

УДК 551.463.21

© 1992 г. А.Л. Гаврилов, С.З. Дунин, Г.А. Максимов

РАССЕЯНИЕ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ НА ЖЕСТКОЙ И МЯГКОЙ
ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ.
УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ

В работе на основе подхода, использующего представление отраженного от статистически неровной поверхности поля в виде ряда по кратности рассеяния волн на поверхности, получено выражение для углового распределения интенсивности отраженного поля. При этом учет однократно рассеянных волн соответствует приближению Крихгофа, а учет вкладов волн трех первых кратностей рассеяния в случае малости параметра Рэлея приводит к результатам, получаемым по теории возмущений. Область применимости полученного выражения определяется малостью средних наклонов неровностей и возможностью пренебрегать затенениями поверхности при многократных отражениях. Она не связана с величиной параметра Рэлея.

Дистанционное определение характеристик шероховатых поверхностей по параметрам рассеянных акустических или электромагнитных полей является актуальной практической задачей. Наиболее доступной для экспериментального измерения величиной является угловое распределение интенсивности рассеянного поля (коэффициент рассеяния). Детальное теоретическое исследование зависимости коэффициента рассеяния от параметров шероховатости проведено для двух предельных случаев [1, 2]: когда мал параметр Рэлея и применим метод малых возмущений (ММВ) $K\sigma\cos\vartheta \ll 1$, либо когда применим метод касательной плоскости (МКП) (приближение Кирхгофа) $KR\sin\chi \gg 1$, где $K = \omega/c$ — волновое число падающей волны, σ и R — характерная высота и радиус кривизны шероховатой поверхности, ϑ и χ — угол падения и локальный угол скольжения соответственно.

На практике часто приходится иметь дело с ситуацией, когда присутствуют неровности разных масштабов. В этом случае требуется более общая теория, которая учитывала бы этот факт. Одним из известных подходов к построению такой теории является двухмасштабная модель [1, 2], в рамках которой статистические свойства мелко- и крупномасштабной компонент неровностей рассматриваются независимо. Несмотря на качественное согласие ряда результатов, получаемых в рамках двухмасштабной модели с экспериментальными, открытым остается вопрос о границах ее применимости, а также вопрос о возможности учитывать реальный спектр неровностей поверхности.

В работе [3] в приближении малости наклонов (ПМН) поверхности предложен другой подход к построению теории, справедливой при наличии разномасштабных неровностей и правильно описывающей пределы ММВ и МКП. В основе этого подхода лежит представление амплитуды рассеяния в виде, в котором явно выделен фактор, отражающий ее трансформационные свойства, а оставшаяся часть ищется в виде интегростепенного ряда по наклонам поверхности. Коэффициенты разложения находятся из сравнения с результатом, получаемым с помощью ММВ в области его применимости.

Еще одним подходом, предложенным в работах [4, 5] и нашедшим дальнейшее развитие в [6–9], является метод фазового оператора (МФО) или фазовая теория возмущений. В этом подходе предполагается искать в виде разложения по высотам

неровностей не саму амплитуду рассеяния (как в ММВ), а фазу, после представления амплитуды рассеяния в виде стандартном для унитарного оператора. При этом коэффициенты разложения опять-таки находятся из сравнения с пределом ММВ.

В работах [7-9] приводится сравнение коэффициентов рассеяния, получаемых в рамках ММВ, МКП, и МФО, с усредненными по большому количеству реализаций точному численному решению дифракционной задачи для неровной поверхности. При этом показано, что при малых наклонах неровностей и значениях параметра Рэлея, не превосходящих двух единиц, МФО дает наиболее адекватное описание особенностей углового поведения коэффициента рассеяния в сравнении с ММВ и МКП.

Несмотря на то, что в рамках упомянутых выше подходов ПМН и МФО удается удовлетворительно описать поведение коэффициента рассеяния в случае применимости ММВ и МКП, оба эти подхода в определенной степени являются феноменологическими, поскольку требуют для своей реализации результатов ММВ. А для МФО, кроме того, остаются не выясненными границы применимости. Поэтому продолжает оставаться актуальным вопрос о построении последовательной теории, позволяющей дать единое описание второго момента рассеянного на неровной поверхности поля.

В настоящей работе на основе последовательного подхода, развитого в работах [10, 11], получено выражение для коэффициента рассеяния при отражении скалярного поля от шероховатой поверхности с условием Дирихле и Неймана на границе.

Пусть на шероховатую поверхность, задаваемую в системе координат $\{r, z\}$ уравнением $z = \eta(r)$, где $\eta(r)$ — случайная функция с нулевым средним по ансамблю реализаций $\langle \eta(r) \rangle = 0$, падает плоская волна с волновым вектором $K = \{k_0, \nu_0\}$. Тогда вдали от рассеивающей поверхности $z \gg \sigma$, $z \gg \sigma^2 \nu_0$ [10] рассеянное поле представляется в виде суммы уходящих плоских волн:

$$U_S(r, z) = \int d\mathbf{k} A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}r + i\nu z}, \quad (1)$$

$$\nu = (K^2 - k^2)^{1/2}, \quad K > k; \quad \nu = i(k^2 - K^2)^{1/2}, \quad K < k,$$

где $A(\mathbf{k})$ — амплитуда рассеяния, которая выражается через значение поля $U(r)$ или его нормальной к поверхности производной $V(r)$ на границе для жесткой и мягкой поверхностей соответственно [10]:

$$A(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dr' U(r') e^{-i\mathbf{k}r' - i\nu\eta(r')} \left(1 - \frac{\mathbf{k}}{\nu} \nabla \eta(r') \right),$$

$$A(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2\nu} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dr' V(r') e^{-i\mathbf{k}r' - i\nu\eta(r')}. \quad (2)$$

Величины $V(r)$ и $U(r)$ удовлетворяют уравнению Фредгольма второго рода [10]:

$$V(r) = V_0(r) + L(r, r') * V(r'), \quad (3)$$

где

$$V_0(r) = -2i(\nu_0 + \mathbf{k}_0 \nabla \eta(r)) e^{i\mathbf{k}_0 r - i\nu_0 \eta(r)},$$

$$U_0(r) = 2e^{i\mathbf{k}_0 r - i\nu_0 \eta(r)},$$

$$L(r, r') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \int dr' e^{i\mathbf{k}(r-r') + i\nu|\eta(r) - \eta(r')|} \times$$

$$\times (\text{sgn}(\eta(r) - \eta(r')) - \frac{\mathbf{k}}{\nu} \nabla \eta(r)). \quad (3a)$$

Оператор $L(r, r')$ в уравнении для $U(r)$ отличается от (3a) только заменой $\nabla \eta(r)$ на $\nabla \eta(r')$ в последнем слагаемом.

В основе подхода лежит представление отраженного поля в виде ряда по кратности его рассеяния на поверхности, которое получается итерированием уравнения (3).

Как показано в [10], при выполнении условий

$$\operatorname{tg} \vartheta_0, \operatorname{tg} \vartheta \ll a^2 / \sigma^2, \quad \sigma / a \ll 1, \quad K \sigma^2 / a \ll 1. \quad (4)$$

(a — корреляционный радиус, ϑ_0 и ϑ — углы падения и отражения), которые означают соответственно отсутствие затенений падающей и отраженной волн, малость средних углов наклонов неровностей и возможность пренебрегать взаимным затенением точек поверхности при многократных перерассеяниях, итерационная процедура является корректной. При этом учет одно-, двух-, и трехкратно рассеянных на поверхности волн дает точность, квадратичную по этим параметрам.

