

УДК 534.2

© 1992 г. Е.В. Павлова, О.А. Харин

**АКУСТИЧЕСКОЕ ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ИСТОЧНИКОВ,
ПЕРЕСЕКАЮЩИХ ХАОТИЧЕСКИЙ ЭКРАН**

В настоящей работе рассматривается акустическое переходное излучение, вызванное пучком не имеющих собственных частот модуляции источников, пересекающих бесконечный хаотический экран. Для решения поставленной задачи используется метод функции Грина. Экран описывается функцией прозрачности, которая определяется корреляционной функцией флуктуаций экрана. Получены выражения для углового распределения спектральной плотности излучаемой энергии. Проанализирован случай экспоненциально убывающей корреляционной функции флуктуаций экрана. Обсуждается возможность когерентного усиления переходного излучения.

Известно, что равномерное дозвуковое движение источников, не имеющих собственных частот модуляции в средах вблизи неоднородностей, сопровождается излучением акустических волн [1]. Механизм этого излучения связан с перестройкой собственного поля источника, при его движении вблизи неоднородностей. Это явление называется переходным (дифракционным) излучением.

В настоящей работе рассматривается излучение акустических волн пучком источников, проходящих через хаотический экран.

Известно [2], что экран характеризуется следующим свойством: поле сразу за экраном определяется произведением первоначального волнового поля перед экраном на модулирующую функцию прозрачности. Статистические свойства экрана определяются соответствующими корреляционными моментами функции прозрачности. В частности, переходное излучение на слое конечной толщины может рассматриваться как на бесконечно тонком экране, если длина формирования излучения много больше толщины рассматриваемого слоя.

Данный подход аналогичен методу "черного ящика", когда связь между входными и выходными параметрами системы задается без конкретизации внутренней структуры "черного ящика". В нашем случае эта связь определяется априори функцией прозрачности.

Пусть пучок из N точечных источников движется вдоль оси Z выбранной системы координат, пересекая бесконечный хаотический экран (рис. 1). Источники в пучке передают часть своей энергии среде за счет теплового механизма [3]. Количество тепла Q , выделяемого в единицу времени вдоль следа пучка, предполагается постоянным.

Основная система уравнений в акустическом приближении может быть сведена к волновому уравнению для акустического давления:

$$\Delta p - \frac{1}{s^2} \ddot{p} = \frac{\Gamma Q}{s^2} \sum_{m=1}^N \dot{\delta}^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t - \mathbf{x}_m). \tag{1}$$

Здесь $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ трехмерная дельта-функция Дирака, s — скорость звука, Γ — параметр Грюнайзена, $\mathbf{v} = \{0, 0, v\}$, $\mathbf{x} = \{r, z\}$, Δ — оператор Лапласа.

