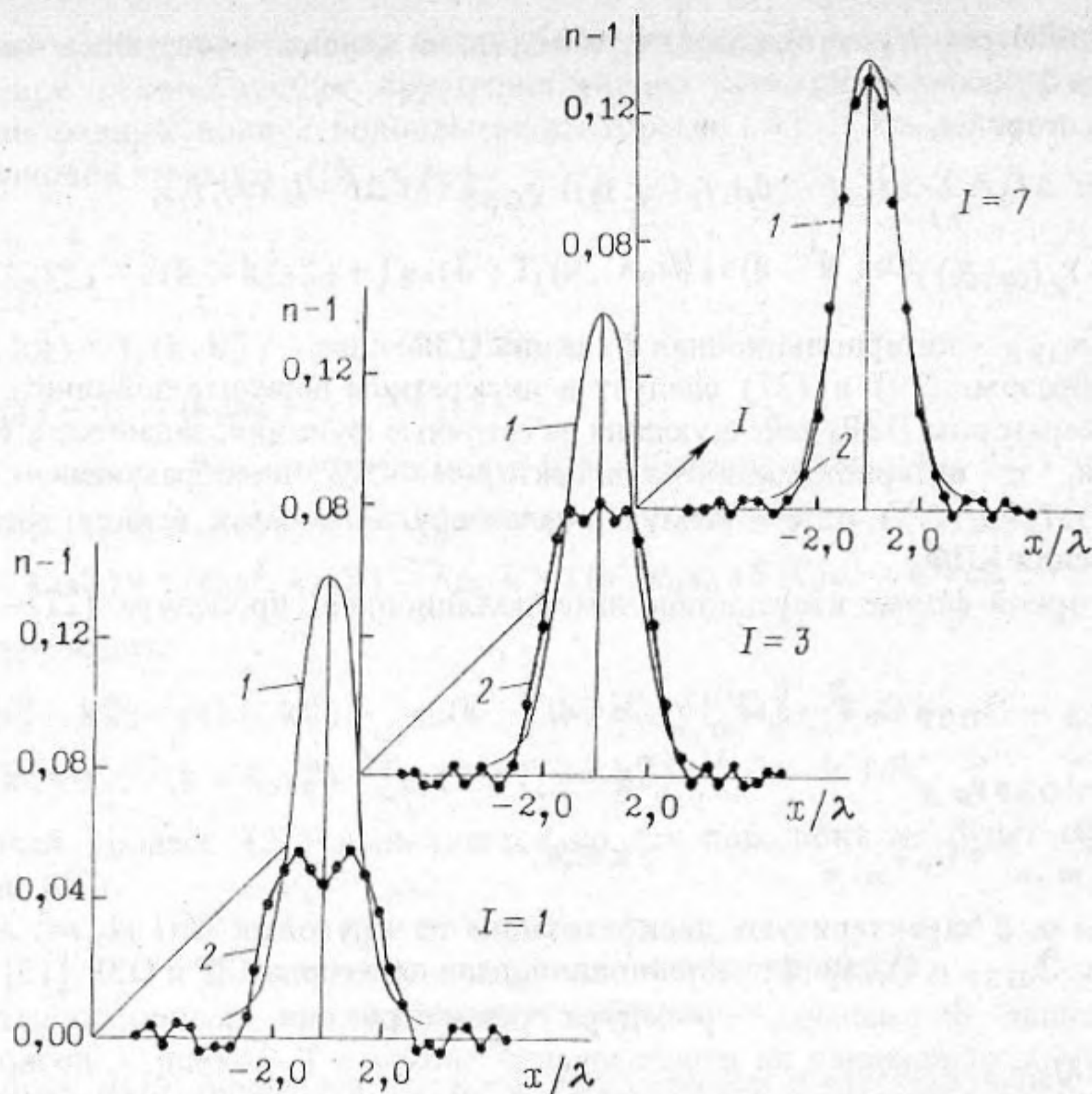


Рис. 1. Восстановление неоднородности гауссовой формы с учетом многократных рассеяний:  $T$ -матричный алгоритм. Параметры реконструкции:  $\tau = 3\lambda$ ,  $n_{\max} \mathcal{R} = 1,14$ ,  $\max |u/U_0| = 0,703$ . 1 – истинное центральное сечение, 2 – восстановленное.