Интенсивность рассеянного поля определяется выражением $\langle |U_S(\mathbf{r}, z)|^2 \rangle$, где угловые скобки означают усреднение по случайным реализациям поверхности (предполагается гауссовская статистика реализаций). Учитывая однородность поверхности, в среднем нетрудно получить:

$$\langle |U_S(\mathbf{r}, z)|^2 \rangle = (2\pi)^2 \int d\mathbf{k} \langle |A(\mathbf{k})|^2 \rangle, \quad (5)$$

где введено обозначение

$$\langle A(\mathbf{k}) A^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle |A(\mathbf{k})|^2 \rangle.$$

Угловое распределение интенсивности рассеянного поля (коэффициент рассеяния) $m_S(\mathbf{k})$ определяется выражением [2]

$$\langle |U_S(\mathbf{r}, z)|^2 \rangle = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi m_S(\vartheta, \varphi) \operatorname{tg} \vartheta. \quad (6)$$

При выполнении условий $z \gg \sigma$, $z \gg K\sigma^2$ в интеграле (5) достаточно учитывать вклад волн с действительным волновым числом ($k < K$); тогда, переходя к интегрированию по угловым переменным $d\mathbf{k} = K^2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi$, и сравнивая (5) и (6), нетрудно видеть, что коэффициент рассеяния определяется выражением

$$m_S(\mathbf{k}) = (2\pi)^2 \nu^2 \langle |A(\mathbf{k})|^2 \rangle. \quad (7)$$

Выражение для амплитуды рассеяния $A(\mathbf{k})$ получается из (2) при подстановке туда решения уравнения (3) в виде итерационного ряда. При этом полная амплитуда рассеяния $A(\mathbf{k})$ представляется в виде суммы парциальных амплитуд $A_{i-1}(\mathbf{k})$, содержащих вклад i -кратно рассеянных на поверхности волн:

$$A(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{\infty} A_{i-1}(\mathbf{k}). \quad (8)$$

Как показано в [10], учет трех первых членов ряда (8) обеспечивает вычисление амплитуды рассеяния с точностью, квадратичной по совокупности параметров (4). При этом выполнение условий (4) позволяет провести в интегральном операторе $L(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ разложение экспоненты, содержащей модуль, поскольку имеет место оценка [10, 11] $\nu |\eta(\mathbf{r}) - \eta(\mathbf{r}')| \ll K\sigma^2 / a \ll 1$. Выражения для парциальных амплитуд рассеяния одно-, двух- и трехкратно рассеянных на мягкой поверхности волн с точностью до величин, квадратичных по совокупности параметров (4), имеют вид

$$A_0(\mathbf{k}) = - \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{r}_0 - i(\nu + \nu_0)\eta(\mathbf{r}_0)} \times \\ \times \left(\frac{\nu_0}{\nu} + \frac{\mathbf{k}_0}{\nu} \nabla \eta(\mathbf{r}_0) \right), \quad (9a)$$

$$A_1(\mathbf{k}) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{r}_0 \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{k}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})\mathbf{r}_0 + i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}_1} e^{-i\nu\eta(\mathbf{r}_0)} \times \\ \times e^{-i\nu_0\eta(\mathbf{r}_1)} \left\{ \frac{\nu_0}{\nu} i\nu_1(\eta(\mathbf{r}_0) - \eta(\mathbf{r}_1)) - \frac{\nu_0}{\nu} \frac{\mathbf{k}_1}{\nu_1} \nabla \eta(\mathbf{r}_0) + \right.$$

$$+ i \frac{\nu_1}{\nu} (\eta(\mathbf{r}_0) - \eta(\mathbf{r}_1)) \mathbf{k}_0 \nabla \eta(\mathbf{r}_0) - \frac{\mathbf{k}_0 \nabla \eta(\mathbf{r}_1)}{\nu} \frac{\mathbf{k}_0 \nabla \eta(\mathbf{r}_0)}{\nu_0} \quad (96)$$

$$- \frac{\nu_0}{\nu} \frac{\nu_1^2}{2} (\eta(\mathbf{r}_0) - \eta(\mathbf{r}_1)) |\eta(\mathbf{r}_0) - \eta(\mathbf{r}_1)| - i \frac{\nu_0}{\nu} \mathbf{k}_1 \nabla \eta(\mathbf{r}_0) |\eta(\mathbf{r}_0) - \eta(\mathbf{r}_1)| \quad (9B)$$

$$A_2(\mathbf{k}) = - \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{r}_0 \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})\mathbf{r}_0 + i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}_1} \times$$

$$\times e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}_2} e^{-i\nu\eta(\mathbf{r}_0) - i\nu_0\eta(\mathbf{r}_2)} \frac{\nu_0}{\nu} \left\{ -\nu_1\nu_2(\eta(\mathbf{r}_0) - \eta(\mathbf{r}_1)) \times \right.$$

$$\times (\eta(\mathbf{r}_1) - \eta(\mathbf{r}_2)) - i \frac{\nu_1}{\nu_2} (\eta(\mathbf{r}_0) - \eta(\mathbf{r}_1)) \mathbf{k}_2 \nabla \eta(\mathbf{r}_1) -$$

$$\left. - i \frac{\nu_2}{\nu_1} (\eta(\mathbf{r}_1) - \eta(\mathbf{r}_2)) \mathbf{k}_1 \nabla \eta(\mathbf{r}_0) + \frac{\mathbf{k}_1 \nabla \eta(\mathbf{r}_0)}{\nu_1} \frac{\mathbf{k}_2 \nabla \eta(\mathbf{r}_1)}{\nu_2} \right\}.$$

При отражении от жесткой поверхности соответствующие выражения для амплитуд рассеяния имеют другой знак, а предэкспоненциальные выражения отличаются заменой \mathbf{k}_0 на $-\mathbf{k}$ ($\nu_0 = \nu$). Кроме того, в выражении (96) для однократно рассеянных волн нужно поменять местами $\nabla\eta(\mathbf{r}_0)$ и $\nabla\eta(\mathbf{r}_1)$, а в выражении (9B) необходимо сделать замену $\nabla\eta(\mathbf{r}_i)$ на $\nabla\eta(\mathbf{r}_{i+1})$.

При вычислении величины $\langle |A(\mathbf{k})|^2 \rangle$ корректным является удержание членов с той же точностью, с которой вычислена сама величина $A(\mathbf{k})$. Поэтому с точностью, квадратичной по совокупности параметров (4), величина $\langle |A|^2 \rangle$ представляется в виде

$$\langle |A|^2 \rangle = \langle A_0 A_0^* \rangle + \langle A_1 A_1^* \rangle + 2\text{Re} \langle A_0 A_1^* \rangle + 2\text{Re} \langle A_0 A_2^* \rangle. \quad (10)$$

При этом учтено, что парциальные амплитуды $A_{i-1}(\mathbf{k})$, $i = 1 \div 3$ содержат слагаемые следующей малости по совокупности параметров (4): A_0 — нулевого и первого порядков, A_1 — первого и второго порядков, A_2 — только второго порядка.