Далее нас будут интересовать только спектральные характеристики акустического

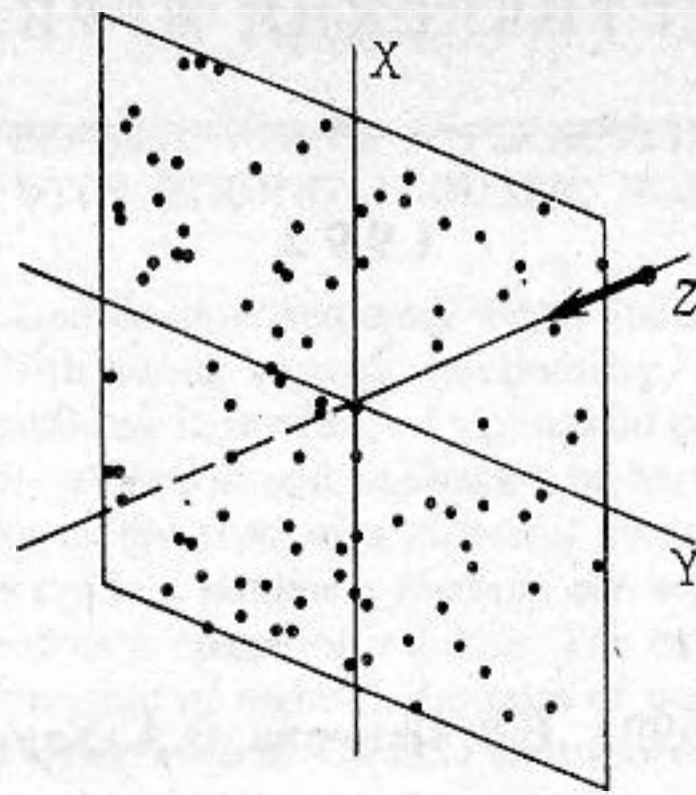


Рис. 1. Геометрия задачи

излучения, и поэтому перейдем к фурье-образу по времени в уравнении (1):

$$\Delta p_{\omega} + k^2 p_{\omega} = -i \frac{\Gamma Q}{s^2} \frac{k}{M} \sum_{m=1}^N \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) e^{ik(z-z_m)/M}. \quad (2)$$

Здесь $k = \omega/s$ — волновое число, $M = v/s$ — число Маха.

Решение уравнения (2) может быть представлено в виде суммы

$$p_{\omega} = p_{\omega}^{(0)} + p_{\omega}^{(1)}, \quad (3)$$

в которой первое слагаемое $p_{\omega}^{(0)}$ — частное решение неоднородного уравнения (2), описывающее сопровождающее источники поле, а второе слагаемое удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, эквивалентному интегральному уравнению

$$p_{\omega}^{(1)}(\mathbf{x}_0) = \int d\sigma \left\{ p_{\omega}^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} p_{\omega}^{(1)}(\mathbf{x}) \right\}.$$

Здесь $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ — функция Грина уравнения (2). Интегрирование производится по поверхности, охватывающей полупространство $z > 0$. Последнее выражение можно привести к более простому

$$p_{\omega}^{(1)}(\mathbf{x}_0) = -2 \int d^2 \mathbf{r} p_{\omega}(\mathbf{r}, 0) \frac{\partial}{\partial n} G_1(\mathbf{r} - \mathbf{x}_0), \quad (4)$$

если на функцию Грина наложить условие $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) |_{z_1=0} = 0$. Известно, что такая функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|} \right\},$$

где точка \mathbf{x}'_0 зеркально симметрична относительно плоскости экрана точке \mathbf{x}_0 . Функция $G_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ представляет собой первое слагаемое в выражении для $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. В уравнении (4) интегрирование проводится в плоскости xu . Выражение (4) описывает интересное нас поле излучения.

Значение поля излучения сразу за экраном, как предполагалось выше, описывается функцией прозрачности и собственным полем источников. Следовательно, можно записать

$$p_{\omega}^1(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}) p_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, 0), \quad (5)$$

т.е. экран модулирует сопровождающее поле источников в соответствии с функцией прозрачности $f(\mathbf{r})$. Эта комплексная функция для безграничного статистически одно-

родного экрана характеризуется свойствами [2]:

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = f_0 = \text{const}, \quad \sigma^2 = \langle |f - f_0|^2 \rangle = \text{const}, \quad \langle f(\mathbf{r}') f^*(\mathbf{r}'') \rangle = B(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''). \quad (6)$$

В волновой зоне, т.е. при $|x| \gg L$ и $|x| \gg kL^2$, где L — характерный размер области, в которой сопровождающее поле имеет ненулевое значение, справедливо следующее приближение:

$$p_{\omega}^{(1)}(\mathbf{x}) \approx \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{x} n_z \int d^2 \mathbf{r} f(\mathbf{r}) p_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}) e^{-ik\mathbf{n}\mathbf{r}}. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор в направлении излучения.