го формировались оценки  $\hat{T}(m'\Delta l, n'\Delta l; \mathbf{k}_0^\alpha)$ . Подстановкой  $\hat{T}$  в (28), получали "экспериментальные" значения

$$f(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j)) = \sum_{m', n'} \hat{T}_{m', n'} \tilde{\varphi}(l_x(\alpha_i, \beta_j) - m'\Delta l, l_y(\alpha_i, \beta_j) - n'\Delta l), \quad (31)$$

которые в дальнейшем использовали в качестве данных.

Первоначально в процессе моделирования с целью сокращения вычислительных затрат использовалось предположение об осесимметричности реконструируемых фантомов. Данная априорная информация позволяет исключить промежуточные расчеты в (30) для всех  $\alpha$ , а ПЗР – интерполяцию (31) производить точно с использованием интерполяционной функции

$$\tilde{\varphi}_{\text{ПЗР}}(\Delta l_x, \Delta l_y) = \frac{\sin[R_0(l_x - \frac{m'\pi}{R_0})]}{R_0(l_x - \frac{m'\pi}{R_0})} \frac{\sin[R_0(l_y - \frac{n'\pi}{R_0})]}{R_0(l_y - \frac{n'\pi}{R_0})}. \quad (32)$$

ОЗР – интерполяция (29) выполняется с использованием интерполяционной функции

$$\tilde{\varphi}_{\text{ОЗР}}(\Delta l_x, \Delta l_y) = R_0^2 \frac{J_1(R_0 \sqrt{(m'\Delta l - l_x)^2 + (n'\Delta l - l_y)^2})}{R_0 \sqrt{(m'\Delta l - l_x)^2 + (n'\Delta l - l_y)^2}}, \quad (33)$$

где  $J_1(R_0(\Delta l_x^2 + \Delta l_y^2)^{1/2})$  – функция Бесселя первого рода первого порядка [16].

Результаты численного моделирования осесимметричных неоднородностей приведены на рис. 1 и рис. 2. Значения  $n_{\max}$  и размеры тестовых фантомов таковы, что сдвиг фаз полного и падающего полей оказывался  $\sim \pi$ . ПЗР для таких неоднородностей требовала выполнения порядка 100 и более итерационных шагов (25). Отношение  $|u(\mathbf{r})/U(\mathbf{r})|$  достигало значения  $\sim 0,8$ , что свидетельствует о достаточной силе модельного рассеивателя. Борновское приближение грубо восстанавливает подобные распределения  $\epsilon(\mathbf{r})$ : точность реконструкции оказывается порядка 50–70%. Восстановление же с помощью итерационного алгоритма (30) обеспечивает приемлемое качество итогового изображения.

На втором этапе вычислительного эксперимента моделировались рассеиватели, которые не обладают симметричностью относительно вращения вокруг вертикальной оси, являющейся осью поворота приемно-излучательной системы. В частности, были использованы неоднородности, которые аппроксимируются суперпозицией нескольких функций гауссовой формы  $\epsilon(x, y) = \epsilon_0 \exp\{-\pi(x^2 + y^2)/\tau^2\}$  при различных значениях  $\epsilon_0$  и  $\tau$  (рис. 3).

Понятно, что ПЗР для таких неоднородностей должна решаться отдельно для каждого  $\alpha$ -го направления излучения, что приводит к резкому возрастанию вычислительных затрат. В частности, исключение цикла по  $\alpha$  (как это было сделано на этапе реконструкции центральносимметрических рассеивателей) оказывается неправомерным, а использование интерполяционной функции (32) затруднительным.

