АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 38 1992 Вып. 5

УДК 534.4

© 1992 г. **И.А. Урусовский**

О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Задача дифракции плоской гармонической звуковой волны на произвольной акустически мягкой неровной поверхности на основе подхода Десанто и следуя Уитману и Шверингу сведена к интегральному уравнению для пространственного сплошного спектра функции, равной отношению поля на поверхности к его кирхгофовскому значению без затенений. Ядро уравнения и пространственный спектр дифрагированного поля выражены через обобщенные бесселевы функции. Для решения уравнения пригоден метод малых возмущений. Получены уточненные геометроакустические выражения для амплитуд дифрагированного спектра, остающиеся конечными и для скользящей дифрагированной волны.

В работе [1] рассмотрена плоская задача дифракции волн на акустически мягкой неровной периодической поверхности с использованием подхода Десанто [2] и предварительным выделением из нормальной производной искомого звукового давления на рассеивающей поверхности кирхгофовского фактора, полученного по методу касательной плоскости [3]. При этом на основе точного решения были получены уточненные геометроакустические выражения для амплитуд дифрагированных спектров, остающиеся конечными и для скользящих спектров. В настоящей статье дается обобщение полученных результатов для произвольной акустически мягкой дифференцируемой поверхности.

Рассмотрим сначала плоский случай дифракции падающей плоской волны звукового давления

$$p_i(x, z) = \exp\left[i\left(k_x^0 x - k_z^0 z\right)\right], \tag{1}$$

где $k_z^0 = \sqrt{k^2 - (k_x^0)^2}$; $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\, k_z^0 \geqslant 0$, k – волновое число, x и z – декартовы координаты, на неровной поверхности $z = \zeta(x)$. Следуя Десанто, исходим из теоремы Грина

$$\oint \left[p(x, z) \frac{\partial}{\partial n} G^{\pm}(x, z) - G^{\pm}(x, z) \frac{\partial}{\partial n} p(x, z)\right] ds = 0 \tag{2}$$

с функцией Грина в виде плоской волны

$$G^{\pm}(x, z) = \exp\left[i\left(-k_x x \pm k_z z\right)\right]. \tag{3}$$

Здесь $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2}$; $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\, k_z \geqslant 0$; $p(x, z)$ – полное звуковое давление, $\frac{\partial}{\partial n} p(x, z)$ – его производная по внутренней нормали к замкнутому контуру интегрирования, проходящему по неровной поверхности от $x = -\infty$ до $x = +\infty$ и в обратную сторону – по прямой $z = \mathrm{const} \geqslant \max \zeta(x)$ над всеми неровностями поверхности, где дифрагированное поле p_r, дополняющее падающее поле p_i до полного, $p = p_i + p_r$, представимо в виде суперпозиции уходящих плоских волн

$$p_r(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\kappa_x) \exp\left[i\left(\kappa_x x + \kappa_z z\right)\right] d\kappa_x \tag{4}$$

при $\kappa_z = \sqrt{k^2 - \kappa_x^2}$; Re, Im $\kappa_z \geqslant 0$. Учитывая граничное условие $p = 0$ на дифрагирующей поверхности, после подстановки в (2) выражений (1), (3) и (4) и простого интегрирования по прямолинейной части контура интегрирования, найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i(k_x x \pm k_z z)\right] \left[\frac{1}{n_z(x,z)} \frac{\partial}{\partial n} p(x,z)\right]_{z=\zeta(x)} dx = \begin{cases} -4\pi i k_z^0\, \delta(k_x^0 - k_x), \\ 4\pi i k_z A(k_x), \end{cases} \tag{5}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$, $n_z[x, \zeta(x)]$ — проекция внутренней нормали на ось z; $n_z > 0$.