Выражение для углового распределения спектральной плотности излучения дается соотношением [1]

$$dE_{\mathbf{n},\omega} = \frac{2}{\rho_0 s} |p_{\omega}^{(1)}|^2 x^2 d\omega d\Omega. \quad (8)$$

Тогда, используя в этом соотношении выражение (7), получим

$$dE_{\mathbf{n},\omega} = d\omega d\Omega \frac{2}{\rho_0 s} \frac{k^2}{(2\pi)^2} n_z^2 \int d^2 \mathbf{r}' d^2 \mathbf{r}'' p_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}') p_{\omega}^{(0)*}(\mathbf{r}'') \langle f(\mathbf{r}') f^*(\mathbf{r}'') \rangle \times \\ \times \exp[ik\mathbf{n}(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}')]. \quad (9)$$

Предположим также, что характерная поперечная ширина пучка $\max r_m \ll M/(1-M^2)^{1/2} k$. В этом случае можно пренебречь эффектами, связанными с конечной шириной пучка. Тогда, частное решение неоднородного уравнения (2) имеет вид

$$p_{\omega}^{(0)} \approx i \frac{\Gamma Q k}{2\pi s^2 M} \left\{ \sum_{m=1}^N \exp\left[i \frac{k}{M} (z - z_m)\right] \right\} K_0\left(\frac{\sqrt{1-M^2}}{M} kr\right).$$

Здесь $K_0(t)$ — функция Макдональда. В последующих выкладках коэффициент, стоящий при функции Макдональда, будем обозначать через C_1 .

Вычислим теперь интеграл

$$I = \int d^2 \mathbf{r}' d^2 \mathbf{r}'' p_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}') p_{\omega}^{(0)*}(\mathbf{r}'') B(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') e^{ik\mathbf{n}(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}')},$$

входящий в выражение для углового распределения спектральной плотности энергии излучения (9). Здесь $p_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}) = C_1 K_0(ar) e^{ikz/M}$, $a = k(1-M^2)^{1/2}/M$, $\text{Im} a = 0$. Удобно перейти к новым переменным

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r}'' = \mathbf{r}, \quad (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')/2 = \mathbf{R}.$$

Тогда $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}/2$; $\mathbf{r}'' = \mathbf{R} - \mathbf{r}/2$; $d^2 \mathbf{r}' d^2 \mathbf{r}'' = d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{R}$ и, следовательно,

$$I = |C_1|^2 \int d^2 \mathbf{r} B(\mathbf{r}) e^{ik\mathbf{n}\mathbf{r}} \int d^2 \mathbf{R} K_0(a|\mathbf{R} + \mathbf{r}/2|) K_0(a|\mathbf{R} - \mathbf{r}/2|).$$

Воспользовавшись теоремой о сложении цилиндрических функций [4], можно представить двумерный интеграл от функций Макдональда в этом выражении в виде суммы одномерных интегралов:

$$F(ar/2) \equiv a^2 \int d^2 \mathbf{R} K_0(a|\mathbf{R} + \mathbf{r}/2|) K_0(a|\mathbf{R} - \mathbf{r}/2|) \equiv \\ \equiv 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left\{ K_n^2(ar/2) \int_0^{ra/2} dR R I_n^2(R) + I_n^2(ar/2) \int_{ra/2}^{\infty} dR R K_n^2(R) \right\},$$

где $I_n(R)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка,

Поскольку в рассматриваемой модели имеется естественный пространственный масштаб — радиус корреляции ρ , то удобно перейти к безразмерным пространственным переменным. В этом случае функция корреляции принимает вид $b(r/\rho) \equiv B(r)$. Кроме