Наиболее подходящей заменой точной двумерной sinc-интерполяции является в данном случае интерполяция на четырехточечном шаблоне

$$f(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j)) = \frac{\sum_{q=1}^4 \hat{T}_{m', n'}^q / d_q}{\sum_{q=1}^4 1/d_q}, \quad (34)$$

где  $\hat{T}^q$  — значения сеточной функции  $\hat{T}(m'\Delta l, n'\Delta l; k_0^\alpha)$  в  $q$ -ой ближайшей к  $(l_x(\alpha_i, \beta_j), l_y(\alpha_i, \beta_j))$  точке,  $d_q$  — соответствующее расстояние до точки интерполяции.

На этапе ОЗР — интерполяции из-за менее строгих требований к  $\mathfrak{F}_{\text{ОЗР}}$ , чем к  $\mathfrak{F}_{\text{ПЗР}}$ , можно также достичь выигрыша в вычислительных затратах: заменой интерполяции (29), (33) более простой техникой, аналогичной (34) в криволинейных координатах. Суть ее заключается в следующем.

Каждый дискретный отсчет декартовой сетки  $(m'\Delta l, n'\Delta l)$  располагается между двумя аксиальными окружностями радиуса  $r_j$  и  $r_{j+1}$ , где  $j$  — порядковый номер направления приема плоской волны, рассеянной неоднородностью, либо интерполируемый отсчет совпадает с одной из окружностей.

С другой стороны, структура томографических данных такова, что через каждую точку, имеющую координаты  $(m'\Delta l, n'\Delta l)$  может проходить лишь одна окружность данных, характеризуемая параметром  $\alpha$ . Тогда, значения  $j$  и  $\alpha$  могут быть вычислены по формулам

$$j_1 \leq j = \frac{n_j \sqrt{1 - (r_j/2k_0)}}{\Delta l} \leq j_1 + 1, \quad (35)$$

$$\alpha_1 \leq \alpha = \text{arctg}\{(\tilde{\gamma}l_y - \beta l_x)/(\tilde{\gamma}l_x - \beta l_y)\} \leq \alpha_1 + \Delta\alpha,$$

где  $r_j = \{(m'\Delta l)^2 + (n'\Delta l)^2\}^{1/2}$ ,  $\beta = j\Delta l$ ,  $\tilde{\gamma} = (k_0^2 - \beta^2)^{1/2} - k_0$ ,  $\Delta\alpha = 2\pi/I_\alpha$ . После того, как найдены значения  $j$  и  $\alpha$ , а значит, и  $j_1$  и  $\alpha_1$ , значения  $\epsilon_{j_1, n'}$  вычисляются по формуле, аналогичной соотношению (34), в котором индексы в правой части заменяются на  $j_1, i_1, j_1 + 1, i_1 + 1$ . Точность реконструкции с интерполяцией ОЗР (34)–(35) ухудшается на 5–10% по сравнению с интерполяционной техникой (29), (33).

Один из вариантов итерационной реконструкции несимметричных рассеивателей с помощью соотношений (28), (30) представлен на рис. 3. Для сравнения на графиках