В случае гауссовского процесса случайных реализаций поверхности все входящие в (10) величины могут быть вычислены точно, в том числе и вклады от неаналитических слагаемых в $\langle A_0 A_1^* \rangle$. Получающиеся в результате выражения являются достаточно громоздкими, поэтому ниже соответствующие выражения для мягкой поверхности приводятся с учетом только квадратичных по σ слагаемых, стоящих в предэкспоненте. Возможность пренебрегать слагаемыми более высокого порядка по σ в предэкспоненте будет обсуждена ниже (выражение для $\langle A_0 A_1^* \rangle$ приводится полностью):

$$\langle A_0 A_0^* \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\rho} \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \left(1 + i \frac{\mathbf{k}_0 \nabla}{\nu_0(\nu + \nu_0)} \right)^2 \times$$

$$\times \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 [1 - W(\rho)] \} \quad (11a)$$

$$\langle A_1 A_1^* \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\rho_1 \int d\rho_2 \int d\rho_3 \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\rho_1 + i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\rho_2} \times$$

$$\times e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_0)\rho_3} (-\sigma^2) \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \left\{ \nu_1\nu_2(W_{12} - W_{02} + W_{03} - W_{13}) - \right.$$

$$\left. - i \frac{\nu_2}{\nu_1} \mathbf{k}_1 \nabla_0 (W_{03} - W_{02}) + i \frac{\nu_1}{\nu_2} \mathbf{k}_2 \nabla_2 (W_{12} - W_{02}) - \frac{(\mathbf{k}_1 \nabla_0)(\mathbf{k}_2 \nabla_1)}{\nu_1\nu_2} W_{02} \right\} \times$$

$$\times \exp \{ -\sigma^2 (\nu^2 [1 - W_{02}] + \nu_0^2 [1 - W_{13}] + \nu\nu_0 [W_{01} - W_{03} + W_{23} - W_{12}]) \};$$

$$\langle A_0 A_1^* \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\rho_1 \int d\rho_2 \int d\mathbf{k}_1 e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\rho_1 + i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\rho_2} (-\sigma^2) \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 \times$$

$$\times \left\{ -\nu_1((\nu - \nu_0)[1 - W_{01}] + (\nu + \nu_0)[W_{12} - W_{02}]) + i \frac{\nu_1}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \nabla_1 W_{10} + \right.$$

$$+ i \frac{\mathbf{k}_1}{\nu_1} \nabla_0 (\nu_0 W_{01} - (\nu + \nu_0) W_{02}) - i \frac{\nu_1}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \nabla_2 (W_{12} - W_{02}) +$$

$$\left. + \frac{(\mathbf{k}_0 \nabla_1)(\mathbf{k}_1 \nabla_1)}{\nu_0 \nu_1} W_{01} + \frac{(\mathbf{k}_0 \nabla_2)(\mathbf{k}_1 \nabla_0)}{\nu_0 \nu_1} W_{02} \right\} \times \quad (11b)$$

$$\times \exp \{ -\sigma^2 (\nu^2 [1 - W_{02}] + \nu_0^2 [1 - W_{12}] + \nu \nu_0 [1 - W_{02} + W_{01} - W_{12}]) \};$$

$$\langle A_0 A_2^* \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\rho_1 \int d\rho_2 \int d\rho_3 \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\rho_1 + i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)\rho_2} \times$$

$$\times e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\rho_3} (\sigma^2) \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 \left\{ \nu_1 \nu_2 (1 - W_{01} + W_{02} - W_{12}) + \right.$$

$$\left. + i \frac{\nu_2}{\nu_1} \mathbf{k}_1 \nabla_0 (W_{01} - W_{02}) + i \frac{\nu_1}{\nu_2} \mathbf{k}_2 \nabla_1 W_{01} + \frac{(\mathbf{k}_1 \nabla_0)(\mathbf{k}_2 \nabla_1)}{\nu_1 \nu_2} W_{01} \right\} \times \quad (11g)$$

$$\times \exp \{ -\sigma^2 (\nu^2 [1 - W_{03}] + \nu_0^2 [1 - W_{23}] + \nu \nu_0 [1 - W_{03} + W_{02} - W_{23}]) \}.$$

При записи выражений (11б)–(11г) введены следующие обозначения: $\rho_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$, $\rho_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\rho_3 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$, $W_{ij} = W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, $\nabla_i = \partial/\partial \mathbf{r}_i$.

Соответствующие выражения в случае жесткой поверхности отличаются от (11а)–(11г) следующим образом: во всех выражениях нужно опустить множитель $(\nu_0/\nu)^2$ и заменить \mathbf{k}_0 на $-\mathbf{k}$ ($\nu_0 = \nu$) и наоборот; кроме того, в выражении (11б) необходимо поменять местами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , W_{02} и W_{13} , а также заменить ∇_0 на ∇_3 и ∇_2 на ∇_1 ; в выражении (11в) нужно поменять местами W_{02} и W_{12} , ∇_0 и ∇_1 ; в выражении (11г) нужно поменять местами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , W_{01} и W_{12} , а также заменить ∇_0 на $-\nabla_2$.

Наличие многократных интегралов в выражениях (11б)–(11г) делает их малоприменимыми для непосредственного использования. Поэтому необходимо их дальнейшее упрощение, что связано с некоторыми приближениями.

При анализе первого момента рассеянного поля в [10] было показано, что при выполнении условий (4) основной вклад в среднее поле от многократно рассеянных на поверхности волн дают те из них, которые испытали повторные отражения в окрестности точки их первого рассеяния $\rho/a \leq K\sigma^2$ (в частности, поэтому при условиях (4) имеется возможность пренебрегать взаимным затемнением точек поверхности при многократном рассеянии). В этом смысле можно говорить о квазиоднократном рассеянии, подразумевая, что многократные переотражения происходят практически в одной точке. Исходя из этого можно попытаться представить выражения (11б)–(11г) в форме, которая соответствует выражению (11а), полученному для однократно рассеянных волн.

Рассматривая интегралы по \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 в выражениях (11б)–(11г), можно видеть, что зависящие от этих переменных предэкспоненциальные множители являются медленно меняющимися функциями по сравнению с экспонентами вида $\exp\{i\mathbf{k}_1 \rho_1\}$ и $\exp\{i\mathbf{k}_2 \rho_2\}$ (наличие у некоторых слагаемых корневых особенностей легко устраняется интегрированием по частям). Поэтому при вычислении интегралов по ρ_1 и ρ_2 основной вклад будут давать малые значения $\rho_1 \approx \rho_2 \approx 0$. Последнее позволяет пренебрегать зависимостью от этих переменных корреляционных функций, стоящих в показателе экспоненты. Приведем дополнительные соображения на этот счет. При малых значениях $\sigma^2(\nu + \nu_0)^2 \ll 1$ последнюю экспоненту в подынтегральных выражениях (11б)–(11г) приближенно можно считать равной единице, так что зависимость ее показателя от переменных ρ_1 и ρ_2 несущественна. В другом предельном случае $Ka \gg 1$ и $\sigma/a \ll 1$, который рассмотрен

в [12], оценка интегралов по ρ_1 и ρ_2 методом перевала приводит к необходимости учитывать только вклад от окрестности точек $\rho_1 \approx \rho_2 \approx 0$. Поэтому при произвольных значениях параметра Ka зависимостью корреляционных функций от переменных ρ_1 и ρ_2 следует пренебрегать только в экспоненте, не затрагивая предэкспоненциальных множителей. После указанных упрощений выражения (11а)–(11г) могут быть записаны в следующем виде:

$$\langle A_0 A_0^* \rangle = \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\rho} \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 [1 - W(\rho)] \} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int dq e^{-iq\rho} W(\mathbf{q}) \left[-2 \frac{\nu + \nu_0}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \mathbf{q} + \frac{(\mathbf{k}_0 \mathbf{q})^2}{\nu_0^2} \right] \right\}; \quad (12a)$$

$$\langle A_1 A_1^* \rangle = \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\rho} \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 [1 - W(\rho)] \} \times \\ \times \frac{(-\sigma^2)}{(2\pi)^2} \int dq e^{-iq\rho} W(\mathbf{q}) [(\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \nu) (\nu_{\mathbf{k}_0+\mathbf{q}} - \nu_0) + \frac{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \nu}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \mathbf{q} + \\ + \frac{\nu_{\mathbf{k}_0+\mathbf{q}} - \nu_0}{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \mathbf{k}_0 \mathbf{q} - \frac{(\mathbf{k}_0 \mathbf{q})(\mathbf{q}(\mathbf{k}-\mathbf{q}))}{\nu_0 \nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}]]; \quad (12б)$$