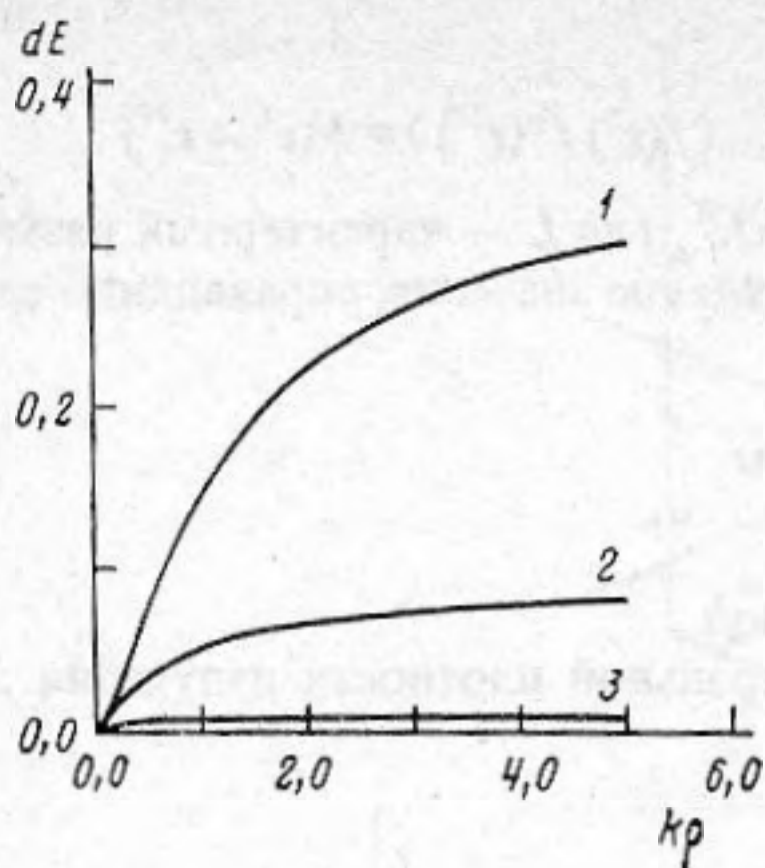


Рис. 2

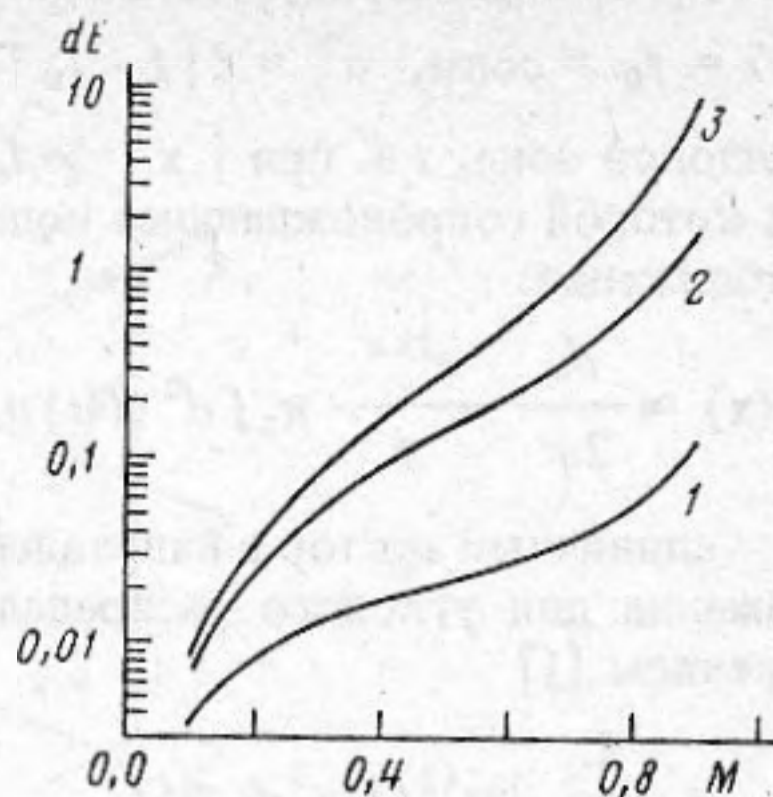


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость спектральной плотности энергии переходного излучения при $\nu = 0$ от параметра $k\rho$ при различных значениях числа Маха M . Кривая 1 соответствует $M = 0,5$; 2 — $M = 0,3$; 3 — $M = 0,1$