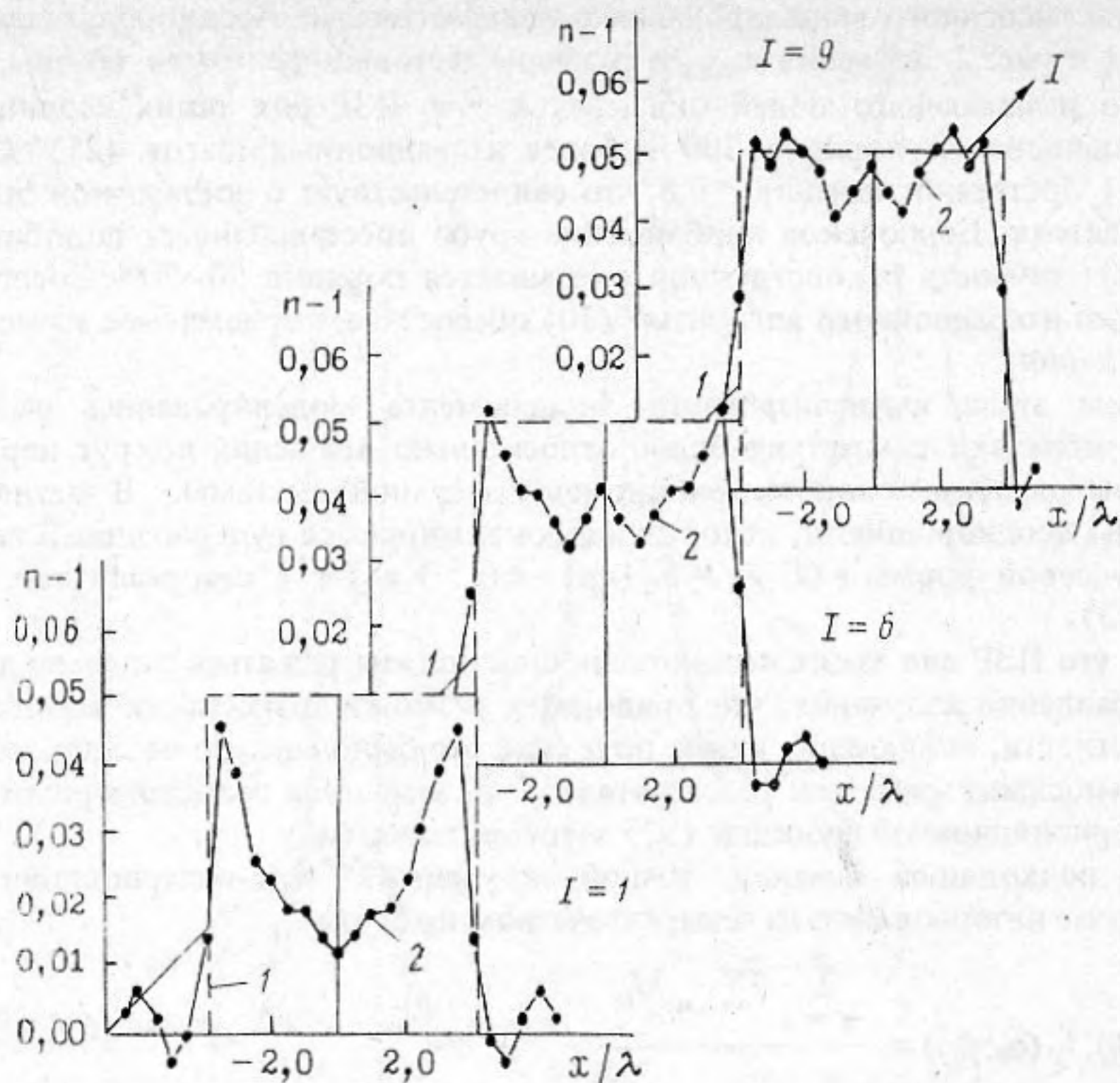


Рис. 2. Восстановление неоднородности цилиндрической формы с учетом многократных рассеяний:  $T$ -матричный алгоритм. Параметры реконструкции:  $R_{\text{ц}} = 4\lambda$ ,  $n_{\text{max}} = 1,05$ ,  $\max |u/U_0| = 0,789$ ,  $M_{\text{пзр}} = 184$ . 1 – истинное центральное сечение, 2 – восстановленное.