$$\langle A_0 A_1^* \rangle = \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\rho} \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 [1 - W(\rho)] \} \times \\ \times \left\{ \sigma^2 \nu (\nu - \nu_0) - \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int dq W(\mathbf{q}) \left[\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} (\nu - \nu_0) + \frac{\nu_0}{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \mathbf{q} (\mathbf{k} - \mathbf{q}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \mathbf{q} + \frac{(\mathbf{k}_0 \mathbf{q})(\mathbf{q}(\mathbf{k}-\mathbf{q}))}{\nu_0 \nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \right] + \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int dq e^{-iq\rho} W(\mathbf{q}) \times \right. \\ \times \left. [(\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \nu) (\nu_0 + \nu) - \frac{\nu_0 + \nu}{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \mathbf{q} (\mathbf{k} - \mathbf{q}) - \frac{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \nu}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \mathbf{q} + \right. \\ \left. \left. + \frac{(\mathbf{k}_0 \mathbf{q})(\mathbf{q}(\mathbf{k}-\mathbf{q}))}{\nu_0 \nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \right] \right\}; \quad (12в)$$

$$\langle A_0 A_2^* \rangle = \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\rho} \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 [1 - \\ - W(\rho)] \} \left\{ \sigma^2 \nu^2 + \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int dq W(\mathbf{q}) [\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 - 2\nu \nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \mathbf{q}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) - \right. \\ \left. - \frac{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{\nu} \mathbf{k} \mathbf{q} + \frac{\nu}{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \mathbf{q}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) + \frac{(\mathbf{k} \mathbf{q})(\mathbf{q}(\mathbf{k}-\mathbf{q}))}{\nu \nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \right] \right\}, \quad (12г)$$

где $W(\mathbf{q}) = \int d\rho e^{i\mathbf{q}\rho} W(\rho)$ – фурье-спектр корреляционной функции, и введено обозначение $\nu_{\mathbf{q}} = (K^2 - \mathbf{q}^2)^{1/2}$. Выражение (12а) для однократно рассеянных волн записано в единообразном с другими слагаемыми виде, при этом в предэкспоненте учтены члены до второго порядка малости по σ включительно.

В случае жесткой поверхности в выражениях (12а)–(12г) будет отсутствовать множитель $(\nu_0/\nu)^2$, необходимо также сделать замену \mathbf{k} на \mathbf{k}_0 и, наоборот, и поменять общий знак в выражении (12в) для $\langle A_0 A_1^* \rangle$.

Нетрудно видеть, что все полученные выражения (12а)–(12г) имеют единую структуру, характерную для приближения Кирхгофа, и вполне пригодны для аналитических и численных оценок.

В выражениях (12а)–(12г) удобно выделить часть, соответствующую большим значениям переменной интегрирования ρ и содержащую вклад интенсивности зеркально отраженной волны. Для этого в выражениях (12а)–(12г) используем тождество

$$\exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 [1 - W(\rho)] \} = [\exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 [1 - W(\rho)] \} - \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 \}] + \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 \} ,$$

в соответствии с которым каждое из выражений (12а)–(12г) представляется в виде суммы двух слагаемых

$$\langle A_i A_j^* \rangle = \langle A_i A_j^* \rangle_D + \langle A_i A_j^* \rangle_T ,$$

где первое слагаемое содержит разность двух экспонент, а вклад, связанный с последним слагаемым в правой части тождества, вычисляется точно и для соответствующих средних имеет вид:

$$\langle A_0 A_0^* \rangle_T = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \exp \{ -4\sigma^2 \nu_0^2 \} + \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 \} \times \\ \times W(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \left[-2 \frac{\nu + \nu_0}{\nu_0} \mathbf{k}_0 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \frac{(\mathbf{k}_0 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0))^2}{\nu_0^2} \right] ; \quad (13а)$$

$$\langle A_1 A_1^* \rangle_T = \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 \} W(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \left(\nu - \nu_0 + \frac{\mathbf{k}_0 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)}{\nu_0} \right)^2 ; \quad (13б)$$

$$\langle A_0 A_1^* \rangle_T = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \exp \{ -4\sigma^2 \nu_0^2 \} \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} W(\mathbf{q}) \left[\frac{\nu_0}{\nu_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}}} \mathbf{q} (\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}) - \right. \\ \left. - \frac{\nu_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}}}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \mathbf{q} + \frac{(\mathbf{k}_0 \mathbf{q})(\mathbf{q}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}))}{\nu_0 \nu_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}}} \right] + \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 \} \times \\ \times W(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \left[\nu^2 - \nu_0^2 + 2\mathbf{k}_0 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - \frac{(\mathbf{k}_0 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0))^2}{\nu_0^2} \right] ; \quad (13в)$$

$$\langle A_0 A_2^* \rangle_T = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \exp \{ -4\sigma^2 \nu_0^2 \} \left\{ \nu^2 \nu_0^2 + \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} W(\mathbf{q}) \times \right. \\ \times \left[\nu_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}}^2 - 2\nu_0 \nu_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}} - \mathbf{q} (\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}) - \frac{\nu_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}}}{\nu_0} \mathbf{k}_0 \mathbf{q} + \right. \\ \left. \left. + \frac{\nu_0}{\nu_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}}} \mathbf{q} (\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}) + \frac{(\mathbf{k}_0 \mathbf{q})(\mathbf{q}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}))}{\nu \nu_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}}} \right] \right\} . \quad (13г)$$

В случае жесткой поверхности в выражениях (13а)–(13г) слагаемые с дельта-функциями остаются без изменений, а в слагаемых без дельта-функций нужно убрать множитель $(\nu_0/\nu)^2$, и поменять местами \mathbf{k} на \mathbf{k}_0 ; кроме того, в выражении (13в) нужно поменять общий знак.

Как видно из выражений (13а)–(13г), точно вычисленный вклад содержит два типа слагаемых: с дельта-функцией $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ и без нее. Первые из этих слагаемых соответствуют когерентной составляющей в интенсивности рассеянного поля. В частности, соответствующий вклад в (13а) равен квадрату средней амплитуды рассеяния при учете однократно рассеянных волн [10] с точностью до выделенной ранее дельта-функции. Аналогично соответствующие слагаемые в выражениях (13в), (13г) представляют собой произведения средних амплитуд рассеяния одно-, и двукратно, а также одно- и трехкратно отраженных от поверхности волн, вычисленных при выполнении условий (4) и удержании квадратичных по σ членов в предэкспоненте [10]. Остальные слагаемые в выражениях (13а)–(13г) совместно с оставшимся вкладом от выражений

(12а)–(12г) описывают вклад диффузной составляющей в интенсивность рассеянного поля.

Суммируя выражения (12а)–(12г) и (13а)–(13г), в соответствии с (10) для коэффициента рассеяния (7) получим:

$$m_S(\mathbf{k}) = m_{Sd}(\mathbf{k}) + m_{Sc}(\mathbf{k}),$$

где диффузная $m_{Sd}(\mathbf{k})$ и когерентная $m_{Sc}(\mathbf{k})$ составляющие коэффициента рассеяния даются выражениями:

$$\begin{aligned} m_{Sd}(\mathbf{k}) = & \frac{\sigma^2 \nu_0^2}{(2\pi)^2} W(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 \} \{ (\nu - \nu_0)^2 + \\ & + 2(\nu^2 - \nu_0^2) \} + \frac{\nu_0^2}{(2\pi)^2} \int d\rho e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\rho} [\exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 [1 - \\ & - W(\rho)] \} - \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 \}] \left\{ 1 + \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int dq W(\mathbf{q}) F_1(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int dq e^{-i\mathbf{q}\rho} W(\mathbf{q}) F_2(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} m_{Sc}(\mathbf{k}) = & \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \exp \{ -4\sigma^2 \nu_0^2 \} \{ 1 + 2[\sigma^2 \nu_0^2 + \\ & + \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int dq W(\mathbf{q} - \mathbf{k}_0) (\nu_q^2 - 2\nu_0 \nu_q - \mathbf{q}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}))] \} ; \end{aligned} \quad (15)$$