Рис. 3. Зависимость спектральной плотности энергии переходного излучения при $\nu = 0$ от числа Маха при различных значениях параметра $k\rho$. Кривая 1 соответствует $k\rho = 0,2$; 2 — $k\rho = 1$; 3 — $k\rho = 5$

Рис. 4. Нормированное угловое распределение энергии переходного излучения при различных числах Маха. Кривая 1 соответствует числу Маха $M = 0,01$ и значениям параметра $k\rho = 1$, кривая 2 соответствует $M = 0,99$ и $k\rho = 1$, кривая 3 соответствует $M = 0,99$ и $k\rho = 10$. При малых M или малых $k\rho$ кривая проходит вблизи кривой 1

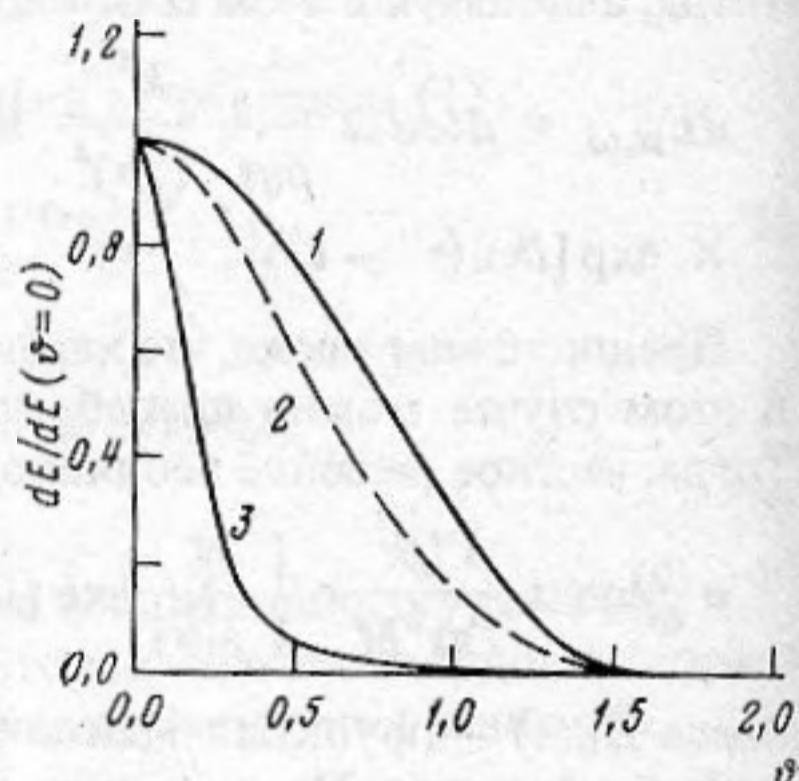


Рис. 4

того, в сферической системе координат $\mathbf{n} = \{ \cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta \}$, $\mathbf{r} = \{ r \cos\varphi, z \sin\varphi, 0 \}$. Тогда получаем

$$I = 2\pi \frac{|C_1|^2}{a^2} \int_0^\infty dr r b(r/\rho) J_0(kr \sin\vartheta) F(ar/2),$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Удобно сделать здесь замену $t = ar/2$, т.е. $dr = 2dt/a$, $a \neq 0$. При этом интеграл I принимает следующий вид:

$$I = 8\pi \frac{|C_1|^2}{a^4} \int_0^\infty dt t b(2t/a\rho) J_0(2kt \sin\vartheta/a) F(t).$$

Собрав вместе результаты вычислений, получим окончательное выражение для спектральной плотности энергии переходного излучения:

$$dE_{n,\omega} = d\omega d\Omega \frac{\Gamma^2 Q^2}{\pi^3 s^5 \rho_0} \frac{M^2}{(1-M^2)} \cos^2 \nu \sum_{m,n=1}^N \exp[i(z_n - z_m)K/M] \times \\ \times \int_0^\infty dt t b(2Mt/k\rho\sqrt{1-M^2}) J_0(2Mt \sin\nu/\sqrt{1-M^2}) F(t). \quad (10)$$

В качестве иллюстрации представим результаты расчетов по формуле (10) для модельной функции $b(t) = e^{-t}$ в случае одного источника.