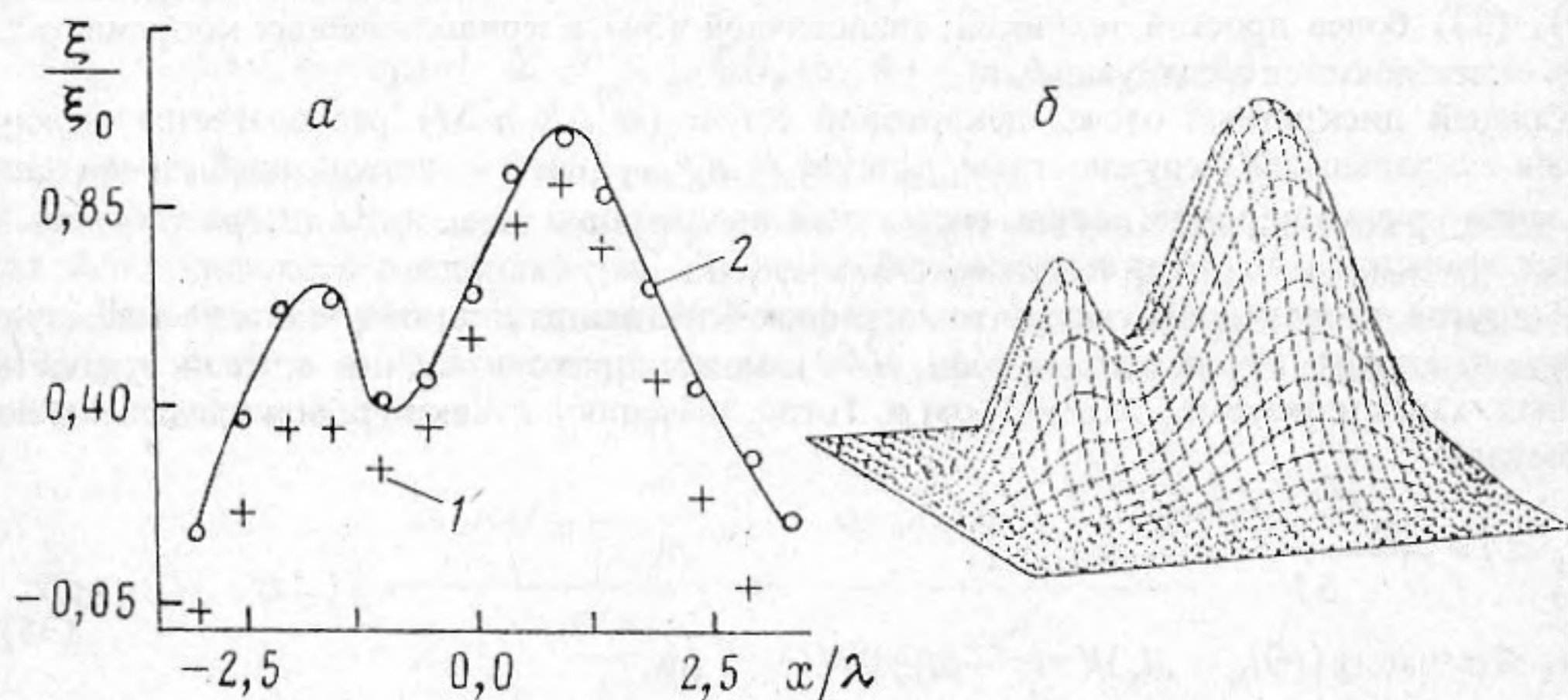


Рис. 3. Восстановление неоднородности, образованной суперпозицией функций гауссовой формы с учетом многократных рассеяний. Параметры реконструкции:  $N = 16$ ,  $I_{\alpha} = 36$ ,  $J_{\beta} = 32$ ,  $\max |u/U_0| = 0,78$ ,  $M_{\text{пзр}} = 40$ . Сплошная линия – истинная функция, 1 – борновская оценка, 2 – реконструированные значения после  $I = 10$ .