алгебраические функции своих аргументов F_1 и F_2 определяются выражениями: для мягкой поверхности –

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_1(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = & \nu(\nu - \nu_0 + 2(\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \nu)) + \mathbf{q}\mathbf{k} - \\ & - \frac{\nu^2 + \mathbf{k}\mathbf{q}}{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} (\nu - \nu_0 + \mathbf{q}(\frac{\mathbf{k}}{\nu} - \frac{\mathbf{k}_0}{\nu_0})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = & (2(\nu + \nu_0) + \nu_{\mathbf{k}_0+\mathbf{q}} - \nu_0) (\nu - \nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \frac{\mathbf{q}(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} - \\ & - \frac{\mathbf{k}_0\mathbf{q}}{\nu_0} (2(\nu + \nu_0) + \nu - \nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \mathbf{q}(\frac{\mathbf{k}_0}{\nu_0} - \frac{\mathbf{k} - \mathbf{q}}{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}})) ; \end{aligned}$$

для жесткой поверхности –

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_1(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = & \nu_0(\nu + \nu_0) + \mathbf{q}\mathbf{k} - \\ & - \frac{\nu^2 + \mathbf{k}\mathbf{q}}{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} (\nu + \nu_0 + \mathbf{q}(\frac{\mathbf{k}}{\nu} + \frac{\mathbf{k}_0}{\nu_0})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = & (2(\nu + \nu_0) - \nu_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \nu) (\nu_{\mathbf{k}_0-\mathbf{q}} - \nu_0 + \\ & + \frac{\mathbf{q}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{q})}{\nu_{\mathbf{k}_0-\mathbf{q}}}) - \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{\nu} (2(\nu + \nu_0) + 3(\nu_{\mathbf{k}_0-\mathbf{q}} - \nu_0) - \\ & - \mathbf{q}(\frac{\mathbf{k}}{\nu} - 3\frac{\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}}{\nu_{\mathbf{k}_0-\mathbf{q}}})) . \end{aligned}$$

Когерентная составляющая коэффициента рассеяния $m_{Sc}(\mathbf{k})$ представляет собой квадрат средней амплитуды рассеяния при учете в предэкспоненте слагаемых, квадратичных по σ [10]. Отметим, что учет только первого слагаемого в (15) эквивалентен интенсивности зеркально отраженной волны, вычисленной в приближении Кирхгофа. В случае же малых высот неровностей $\sigma^2(\nu + \nu_0)^2 \ll 1$ выражение (15) приводится в случаях мягкой и жесткой поверхностей соответственно к виду:

$$m_{Sc}(\mathbf{k}) = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \nu_0^2 \left\{ 1 - \frac{4\sigma^2}{(2\pi)^2} \int dq W(\mathbf{q} - \mathbf{k}_0) \nu_0 \nu_q \right\},$$

$$m_{Sc}(\mathbf{k}) = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \nu_0^2 \left\{ 1 - \frac{4\sigma^2}{(2\pi)^2} \int dq W(\mathbf{q} - \mathbf{k}_0) \frac{(K^2 + \mathbf{k}_0 \mathbf{q})^2}{\nu_0 \nu_q} \right\},$$

совпадающему с квадратом когерентной части рассеянного поля, которое получается в рамках ММВ [1, 2].

Рассмотрим теперь диффузную составляющую коэффициента рассеяния $m_{Sd}(\mathbf{k})$. Во-первых, отметим, что $m_{Sd}(\mathbf{k})$ содержит вклад однократно рассеянных волн $\langle A_0 A_0^* \rangle - \langle A_0 \rangle^2$, который эквивалентен выражению для коэффициента рассеяния $m_{Sd}(\mathbf{k})$, вычисленному в приближении Кирхгофа. Действительно, выражение (11а) за вычетом когерентной части может быть переписано в стандартном для МКП виде, общим для мягкой и жесткой поверхностей:

$$m_{Sd}(\mathbf{k}) = \left(\frac{K^2 + \nu \nu_0 - \mathbf{k} \mathbf{k}_0}{\nu + \nu_0} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \rho} \times \\ \times [\exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 [1 - W(\rho)] \} - \exp \{ -\sigma^2 (\nu + \nu_0)^2 \}]. \quad (16)$$

Во-вторых, в случае малых высот неровностей $\sigma \nu_0 \ll 1$ при учете величин, квадратичных по параметру $\sigma \nu_0$ (в интегральном слагаемом в (14) остается вклад только от первого члена), выражение (14) для $m_{Sd}(\mathbf{k})$ приводится в случае мягкой и жесткой поверхностей соответственно к виду:

$$m_{Sd}(\mathbf{k}) = 4\sigma^2 \nu^2 \nu_0^2 W(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0); \quad (17a)$$

$$m_{Sd}(\mathbf{k}) = 4\sigma^2 (K^2 - \mathbf{k} \mathbf{k}_0)^2 W(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad (17b)$$

что полностью совпадает с результатом, полученным в рамках ММВ [1, 2].

Таким образом, выражение (14) содержит в себе результаты как МКП, соответствующие вкладу однократно рассеянных волн, так и результаты ММВ, для адекватного описания которых необходимо также учитывать вклад двукратно и трехкратно рассеянных волн, и соответствующий им интерференционный вклад.

Представление коэффициента рассеяния $m_S(\mathbf{k})$ в виде (7), (10) позволяет оценить важность парциальных вкладов волн разной кратности рассеяния в распределении угловой интенсивности. В частности, в случае применимости ММВ $\sigma^2(\nu + \nu_0)^2 \ll 1$ наряду с вкладом в $m_{Sd}(\mathbf{k})$ от однократно рассеянных волн (16) имеется вклад такого же порядка от двукратно рассеянных волн $\langle A_1 A_1^* \rangle$ и их интерференции с однократно рассеянными волнами $2\text{Re}\langle A_0 A_1^* \rangle$. Два последних вклада описываются выражениями (13а), (13в), форма записи которых позволяет легко исследовать их угловую структуру. Например, в зеркальном направлении вклад от этих слагаемых отсутствует, причем при удалении от этого направления величина вклада двукратно рассеянных волн монотонно возрастает в сторону как больших, так и меньших углов.

На рис. 1 показаны вклады, соответствующие разным слагаемым в (10), в том числе и точно вычисленных частей (13б)–(13г) (пунктирная линия), при следующих

