АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 5

УДК 534.222

© 1992 г. В.Е. Назаров

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СРЕДАХ С СИЛЬНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Методом последовательных приближений исследуется распространение слабой упругой волны и генерация ее второй гармоники в поле мощной волны накачки в средах с сильной акустической нелинейностью.

Распространение акустических волн в твердых телах сопровождается нелинейными эффектами, интенсивность которых зависит от амплитуд взаимодействующих волн и определяется нелинейными свойствами среды. Традиционно в акустике однородных сред исследуются процессы генерации высших гармоник и комбинационных частот [1, 2]. Описание этих эффектов проводится в рамках степенной нелинейности среды (квадратичной или кубичной), при этом амплитуда высших гармоник любой первичной волны не зависит от наличия других первичных волн. Так, например, при распространении в среде с квадратичной нелинейностью, уравнение состояния которой имеет вид

$$\sigma(\epsilon) = E(\epsilon - \frac{\gamma_2}{2}\epsilon^2), \qquad (1)$$

$$E = \frac{\partial\sigma(\epsilon = 0)}{\partial\epsilon}, \quad \gamma_2 = E^{-1}\frac{\partial^2\sigma(\epsilon = 0)}{\partial\epsilon^2} = \text{const}, \qquad (2)$$

плоской гармонической волны

$$\epsilon(x, t) = \epsilon_0 \sin(\omega t - Kx), \qquad (3)$$

амплитуда ϵ_2 ее второй гармоники на малых расстояниях,

$$Kx \ll (\gamma_2\epsilon_0)^{-1}, \qquad (4)$$

определяется выражением:

$$\epsilon_2 = \frac{\Gamma}{2}\epsilon_0^2 Kx, \quad \Gamma = \frac{\gamma_2 - 1}{2}. \qquad (5)$$

В этих уравнениях использованы обозначения: σ, ϵ – напряжение и деформация в среде; E, Γ – модуль упругости и параметр квадратичной нелинейности среды; $\omega = cK$; c – скорость звука в невозмущенной среде. Зависимость (1) характерна для однородных твердых тел при относительно малых деформациях и следует из пятиконстантной теории упругости, при этом параметр нелинейности достаточно мал ($\Gamma < 10$) [1].

В структурно-неоднородных средах, обладающих сильной акустической нелинейностью [3], подобные эффекты проявляются более интенсивно. Кроме того, в таких средах имеют место эффекты взаимовлияния первичных волн на генерацию их высших гармоник. Это связано с возможностью модуляции эффективного параметра нелинейности таких сред, для которых разложение (1) не применимо, поэтому $\gamma_2 \neq \text{const}$ и зависит от каждой первичной волны. В частности, здесь возможны эффекты усиления (ослабления) высших гармоник слабой волны под действием мощной волны накачки. Покажем это на примере одномерных продольных упругих волн в твердом теле.

Для сред с сильной акустической нелинейностью справедливы следующие уравнения [4]:

$$\rho U_{tt} = \sigma'_x(\epsilon), \quad \sigma(\epsilon) = E[\epsilon - f(\epsilon)], \quad \epsilon = U'_x, \tag{6}$$

где U – смещение. ρ – равновесная плотность среды, $f(\epsilon)$ – нелинейная часть уравнения состояния среды ($|f'_\epsilon(\epsilon)| \ll 1, |\epsilon| \ll 1$).

Пусть на фоне мощной гармонической волны накачка (бегущей или стоячей) с частотой Ω распространяется слабая волна с частотой ω ($\omega \neq p\omega$, $p = 1, 2 ...$). При распространении в нелинейной среде волн с частотами Ω и ω в ней будут возбуждаться волны с комбинационными частотами $\omega_{n,m} = n\Omega + m\omega$ ($n, m = 0, \pm 1, \pm 2 ...$). Исследуем эти процессы. Из (6) получаем волновое уравнение для $U(x, t)$:

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = c^2 [f(U'_x)]'_x, \tag{7}$$

где $c = \sqrt{E/\rho}$. Решение уравнения (7) будем искать в виде:

$$U(x, t) = \sum_n \sum_m \hat{U}_{n,m}(x, t),$$

$$\epsilon(x, t) = \sum_n \sum_m \hat{\epsilon}_{n,m}(x, t), \tag{8}$$

$$\hat{U}_{n,m}(x, t) = \frac{1}{2} U_{n,m}(x) e^{j\omega_{n,m}t} + \text{к.с.},$$

$$\hat{\epsilon}_{n,m}(x, t) = \frac{1}{2} \epsilon_{n,m}(x) e^{j\omega_{n,m}t} + \text{к.с.}. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (7), получаем уравнения для $U_{n,m}(x)$:

$$U''_{n,m_{xx}} + K^2_{n,m} U_{n,m} = 2C'_{n,m_x}(x), \tag{10}$$

где

$$C_{n,m}(x) = \left(\frac{1}{2x}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\epsilon(x, \theta_1, \theta_2)] \, e^{-j(n\theta_1 + m\theta_2)} d\theta_1 d\theta_2 \tag{11}$$

– коэффициенты кратного ряда Фурье функции $f(\epsilon)$,

$$\theta_1 = \Omega t, \quad \theta_2 = \omega t, \quad K_{nm} = \omega_{nm}/c.$$

Таким образом, для нахождения $U_{n,m}(x)$ необходимо решить замкнутую систему уравнений (10, 11); однако найти ее точное решение не представляется возможным.