На дифрагирующей поверхности в приближении Кирхгофа

$$\left[\frac{1}{n_z} \frac{\partial p}{\partial n}\right]_{\text{Кирх.}} = -2i\left[k_z^0 + k_x^0 \zeta'(x)\right] p_i[x, \zeta(x)].$$

Учитывая это и следуя [4], будем искать неизвестную подынтегральную функцию в левой части равенства (5) в виде

$$\left[\frac{1}{n_z(x,z)} \frac{\partial p(x,z)}{\partial n}\right]_{z=\zeta(x)} = -2i\left[k_z^0 + k_x^0 \zeta'(x)\right] p_i[x, \zeta(x)]\,[1 + W(x)], \tag{6}$$

где $W(x)$ — подлежащая определению функция x со спектральным представлением

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha) \exp(i\alpha x)\, d\alpha. \tag{7}$$

Подстановка соотношения (6) в уравнение (5) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[k_z^0 + k_x^0 \zeta'(x)\right] \exp\left[-i(k_z^0 \mp k_z)\zeta(x) + i(k_x^0 - k_x)x\right] [1 + W(x)]\, dx = \begin{cases} 2\pi k_z^0\, \delta(k_x^0 - k_x), \\ -2\pi k_z A(k_x). \end{cases} \tag{8}$$

Воспользуемся здесь разложением в интеграл Фурье

$$\exp\left[-i\kappa\zeta(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} C(\kappa, q) \exp(iqx)\, dq, \tag{9}$$

где

$$C(\kappa, q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\kappa\zeta(x) - iqx\right] dx. \tag{10}$$

Из формулы (9) и получающегося ее дифференцированием равенства

$$\kappa\zeta'(x) \exp\left[-i\kappa\zeta(x)\right] = -\int_{-\infty}^{\infty} qC(\kappa, q) \exp(iqx)\, dq$$

следует разложение

$$\left[k_z^0 + k_x^0 \zeta'(x)\right] \exp\left[-i\kappa\zeta(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(k_z^0 - k_x^0 \frac{q}{\kappa}\right) C(\kappa, q) \exp(iqx)\, dq.$$

Подстановка его при $\kappa = k_z^0 \mp k_z$ и выражения (7) в формулу (8) после интегрирования сначала по x, затем по q, приводит к уравнениям

$$\left(k_z^0 - k_x^0 \frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 \mp k_z}\right) C\left(k_z^0 \mp k_z \quad k_x - k_x^0\right) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha)\left(k_z^0 - k_x^0 \frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 \mp k_z}\right) C\left(k_z^0 \mp k_z,\ k_x - k_x^0 - \alpha\right) d\alpha =$$

$$= \begin{cases} k_z\, \delta\left(k_x^0 - k_x\right), \\ -k_z\, A\left(k_x\right). \end{cases} \tag{11}$$

Выражение (10) можно написать в виде

$$C(\kappa, q) = r(\kappa)\, \delta(q) + \widetilde{C}(\kappa, q), \tag{12}$$

где

$$\widetilde{C}(\kappa, q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-i\kappa\zeta(x)\right] - r(\kappa) \right\} \exp(-iqx)\, dx,$$

$r(\kappa) = \overline{\exp\left[-i\,\kappa\zeta(x)\right]}$, черта означает усреднение по x.

При малых κ очевидны разложения

$$r(\kappa) = 1 - i\kappa\, \overline{\zeta(x)} - \frac{\kappa^2}{2!}\, \overline{\zeta^2(x)} + \ldots + \frac{(-i\kappa)^m}{m!}\, \overline{\zeta^m(x)} + \ldots,$$

$$\widetilde{C}(\kappa, q) = -i\kappa\, [\zeta]_q - \frac{\kappa^2}{2!}\, [\zeta^2]_q + \ldots + \frac{(-i\kappa)^m}{m!}\, [\zeta^m]_q + \ldots, \tag{13}$$

где $[\zeta^m]_q = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left[\zeta^m(x) - \overline{\zeta^m(x)}\right] \exp(iqx)\, dx,\ [\zeta]_q = [\zeta^1]_q.$