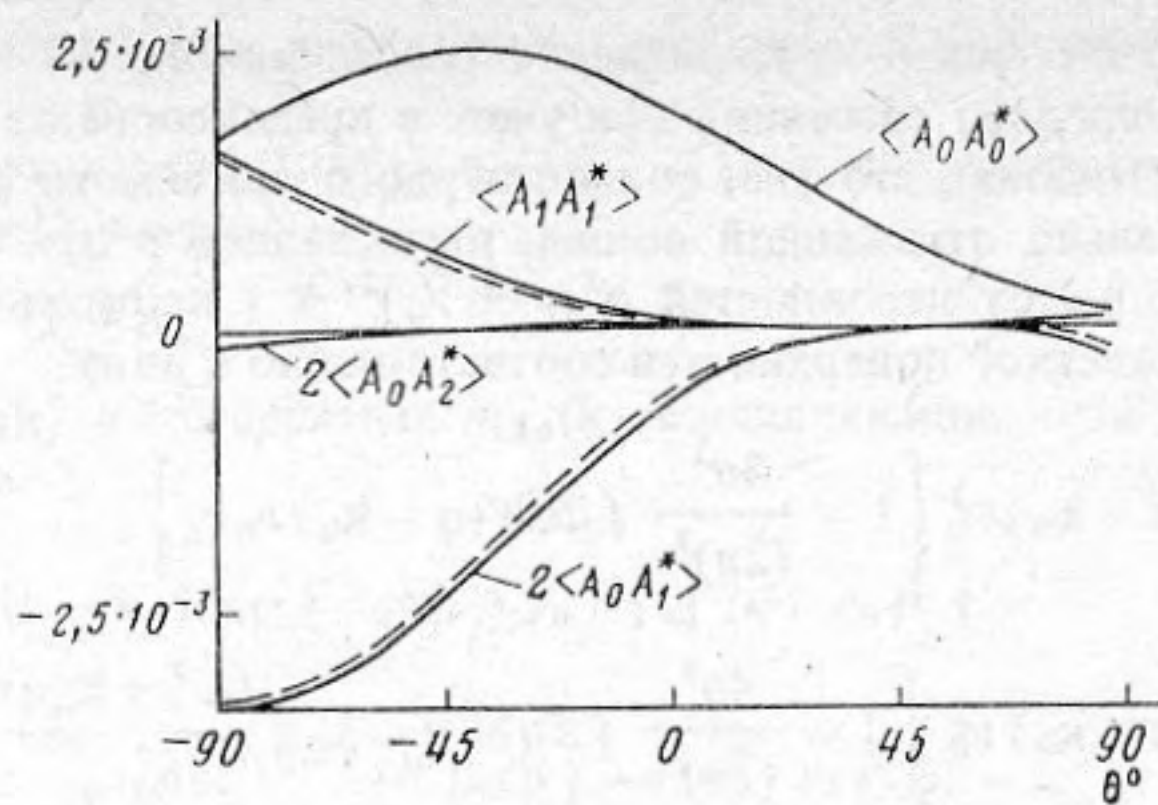


Рис. 1

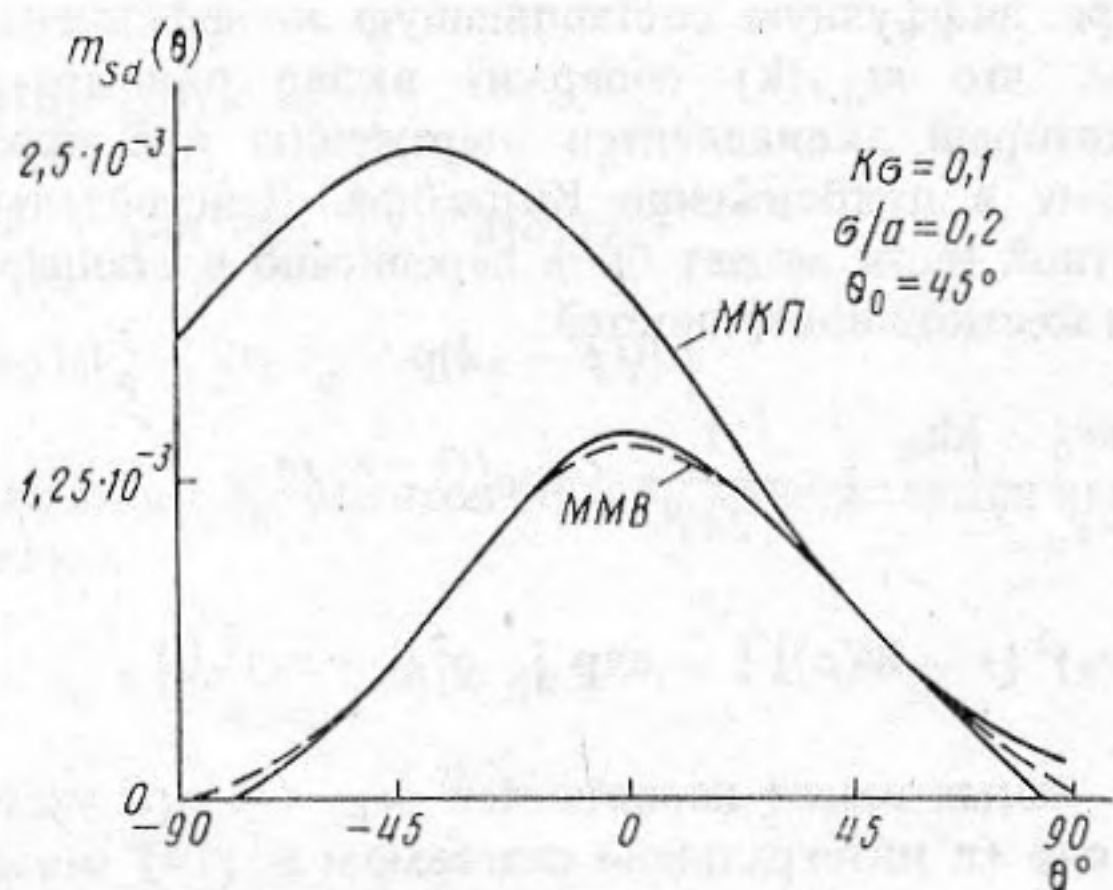


Рис. 2

значениях параметров: $\vartheta_0 = -45^\circ$, $\sigma/a = 0,2$, $Ka = 0,5$ для двумерно-шероховатой поверхности. На рис. 2 приведен график коэффициента рассеяния $m_{sd}(k)$, являющегося суммой парциальных слагаемых, показанных на рис. 1. Для сравнения на рис. 2 также приведены графики коэффициентов рассеяния, вычисленных в приближениях ММВ и МКП. Из графиков видно, что коэффициент рассеяния, вычисленный по формуле (14), практически совпадает, как этого и следовало ожидать, с результатом ММВ. Причем совокупный вклад однократно и двукратно рассеянных волн $\langle A_0 A_0^* \rangle$ и $\langle A_1 A_1^* \rangle$ в направлениях, отличных от зеркального, существенно компенсируется интерференционным вкладом от одно- и двукратно рассеянных волн, что и приводит к результату ММВ.

На рис. 3 и 4 приведены аналогичные показанным на рис. 1 и 2 зависимости для случая жесткой поверхности. Качественное отличие в поведении $m_{sd}(k)$ в случаях мягкой и жесткой поверхностей связано исключительно с разным знаком интерференционного слагаемого $\langle A_0 A_1^* \rangle$, как это и следует из развитой выше теории.

В другом предельном случае $Ka \gg 1$, $K\sigma \gg 1$, $\sigma/a \ll 1$ вкладом в коэффициент рассеяния от точно вычисленных частей (13а)–(13г), соответствующих первому слагаемому в (14), можно пренебречь из-за малости экспоненты $\exp\{-4\sigma^2 \nu_0^2\}$. Оценку оставшихся слагаемых в (14) (соответственно выражений (12а)–(12г)) можно получить методом перевала, воспользовавшись разложением корреляционной функции в окрестности ее максимума $W(\rho) = 1 - \rho^2/a^2 + \dots$ для вычисления интеграла по ρ . Парциальные вклады волн различной кратности рассеяния (12а)–(12г), вычислен-