Решение задачи (без ограничения общности) ведется в предположении, что функция $f(\epsilon)$ дифференцируема на интервалах $\epsilon \gtrless 0$. В силу предположения $|f'_\epsilon(\epsilon)| \ll 1$, $|\epsilon| \ll 1$, $|\hat{\epsilon}_{1,0}| \gg |\hat{\epsilon}_{0,1}|$ будем считать, что выполняется также условие

$$\mu = \frac{\sum_n \sum_m |\hat{\epsilon}_{n,m \neq 1,0}|}{|\hat{\epsilon}_{1,0}|} \ll 1. \tag{12}$$

Тогда, используя в (11) разложение функции $f(\epsilon)$ в ряд Тейлора на каждом из интервалов $\epsilon \gtrless 0$, после несложных преобразований получаем выражение для $C_{n,m}(x)$:

$$C_{n,m}(x) = C_x^{(0)}(x)\,\delta_{0m} + \frac{1}{2} \sum_k C_k^{(1)} \epsilon_{\substack{n-k,m \\ \neq \pm 1,0}} + \tag{13}$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} \sum_k C_k^{(2)} \sum_{n'} \sum_{m'} \epsilon_{\substack{n',m' \\ \neq \pm 1,0}} \epsilon_{\substack{n-k-n',m-m' \\ \neq \pm 1,0}} + \dots,$$

где

$$C_k^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\epsilon^{(i)}(\hat{\epsilon}_{1,0})\, e^{-jk\theta_1} d\theta_1, \tag{14}$$

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

В дальнейшем для простоты будем рассматривать только процессы генерации высших гармоник волны накачки и слабой волны.

Из (10.13) получаем уравнение, описывающее в первом приближении распространение мощной волны и генерацию ее высших гармоник:

$$U''_{n,0_{xx}} + K^2_{n,0} U_{n,0} = 2[C_n^{(0)}(x)]'_x. \tag{15}$$

Для среды с квадратичной нелинейностью уравнение (15) совпадает с соответствующим уравнением, следующим из пятиконстантной теории упругости и описывает процессы самодетектирования и генерацию второй гармоники акустической волны.

Уравнения второго приближения, описывающие распространение волны накачки, генерацию ее высших гармоник и второй гармоники слабой волны, имеют вид:

$$U''_{n,0_{xx}} + K^2_{n,0} U_{n,0} = 2[C_n^{(0)}]'_x + [\sum_{k \neq n \pm 1} C_k^{(1)} U'_{n-k,0_x}]'_x, \tag{16}$$

$$U''_{0,2_{xx}} + K^2_{0,2} U_{0,2} = \frac{1}{4} [C_0^{(2)} U'^{\,2}_{0,1_x}]'_x. \tag{17}$$

Из сравнения (15) при $n = 2$ и (17) замечаем, что генерация второй гармоники сильной и слабой волн описываются, вообще говоря, различными уравнениями. Для сред с квадратичной нелинейностью они, естественно, совпадают, при этом $C_2^{(0)} = \gamma_2 \epsilon^2_{1,0}/8$, а параметр

$$\gamma_2 = C_0^{(2)} = \text{const} \tag{18}$$

и не зависит от волны накачки.

Существуют, однако, материалы, для которых $f(\epsilon) \sim \epsilon^d$ (d – дробное число). Как показывают эксперименты [5], для отожженной меди $f(\epsilon)$ описывается выражением:

$$f(\epsilon) = \begin{cases} \gamma_+ \epsilon^{3/2}, & \epsilon > 0 \\ \gamma_-(-\epsilon)^{3/2}, & \epsilon < 0. \end{cases} \tag{19}$$

(Уравнение состояния (6) с нелинейностью (19) аналогично известному закону Герца [6] и, вероятно, связано с зеренной структурой металла.) Отличие такого вида нелинейности от степенной с целым показателем заключается в том, что производные $f_\epsilon^{(i)}(\epsilon = 0)$ при $i > 1$ терпят разрыв. Для такого материала эффективный параметр квадратичной нелинейности для слабой волны зависит от амплитуды волны накачки и может быть значительным ($C_0^{(2)} \sim (\gamma_+ + \gamma_-)\, \epsilon_{1,0}^{-1/2} \gg 1$).