Подставив (12) в (11) при соответственных значениях κ и q, получим

$$A(k_x) = -r\left(2k_z^0\right) \delta\left(k_x^0 - k_x\right) + \widetilde{A}(k_x), \tag{14}$$

$$\widetilde{A}(k_x) = -\frac{k_z^0}{k_z} \left\{ \left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0} \frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 + k_z}\right) \widetilde{C}\left(k_z^0 + k_z,\ k_x - k_x^0\right) + \right.$$

$$+ r\left(k_z^0 + k_z\right) w\left(k_x - k_x^0\right) + \int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha)\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0} \frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 + k_z}\right) \times$$

$$\left. \widetilde{C}\left(k_z^0 + k_z,\ k_x - k_x^0 - \alpha\right) d\alpha \right\}, \tag{15}$$

$$0 = \frac{k_z^0}{k_z} \left[\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0} \frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 - k_z}\right) \widetilde{C}\left(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0\right) + \right.$$

$$+ r\left(k_z^0 - k_z\right) w\left(k_x - k_x^0\right) + \int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha)\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0} \frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 - k_z}\right) \times$$

$$\left. \times\ \widetilde{C}\left(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0 - \alpha\right) d\alpha \right]. \tag{16}$$

Для раскрытия неопределенности типа 0/0 сложим соответственные части равенств (15) и (16). Тогда получим для спектральной амплитуды сплошной части пространственного дифрагированного спектра выражение

$$\widetilde{A}(k_x) = \frac{k_z^0}{k_z}\left\{ [(1-\frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x-k_x^0}{k_z^0-k_z})\,\widetilde{C}(k_z^0-k_z,\ k_x-k_x^0) - \right.$$

$$-(1-\frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x-k_x^0}{k_z^0+k_z})\,\widetilde{C}(k_z^0+k_z,\ k_x-k_x^0)] +$$

$$+w(k_x-k_x^0)\,[r(k_z^0-k_z)-r(k_z^0+k_z)] +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha)\,[(1-\frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x-k_x^0-\alpha}{k_z^0-k_z})\,\widetilde{C}(k_z^0-k_z, k_x-k_x^0-\alpha) -$$

$$\left. -(1-\frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x-k_x^0-\alpha}{k_z^0+k_z})\,\widetilde{C}(k_z^0+k_z,\ k_x-k_x^0-\alpha)]\,d\alpha \right\}, \tag{17}$$

в котором разности, содержащиеся в квадратных скобках, стремятся к нулю как k_z при $k_z \to 0$. В этом пределе

$$\widetilde{A}(k_x)|_{k_z=0} = -2\left\{ [\frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x-k_x^0}{k_z^0}\quad \widetilde{C}(k_z^0, k_x-k_x^0) + \right.$$

$$+(1-\frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x-k_x^0}{k_z^0})\,k_z^0\frac{d}{d\kappa}\quad \widetilde{C}(\kappa, k_x-k_x^0)] + r'(\kappa)\,k_z^0\,w(k_x-k_x^0) +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha)\,[\frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x-k_x^0-\alpha}{k_z^0}\quad \widetilde{C}(k_z^0, k_x-k_x^0-\alpha) +$$

$$\left. +(1-\frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x-k_x^0-\alpha}{k_z^0})\,k_z^0\frac{d}{d\kappa}\quad \widetilde{C}(\kappa, k_x-k_x^0-\alpha)]\,d\alpha \right\}_{\kappa=k_z^0}, \tag{18}$$

где $r'(\kappa) = -i\,\overline{\zeta(x)\exp[-i\kappa\zeta(x)]} = -i\,\overline{\zeta(x)} - \kappa\overline{\zeta^2(x)} + \ldots + (-i)^m\kappa^{m-1}\overline{\zeta^m(x)}\times$ $\times\frac{1}{(m-1)!} + \ldots$. Подстановка выражения (14) в формулу (4) приводит к выражению

$$p_r(x,z) = -r(2k_z^0)\exp[i(k_x^0x+k_z^0z)] + \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{A}(k_x)\exp[i(k_xx+k_zz)]\,dk_x$$