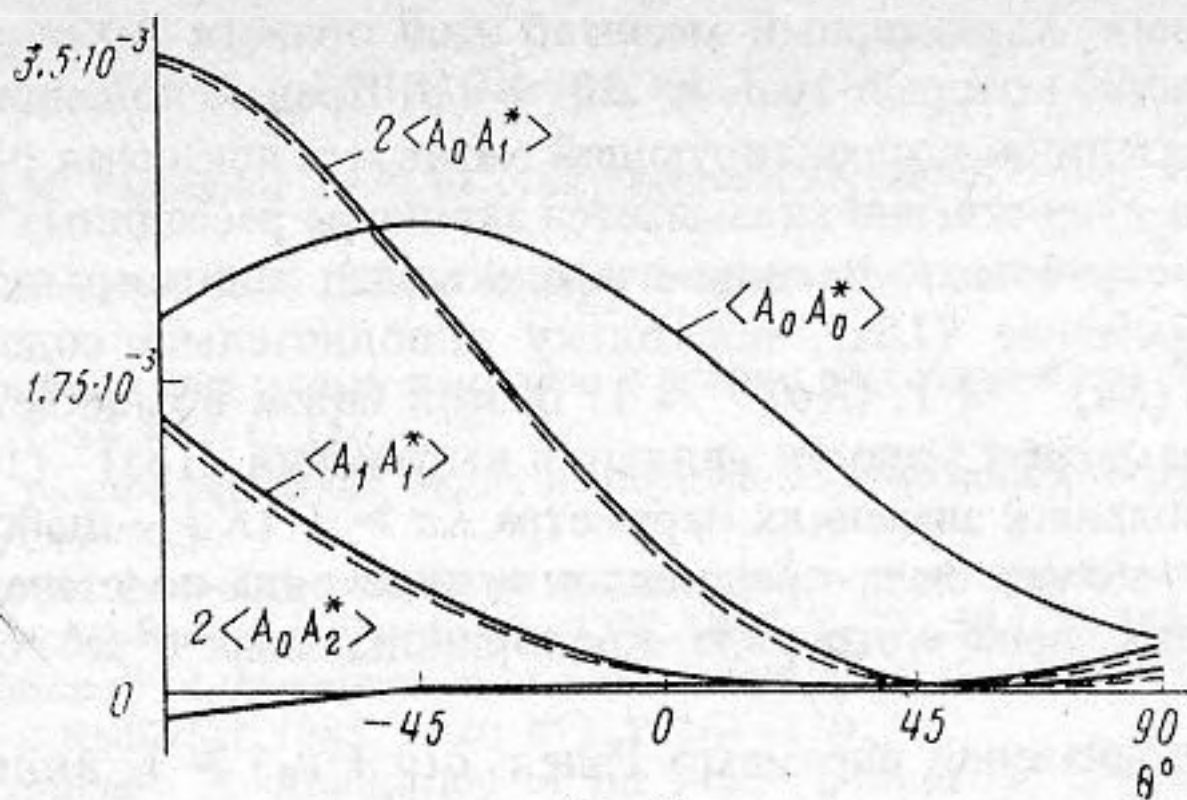


Рис. 3

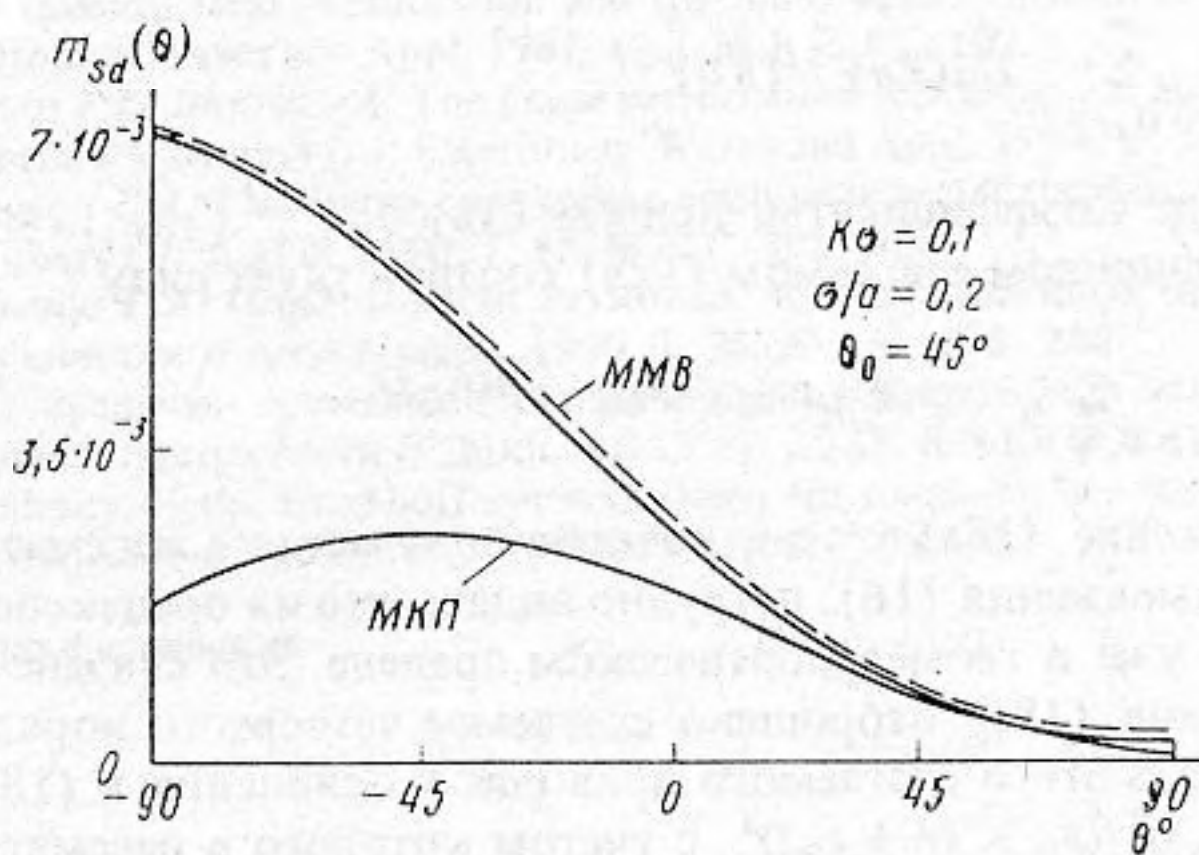


Рис. 4

ные для случая мягкой двумерно-шероховатой поверхности, в низших порядках по параметрам (4), имеют вид:

$$\langle A_0 A_0^* \rangle = B \left[1 - 2 \frac{k_0 (k - k_0)}{\nu_0 (\nu + \nu_0)} + \frac{k_0^2 \sigma^2}{\nu_0^2 a^2} (1 + p^2 a^2) \right]; \quad (18a)$$

$$\langle A_1 A_1^* \rangle = B \frac{\sigma^2 K^4}{a^4 \nu^3 \nu_0^3} 3! \left(1 + \frac{1}{2} p^2 a^2 + \frac{1}{4!} p^4 a^4 \right); \quad (18б)$$

$$\langle A_0 A_1^* \rangle = B \frac{K^2}{\nu^2} \frac{\nu + \nu_0}{\nu} \left[\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^2} (1 + p^2 a^2) \right]; \quad (18в)$$

$$\langle A_0 A_2^* \rangle = -B \frac{\sigma^2 K^4}{a^4 \nu^6} 3!; \quad (18г)$$

где $p = (k - k_0) / \sigma^2 (\nu + \nu_0)^2$,

$$B = \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \frac{1}{2\pi^{1/2}} \frac{a}{\sigma(\nu + \nu_0)} \exp \left\{ -\frac{a^2}{4\sigma^2} \frac{(k - k_0)^2}{(\nu + \nu_0)^2} \right\}. \quad (19)$$

Соответствующие выражения для жесткой поверхности отличаются от (18а)–(18г) заменой k на k_0 и наоборот, а также другим знаком в выражении (18в) для $\langle A_0 A_1^* \rangle$.