Другим примером среды с "неклассической" нелинейностью является твердое тело с микротрещинами, для которого $f(\epsilon) \sim \gamma |\epsilon|$. (Генерация гармоник в такой среде (без волны $\hat{\epsilon}_{1,0}$) исследовалась в работах [4, 7]). Для бегущей волны накачки из (14) находим

$$C_0^{(2)} = \frac{2\gamma}{\pi \epsilon_{1,0}} \left\{ h(-K_{1,0}x + \pi[\frac{K_{1,0}x}{\pi}]) - h(-K_{1,0}x) \right\}, \tag{20}$$

где

$$h(z) = \begin{cases} 1, & z \geqslant 0 \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

а знак $[z]$ означает целую часть числа z. Здесь амплитуда второй гармоники слабой волны на расстояниях $K_{1,0}x \ll \pi\gamma^{-1}$ определяется выражением:

$$\epsilon_{0,2}(x) = \frac{\gamma\epsilon_{0,1}^2(x=0)\,\omega}{2\epsilon_{1,0}\,\Omega}\left[\frac{K_{1,0}x}{\pi}\right]. \tag{21}$$

В этом случае $\epsilon_{0,2}(x) \sim [K_{1,0}x/\pi]$. Это связано с тем, что генерация второй гармоники слабой волны происходит не на всей длине распространения волны $\hat{\epsilon}_{0,1}$, а только в точках $\epsilon(x, t) = 0$, определяемых волной накачки.

На расстояниях $K_{1,0}x \gg \pi$ из (21) имеем выражение для $\epsilon_{0,2}$:

$$\epsilon_{0,2}(x) = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_{1,0}}\,\epsilon_{0,1}^2(x=0)\,K_{0,1}x, \tag{22}$$

совпадающее с (5), в котором параметр $\gamma_2 = C_0^{(2)} = 2\gamma(\pi\epsilon_{1,0})^{-1} \gg 1$. Аналогично можно получить выражение для эффективного параметра γ_n, определяющего амплитуду n-й гармоники слабой волны в поле мощной накачки:

$$\gamma_n = C_0^{(n)}. \tag{23}$$

(Для сред со степенной нелинейностью $(f(\epsilon) = \gamma_n\epsilon^n/n!,\ n \geqslant 2)$ уравнение (23) является тождеством, а $C_0^{(n)} = \mathrm{const}$.)

Возможно, что существуют и другие структурно-неоднородные среды, нелинейные упругие свойства которых не описываются степенными законами ($n = 2, 3, \ldots$), а имеют более сложный вид. В этом случае амплитуда высших гармоник зондирующей волны будет зависеть от амплитуды волны накачки, что может быть использовано для диагностики состояния таких сред.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В настоящем приложении кратко представлена схема вывода уравнения (13). Разложение функции $f(\epsilon)$ в ряд Тейлора на интервалах $(\epsilon \gtrless 0)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f(\epsilon \gtrless 0) &= f(\epsilon)\,h(\pm\epsilon) = f(\hat{\epsilon}_{1,0})\,h(\pm\hat{\epsilon}_{1,0}) + \\ &+ \{f'_\epsilon(\hat{\epsilon}_{1,0})\,h(\pm\hat{\epsilon}_{1,0}) \pm f(\hat{\epsilon}_{1,0})\,\delta(\pm\hat{\epsilon}_{1,0})\}\,(\sum_n \sum_{m \neq 1,0} \hat{\epsilon}_{n,m}) + \\ &+ \frac{1}{2!}\{f''_{\epsilon\epsilon}(\hat{\epsilon}_{1,0})\,h(\pm\hat{\epsilon}_{1,0}) \pm 2f'_\epsilon(\hat{\epsilon}_{1,0})\,\delta(\pm\hat{\epsilon}_{1,0}) + f(\hat{\epsilon}_{1,0})\,\delta'_\epsilon(\pm\hat{\epsilon}_{1,0})\} \times \\ &\times (\sum_n \sum_{m \neq 1,0} \hat{\epsilon}_{n,m})^2 + R_l(\pm\epsilon), \end{aligned} \tag{П.1}$$

где $R_l(\pm\epsilon)$ – остаточный член ряда Тейлора,

$$R_l(\pm\epsilon) \leqslant \frac{1}{l!}\,(\sum_n \sum_{m \neq 1,0} \hat{\epsilon}_{n,m})^l \max\,[f(\epsilon)\,h(\pm\epsilon)]_\epsilon^{(l)},$$