для рассеянного поля, где спектральная амплитуда сплошного спектра представлена формулами (15), (17), (18), а функция $w(\alpha)$ согласно (16) находится из решения интегрального уравнения

$$w(k_x-k_x^0) = -\frac{1}{r(k_z^0-k_z)}\,[(1-\frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x-k_x^0}{k_z^0-k_z})\,\widetilde{C}(k_z^0-k_z, k_x-k_x^0) +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha)\,(1-\frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x-k_x^0-\alpha}{k_z^0-k_z})\,\widetilde{C}(k_z^0-k_z,\ k_x-k_x^0-\alpha)\,d\alpha]. \tag{19}$$

Это интегральное уравнение можно решить методом последовательных приближений. Подстановка в формулы (15) и под интегралом в (17) – (19) самого грубого приближения $w = 0$ приводит соответственно к обычному кирхгофовскому приближению для спектральной амплитуды сплошного спектра

$$\widetilde{A}^{(k)}(k_x) = -\frac{k_z^0}{k_z}\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 + k_z}\right)\widetilde{C}(k_z^0 + k_z, k_x - k_x^0)$$

и к уточненному геометроакустическому приближению

$$\widetilde{A}(k_x) \approx \widetilde{A}_g(k_x) = \frac{k_z^0}{k_z}\Big[\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 - k_z}\right)\widetilde{C}(k_z^0 - k_z, k_x - k_x^0)\frac{r(k_z^0 + k_z)}{r(k_z^0 - k_z)} -$$

$$-\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 + k_z}\right)\widetilde{C}(k_z^0 + k_z, k_x - k_x^0)\Big],$$

остающемуся конечным и при $k_z \to 0$, когда в пределе

$$\widetilde{A}_g(k_x)|_{k_z = 0} = 2\left\{\left[\frac{r'(\kappa)}{r(\kappa)}\left(k_z^0 - k_x^0\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0}\right) - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0}\right]\widetilde{C}(k_z^0, k_x - k_x^0) -\right.$$

$$\left.-\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0}\right)k_z^0\frac{d}{d\kappa}\widetilde{C}(\kappa, k_x - k_x^0)\right\}_{\kappa = k_z^0}.$$

Более точные выражения мы получим, положив в формулах (15), (17) и (18) согласно (19) приближенно

$$w(k_x - k_x^0) \approx -\frac{1}{r(k_z^0 - k_z)}\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 - k_z}\right)\widetilde{C}(k_z^0 - k_z, k_x - k_x^0) \tag{20}$$

и

$$w(\alpha) \approx -\frac{1}{r(k_z^0 - \chi)}\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{\alpha}{k_z^0 - \chi}\right)\widetilde{C}(k_z^0 - \chi, \alpha), \tag{21}$$

где $\chi = \sqrt{(k_z^0)^2 - (2k_x^0 + \alpha)\alpha}$. При этом для формулы (17) получим

$$\widetilde{A}(k_x) = \widetilde{A}_g(k_x) - \frac{k_z^0}{k_z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r(k_z^0 - \chi)}\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{\alpha}{k_z^0 - \chi}\right)\times$$

$$\times\ \widetilde{C}(k_z^0 - \chi, \alpha)\Big[\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 - k_z}\right)\widetilde{C}(k_z^0 - k_z, k_x - k_x^0 - \alpha) -$$

$$-\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 + k_z}\right)\widetilde{C}(k_z^0 + k_z, k_x - k_x^0 - \alpha)\Big]d\alpha. \tag{22}$$

Для пологих поверхностей согласно формуле (13) в формулах (17)–(22) можно положить $\widetilde{C}(\kappa, q) \approx -i\kappa\,[\zeta]_q$.