Угловая зависимость выражений (18а)–(18б) определяется в основном фактором B , который заметно отличен от нуля в узкой области углов вблизи направления

зеркального рассеяния. Характерный масштаб этой области $\Delta\vartheta$ определяется средним наклоном поверхности, который мал, $\text{tg } \Delta\vartheta \sim \sigma/a$. Предэкспоненциальные множители в (18а)–(18г) носят лишь корректирующий характер, исключая области скользящих углов $\text{tg } \vartheta \geq a/\sigma$, где существенно сказывается затенение рассеянных волн, и предложенная выше теория не работает. В свою очередь вклад многократно рассеянных волн лишь уточняет выражение (18а), поскольку дополнительно содержит малые параметры $(\sigma/a)^2 \ll 1$, $(Ka)^{-2} \ll 1$, $(K\sigma)^{-2} \ll 1$. В этой связи возникает вопрос: разложением по каким параметрам малости являются выражения (18а)–(18г)? Прежде всего отметим, что при больших значениях параметра $Ka \gg 1$ ($K\sigma$ – любое) вклад от слагаемого с F_1 в (14) может быть представлен в виде ряда по степеням $(K\sigma)^2 (Ka)^{-2n}$, $n \geq 1$. Вклад первого члена этого ряда, пропорциональный σ^2/a^2 , содержится в выражении (18в).

В случае больших значений параметра Рэлея, $\sigma(\nu + \nu_0) \gg 1$, вклад слагаемого с F_2 в (14) может быть представлен в виде разложения по двум параметрам $(Ka)^{-2n}$, $(K\sigma)^{-2m}$. При этом выражение (12б) для $\langle A_1 A_1^* \rangle$ разлагается в ряд

$$\langle A_1 A_1^* \rangle = (K\sigma)^2 \sum_{i=0, j=1}^{\infty} C_{ij} (Ka)^{-2i} (K\sigma)^{-2j},$$

где C_{ij} – некоторые коэффициенты, причем $C_{i=0, j=1} = C_{i=0, j=2} = 0$. Аналогичный вклад в интерференционном слагаемом (12в) соответствует ряду

$$\langle A_0 A_1^* \rangle = (K\sigma)^2 \sum_{n=1, 0 < j < n}^{\infty} C_{jn} (Ka)^{-2j} (K\sigma)^{-4(n-j)}.$$

Сравнивая выражение (18а) с тем, которое получается в рассматриваемом пределе $k\sigma \gg 1$ из точного выражения (16), нетрудно видеть, что их предэкспоненциальные множители отличаются уже в геометрическом пределе. Это связано с тем, что в предэкспоненте выражения (18а) отброшено слагаемое четвертого порядка по σ . Последовательный учет вклада этого слагаемого приводит к появлению в (18а) дополнительного члена $(k_0(k - k_0))^2 / (\nu_0 \times (\nu + \nu_0))^2$, с учетом которого в рассматриваемом пределе (18а) эквивалентно (16).

Таким образом, при $K\sigma \gg 1$ существенным оказывается вклад отброшенных нами в предэкспоненте слагаемых четвертой степени по σ . Однако оценка вклада этих слагаемых для волн высших кратностей рассеяния показывает, что он может быть представлен в виде ряда

$$(K\sigma)^4 \sum_{n=1, j=1}^{\infty} C_{ij} (Ka)^{-2i} (K\sigma)^{-2j},$$

так что поправочные члены к приближению Кирхгофа в низшем порядке будут иметь малость $(\sigma/a)^2$. Поэтому для пологих поверхностей $\sigma/a \ll 1$ этими поправками можно пренебрегать.

Следовательно, в случае пологих поверхностей для адекватного описания коэффициента рассеяния при произвольных значениях параметра Рэлея вклад однократно рассеянных волн (16) следует учитывать точно, а вклад многократно рассеянных волн достаточно учитывать с помощью выражений (12б)–(12в).

Отметим, что в приведенных выше разложениях поправок к приближению Кирхгофа содержатся как не зависящие от длины волны геометрические вклады $\sim \sigma^2/a^2$, так и дифракционные. Среди последних встречаются слагаемые вида $(\sigma/Ka^2)^2 \sim \sim (KR)^{-2}$, где $R = a^2/\sigma$ – характерный радиус кривизны поверхности. Таким образом, обычно используемый для приближения Кирхгофа критерий малости средних кривизн поверхности, хотя и встречается среди параметров разложения, однако не является единственным и представляет собой комбинацию более фундаментальных параметров $(K\sigma)^{-1}$, $(Ka)^{-1}$. Последнее подтверждается результатом работы [13], где при численном исследовании пределов применимости приближения Кирхгофа сделан вывод о большей важности параметра Ka .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
2. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоздат. 1982. 264 с.
3. Воронович А.Г. Приближение малых наклонов в теории рассеяния волн на неровных поверхностях // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 7. С. 116–125.
4. Воронович А.Г. К теории рассеяния звука на неровной свободной поверхности // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 6. С. 747–753.
5. Воронович А.Г. Метод фазового оператора в задаче рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящей поверхности // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 2. С. 286–290.
6. Winebrenner D.P., Ishimaru A. Investigation of surface field phase perturbation technique for scattering from rough surfaces // Radio Sci. 1985. V. 20. № 2. P. 161–170.
7. Winebrenner D.P., Ishimaru A. Application of the phase perturbation technique to randomly rough surfaces // J. Opt. Soc. Amer. 1985. V. 2. № 12. P. 2285–2294.
8. Brochat S.L., Tsang L., Ishimaru A., Thorsos E.I. A numerical comparison of the phase perturbation technique with the classical field perturbation and Kirchhoff approximation for random rough surface scattering // J. Electromag. Waves and Appl. 1987. V. 2. № 1. P. 85–102.
9. Brochat S.L., Thorsos E.I., Ishimaru A. The phase perturbation technique v.s. an exact numerical method for random rough surface scattering // J. Electromag. Waves and Appl. 1989. V. 3. № 3. P. 237–256.
10. Дунин С.З., Максимов Г.А. Рассеяние скалярных волновых полей на абсолютно отражающих шероховатых поверхностях // ЖЭТФ. 1990. Т. 98. № 8. С. 391–406.
11. Дунин С.З., Максимов Г.А. О вычислении звуковых полей, рассеянных на неровных абсолютно отражающих поверхностях // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 2. С. 276–282.
12. Воронович А.Г. О пределах применимости приближения Кирхгофа в задачах рассеяния звука на неровной свободной поверхности // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 830–834.
13. Thorsos E.I. The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 83. № 1. P. 78–92.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
28.12.91

A.L. Gavrilov, S.Z. Dunin, G.A. Maksimov

SCATTERING OF SCALAR FIELDS BY HARD AND SOFT ROUGH SURFACES. ANGULAR DISTRIBUTION OF INTENSITY.

The problem of scalar fields scattering by statistically rough soft and rigid surfaces is considered. The expression for an angular distribution of reflected field intensity is obtained on the basis of the approach using the representation of reflected fields in the form of a set of waves multiply scattered by the surface. The basic physical concept used is the idea of a quasi-single process of waves scattering by the surface.

The validity conditions include two factors, i.e. the smallness of unevennesses average slopes and the opportunity to ignore the surface shading in the case of multiple reflections. These conditions are not connected with the Rayleigh parameter. It have been shown that taking into account the waves contributions for three first scatterings in the case of the small Rayleigh parameter, the expression for the scattering coefficient coincides with the one obtained within the framework of the small perturbations method. The main contribution to the diffuse part of the scattering coefficient in this case is the one of single and double scattered waves and their interference term. In the inverse extreme case when the Rayleigh parameter is large the main contribution to the scattering coefficient is due to single-scattered waves. It have been shown that the corrections to the Kirchhoff approximation connected with multiply scattered waves are small in the second degree with respect to average surface slopes or the value inverse to the Rayleigh parameter.

Thus, an accurate theory of the second momentum of a scalar field reflected from a statistically rough surface with slope unevennesses is developed in the paper. This theory contains the results obtained by the small perturbations method and the Kirchhoff approximation as extreme cases. The obtained results allow to calculate the scattering coefficient at an arbitrary form of the correlation function and to take into account its being multiscaled.