$\delta(\epsilon)$ – детальта-функция Дирака. Подставляя (П.1) в (11) получаем:

$$C_{n,m}(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} e^{-jm\theta_2} \left\{ \int_0^{2\pi} [f(\hat{\epsilon}_{1,0}) + f'_{\epsilon}(\hat{\epsilon}_{1,0}) \times \right.$$

$$\times \left(\frac{1}{2} \sum_{n'} \sum_{m' \neq \pm 1,0} \epsilon_{n',m'} e^{jn'\theta_1 + jm'\theta_2}\right) + \frac{1}{2!} f''_{\epsilon\epsilon}(\hat{\epsilon}_{1,0}) \times \tag{П.2}$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{2} \sum_{n'} \sum_{m' \neq \pm 1,0} \epsilon_{n',m'} e^{jn'\theta_1 + jm'\theta_2}\right)^2 + \ldots] e^{-jn\theta_1} d\theta_1 \right\} d\theta_2 .$$

Используем в (П.2) разложение функций $f_{\epsilon}^{(i)}(\hat{\epsilon}_{1,0})$ в ряд Фурье:

$$f_{\epsilon}^{(i)}(\hat{\epsilon}_{1,0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^{(i)}(k) e^{j\theta_1 k}, \tag{П.3}$$

где $C_k^{(i)}(x)$ определяется выражением (14). В результате после несложных алгебраических вычислений получаем уравнение (13).

Система уравнений (10, 13) позволяет методом последовательных приближений описать распространение и генерацию волн всех комбинационных частот. В нулевом приближении первичные волны распространяются линейно и не взаимодействуют. В первом приближении наблюдается самовоздействие мощной волны, генерация ее высших гармоник и первых комбинационных частот $\omega_{1,\pm 1}$; слабая волна распространяется в среде, параметры которой изменились под действием мощной волны. Можно показать, что слабая волна распространяется со скоростью $c(x)$:

$$c(x) = c\left[1 - \frac{1}{2} C_0^{(1)}(x)\right]. \tag{П.4}$$

Уравнения второго приближения, кроме рассмотренных выше процессов, описывают генерацию комбинационных частот $\omega_{n,\pm 1}$, второй гармоники слабой волны, а также ее нелинейное затухание, связанное с образованием волн комбинационных частот [8, 9].

Автор выражает благодарность Л.А. Островскому за интерес к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука. 1966.
2. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
3. *Nazarov V.E., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Sutin A.M.* Nonlinear acoustics of micro-inhomogeneous media // Phys. Earth and Planet. Inter. 1988. N 50. P. 65–73.
4. *Назаров В.Е., Островский Л.А.* Упругие волны в средах с сильной акустической нелинейностью // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 1. С. 106–110.
5. *Назаров В.Е.* Влияние структуры меди на ее акустическую нелинейность // Физика металлов и металловедение. 1991. № 3. С. 172–178.
6. *Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987.
7. *Назаров В.Е., Сутин А.М.* Генерация гармоник при распространении упругих волн в твердых нелинейных средах // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 711–716.
8. *Красильников В.А., Тагунов Е.Я.* О некоторых особенностях коллинеарного взаимодействия монохроматических волн в среде без дисперсии // Вест. МГУ. Сер. 3, Физика, Астрономия. 1978. Т. 19. № 4. С. 99–108.
9. *Moffett M.B., Konrad W.L., Carlton L.F.* Experimental demonstration of the absorption of sound by sound in water // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. N 4. P. 1048–1061.

Институт прикладной физики
Российской Академии наук

Поступила в редакцию
07.12.90
После исправления
13.11.91

V.E. Nazarov

ELASTIC WAVES INTERACTION IN MEDIA WITH STRONG ACOUSTIC NONLINEARITY

The effects of the formation of combination frequency waves due to propagation and interaction ot elastic quasiharmonic waves in wedia with strong acoustic nonlinearity, in particular, propagation of a weak wave and generation of its second harmonic in the field of a powerful pump wave, are studied. The equations describing in the first approximation self-action and generation of harmonics of a powerful wave and damping (amplification) of a weak wave in the field of a powerful pump wave are obtained. It is shown that the presence of a powerful pump wave in a nonlinear medium can result in slight damping (amplification) of a weak wave and in a variation of its propagation velocity. The equations of the second approximation are obtained also. They describe generation of higher harmonics of pump waves, first combination frequencies and the second harmonic of a weak wave in the field of a powerful pump wave. It is shown that the pump wave can change considerably the effective nonlinearity parameters of some structural-inhomogeneous media whose nonlinear part of the state equation is not described by a power function with integral index. The variation of the effective parameter of the quadratic nonlinearity and the generation of the weak wave second harmonic are studied in the presence of a powerful pump wave using mediawith various defects (grains or cracks in solids) as examples. This effect is proposed for diagnostics of the state of such structural-inhomogeneous media.