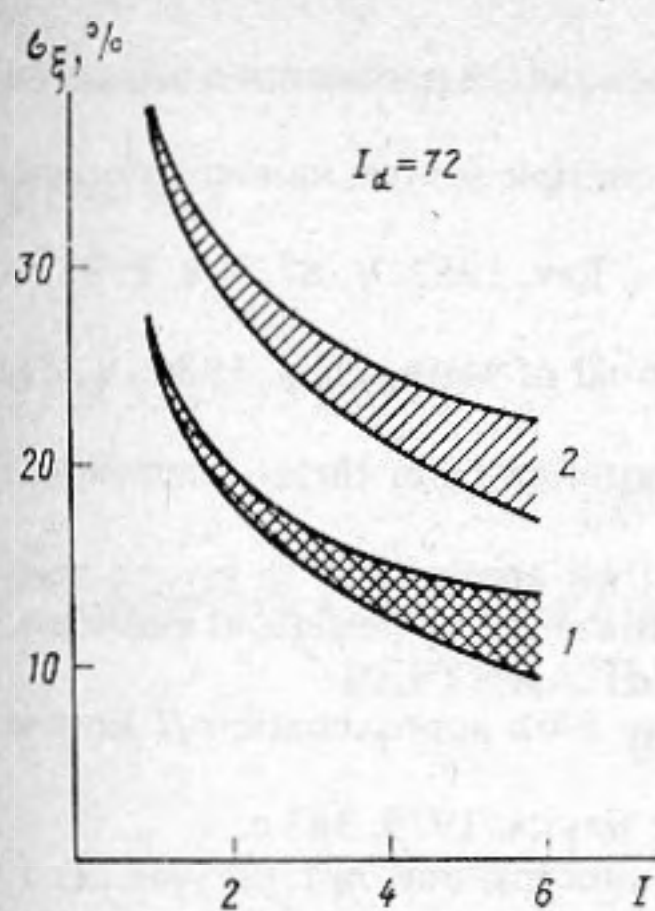


Рис. 4

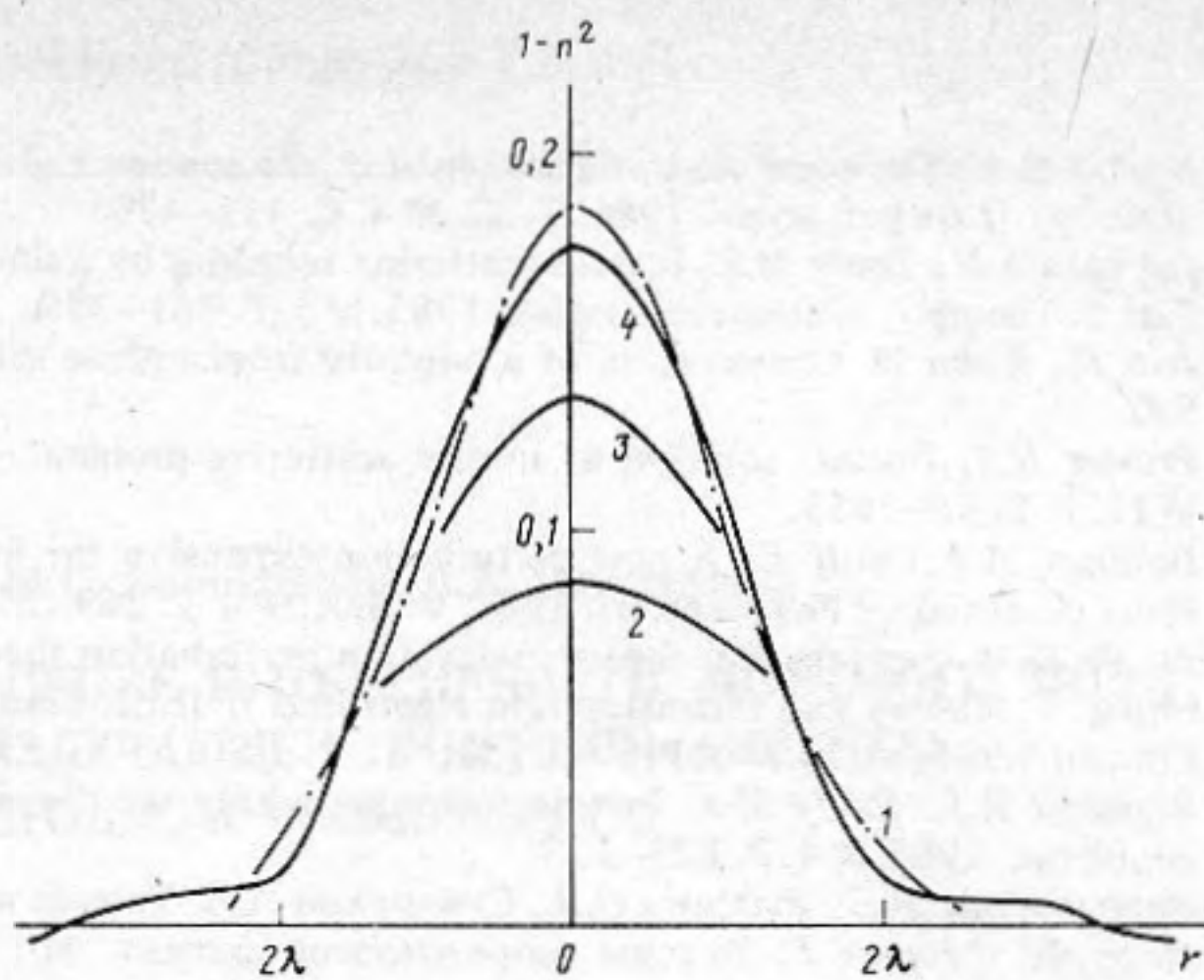


Рис. 5

Рис. 4. Изменение величины относительной среднеквадратической ошибки реконструкции в процессе итераций. 1 —  $M_{\text{пэр}} = 20$ , 2 —  $M_{\text{пэр}} = 40$ .

Рис. 5. Восстановление неоднородности фазовой скорости звука в плоском акустическом волноводе на основании экспериментальных данных [17]

приведены дискретные отсчеты  $\epsilon(r)$ , полученные простой интерполяцией данных без последующей коррекции (30), учитывающей многократные рассеяния.

На рис. 4 продемонстрированы зависимости относительных среднеквадратических ошибок восстановления  $\sigma_{\xi}$  от номера итерационного шага  $j$  в (30). Как видно, применение разработанной итерационно-интерполяционной техники позволяет даже в случае использования приближенных интерполяционных процедур (34)–(35) уменьшить  $\sigma_{\xi}$  примерно в 2 раза. Доверительные интервалы на графиках соответствуют варьированию числа направлений приема рассеянного поля в пределах  $16 \leq j_{\beta} \leq 128$ .

#### 4. Итерационная реконструкция неоднородностей скорости звука на основании экспериментальных данных

Итерационно-интерполяционный алгоритм решения ОЗР (30) был использован для реконструкции неоднородностей фазовой скорости звука в плоском акустическом волноводе. При этом схема сбора экспериментальных данных о рассеянии и их количество не отличались от случая, описанного в [11]. Интерполяционная задача на этапе решения ПЗР производилась точно с помощью интерполяционной функции (32). ОЗР — интерполяция скорректированных данных в узлы эквидистантной сетки в пространстве Фурье на каждом шаге итерационного процесса (30) осуществлялась на основании (35).