На рис. 2 показана зависимость спектральной плотности энергии излучения вперед от параметра $k\rho$ при различных значениях числа Маха M . Видно, что при $k\rho \rightarrow \infty$ значение плотности энергии стремится к конечному значению, зависящему от M , что связано с тем, что для очень коротких длин волн статистические свойства экрана перестают быть существенными. На рис. 3 в логарифмическом масштабе представлено поведение плотности энергии как функции числа Маха. Как и следовало ожидать, наблюдается резкий рост эффективности излучения при $M \rightarrow 1$, когда открывается черенковский канал излучения. Наконец, на рис. 4 приведено угловое распределение энергии излучения для различных чисел Маха. С ростом числа Маха диаграмма направленности излучения становится более узкой при условии, что $k\rho$ достаточно велико.

Переходное излучение может стать весьма значительным, если экран пересекает пучок источников, движущихся с близкими скоростями. При определенных соотношениях между параметрами пучка и длинами излучаемых волн наблюдается когерентное усиление переходного излучения.

Спектральная плотность энергии излучения пучка, содержащего достаточно большое количество источников, может быть получена из формулы (10) усреднением по начальным координатам источников

$$dE_{\mathbf{n},\omega} = dE_{\mathbf{n},\omega}^{(1)} \left\langle \sum_{m,n=1}^N \exp[i(z_n - z_m)k/M] \right\rangle. \quad (11)$$

Здесь $dE_{\mathbf{n},\omega}^{(1)}$ — энергия излучения одного источника.

Если положения источников в пучке статистически независимы, то для усреднения можно воспользоваться одинарной плотностью вероятности $w_1(z)$ начального положения источников. Действительно, в этом случае парная плотность вероятности положений источников расщепляется на произведение одинарных $w_2(z_m, z_n) = w_1(z_m)w_1(z_n)$ [2, 5]. Выделяя из двойной суммы в выражении (11) N слагаемых, для которых $m=n$, и перегруппировывая остальные, получим

$$dE_{\mathbf{n},\omega} = dE_{\mathbf{n},\omega}^{(1)} \left\{ N + (N^2 - N) \left| \int dz w_1(z) e^{izk/M} \right|^2 \right\}. \quad (12)$$

В выражении (12) некогерентной составляющей излучения соответствует первое слагаемое, когерентной — второе. При увеличении числа источников в пучке некогерентная составляющая растет линейно, а когерентная составляющая — квадратично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов В.И., Сухоруков А.И. Переходное излучение акустических волн // УФН. 1985. Т. 147. Вып. 1. С. 83–115.
2. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
3. Радиационная акустика / Под ред. Лямшева Л.М. М.: Наука, 1987.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977.
5. Павлов В.И., Сухоруков А.И. О когерентном возбуждении поверхностных волн в жидком гелии нейтронами // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. Вып. 2 (8). С. 527–529.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
03.12.91

ACOUSTIC TRANSITION RADIATION FROM SOURCES
PASSING THROUGH RANDOM SCREEN

The uniform subsonic motion of sources without natural modulation frequency in fluids near inhomogeneities is known to be accompanied by the radiation of acoustic waves. The mechanism of this radiation is explained by rearrangement of the intrinsic field of a source when it moves near inhomogeneities. This effect is called transition (or diffraction) radiation.

This article deals with the radiation of acoustic waves by a beam of particles passing through a random screen (RS).

A beam on N particles travelling along the z -axis of an infinite RS is considered. The beam particles transfer some of their energy to the fluid by the thermal mechanism of energy conversion. The quantity of heat released per unit time along the beam track is assumed to be constant.

The radiation field is determined by the value of its function of transparence evaluated in the plane of the screen, i.e. the screen modulates accompanying field of the source according to its transparence function.

The dependence of radiated spectral power on the characteristics of the screen and sources is found out.