На рис. 5 приведены результаты реконструкции рефракционной неоднородности, создаваемой локальным изменением толщины волновода при погружении в волноводный слой жидкости резиновой сферической оболочки, полученные совместно с Е.Я. Тагуновым и А.В. Глазковым [17]. В максимуме изменение скорости звука составляло величину  $\sim 10\%$ . Кривая 1 на рис. 5 отражает реальное изменение скорости звука в волноводе, кривые 2–4 соответствуют результатам реконструкции, полученным на различных шагах итерационного процесса (30). В частности, кривая 2 соответствует случаю борновской реконструкции в рамках модели однократного рассеяния, а сечение 4 получается после выполнения 14 итерационных шагов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буров В.А., Горюнов А.А., Сасковец А.В., Тихонова Т.А. Обратные задачи рассеяния в акустике (Обзор) // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 433–449.
2. Johnson S.F., Tracy M.L. Inverse scattering solutions by a sinc-basis, multiple source, moment method. Part 1. Theory // Ultrasonic Imaging. 1983. № 5. P. 361–375.
3. Jost R., Kohn W. Construction of a potential from a phase shift // Phys. Rev. 1952. V. 87. № 6. P. 977–992.
4. Prosser R.T. Formal solution of inverse scattering problem. 3 // Journal of Math. Phys. 1980. V. 21. № 11. P. 2648–2653.
5. Devaney A.J., Wolf E. A new perturbation expansion for inverse scattering from three-dimensional finite potentials // Phys. Letters. 1982. V. 89A. № 6. P. 269–272.
6. Lu Z. JKM-perturbation theory, relaxation perturbation theory and their applications to inverse scattering. 1. Theory and reconstruction algorithms // IEEE Trans. on. Ultrason., Ferroelectron. and Freq. Control. 1986. V. 33. № 6. P. 722–730.
7. Wombell R.J., Fiddy M.A. Inverse scattering within the distorted-wave Born approximation // Inverse problems. 1988. № 4. P. L23–L27.
8. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
9. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностранной литературы. Т. 1. 1958. 930 с.
10. Ньютон Р. Рассеяние волн и частиц. М.: Мир, 1969. 607 с.
11. Буров В.А., Рычагов М.Н. Дифракционная томография как обратная задача рассеяния. Интерполяционный подход. Линеаризованный вариант // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 4. С. 631.
12. Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986. 304 с.
13. Горюнов А.А. Обратные задачи рассеяния для уравнения Гельмгольца и обратная задача рефракции. Препринт № 8. М.: МГУ, 1984. 5 с.
14. Буров В.А., Рычагов М.Н., Сасковец А.В. Учет многократных рассеяний в задачах дифракционной томографии: T-матричный подход // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3. Физ., Астрон. 1989. Т. 30. № 1. С. 44–48.
15. Рычагов М.Н. Учет многократных рассеяний в акустических обратных задачах томографического типа // Автореф. дис. . . канд. физ.-мат. наук: 28.09.89. М.: МГУ, 1989.
16. Kaveh M. Signal processing for diffraction tomography // IEEE Trans. on. Son. and Ultrason. 1984. V. 31. № 4. P. 330–336.
17. Буров В.А., Глазков А.В., Рычагов М.Н., Тагунов Е.Я. Способ реконструкции акустических неоднородностей в дифракционной фурье-томографии // X Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Винница: 17–21 сентября 1990 г. Изд-во Винница, 1990. С. 16.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию  
01.03.91

V.A. Burov, M.N. Rychagov

### DIFFRACTION TOMOGRAPHY AS INVERSE SCATTERING PROBLEM. INTERPOLATION APPROACH. CONSIDERATION OF MULTIPLE SCATTERING

The paper represents some results of theoretical analysis, numerical modeling and experimental investigation of acoustic tomography problems within the bounds of a more general problem, i.e. the inverse problem of scattering. Suggested approach has allowed to develop efficient algorithms of inhomogeneities reconstruction. These algorithms are based on the models adequate to physical properties of sound waves propagation in the volume under analysis. A tomography setting up of a proper experiment in this case is a way to collect scattering data and to define the efficiency and computer fast-action.

The paper is divided into two intercommunicating parts.

In the first part a linearized inverse scattering problem is solved within the framework of the Born single-scattering approximation. It has allowed to demonstrate the correlation between the developed approach and standard diffraction tomography methods based on interpolation procedures in the Fourier space.

In this (second) part the effects of multiple scattering of acoustic waves by the region in which inhomogeneities are localized, are taken into account. The method is based on an iteration procedure applied to the Lippmann-Schwinger type equation for the *T*-matrix. Special features of data processing in the case of excess experimental data are analyzed. The questions connected with inclusion of interpolation procedures into iteration cycle are discussed. The results of numerical reconstruction of contrast scatterers have been verified by laboratory experiments.