Переходя к рассмотрению дифракций плоской волны вида

$$p_i(x, y, z) = \exp\left[i(k_x^0 x + k_y^0 y - k_z^0 z)\right] \tag{23}$$

на неровной поверхности $z = \zeta(x, y)$, зависящей уже от двух декартовых координат x и y, вместо формул (6) и (7) имеем

$$\left[\frac{1}{n_z(x, y, z)}\frac{\partial}{\partial n}p(x, y, z)\right]_{z = \zeta(x, y)} = -2i\left[k_z^0 + k_x^0 + \frac{\partial}{\partial x}\zeta(x, y) +\right.$$

$$\left.+\,k_y^0\frac{\partial}{\partial y}\zeta(x, y)\right]p_i[x, y, \zeta(x, y)]\,[1 + W(x, y)] \tag{24}$$

и

$$W(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} w(\alpha, \beta) \exp\, [i(\alpha x + \beta y)]\, d\alpha d\beta,$$

где $n_z[x, y, \zeta(x, y)]$ – проекция внутренней нормали к неровной поверхности на ось z; $n_z > 0$. По аналогии с плоской задачей найдем уравнение для $w(\alpha, \beta)$:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} w(\alpha, \beta) \left(k_z^0 - k_x^0 \frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 \mp k_z} - k_y^0 \frac{k_y - k_y^0 - \beta}{k_z^0 \mp k_z}\right) C(k_z^0 \mp k_z,$$

$$k_x - k_x^0 - \alpha,\ k_y - k_y^0 - \beta)\, d\alpha d\beta \ +$$

$$+ \left(k_z^0 - k_x^0 \frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 \mp k_z} - k_y^0 \frac{k_y - k_y^0}{k_z^0 \mp k_z}\right) C(k_z^0 \mp k_z, k_x - k_x^0, k_y - k_y^0) =$$

$$= \begin{cases} k_z^0\, \delta(k_x^0 - k_x)\, \delta(k_y^0 - k_y), \\ -k_z A(k_x, k_y). \end{cases} \tag{25}$$

Здесь

$$C(\kappa, q, s) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\, [-i\kappa\zeta(x, y) - iqx - isy]\, dxdy, \tag{26}$$

$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$; Re, Im$k_z \geqslant 0$; $A(k_x, k_y)$ – пространственный спектр дифрагированного поля $p_r(x, y, z)$ в области, расположенной над всеми неровностями поверхности:

$$p_r(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(\kappa_x, \kappa_y) \exp\, [i(\kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z)]\, d\kappa_x d\kappa_y \tag{27}$$

при $\kappa_z = \sqrt{k^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2}$; Re, Im$\kappa_z \geqslant 0$. Выражение (26) можно написать в виде

$$C(\kappa, q, s) = r(\kappa)\, \delta(q)\, \delta(s) + \widetilde{C}(\kappa, q, s), \tag{28}$$

где

$$\widetilde{C}(\kappa, q, s) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \{\exp\, [-i\kappa\zeta(x, y)] - r(\kappa)\}\, \exp\, [-i(qx + sy)]\, dxdy,$$

$r(\kappa) = \overline{\exp\, [-i\kappa\zeta(x, y)]}$, черта означает усреднение по x и y. При малых κ очевидны разложения

$$r(\kappa) = 1 - i\kappa\overline{\zeta(x, y)} - \frac{\kappa^2}{2!}\overline{\zeta^2(x, y)} + \ldots + \frac{(-i)^m}{m!}\overline{\zeta^m(x, y)} + \ldots,$$

$$\widetilde{C}(\kappa, q, s) = -i\kappa\, [\zeta]_{q,s} - \frac{\kappa^2}{2!}[\zeta^2]_{q,s} + \ldots + \frac{(-i\kappa)^m}{m!}[\zeta^m]_{q,s} + \ldots, \tag{29}$$

где

$$[\zeta^m]_{q,s} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} [\zeta^m(x, y) - \overline{\zeta^m(x, y)}]\, \exp\, (iqx + isy)\, dxdy,$$

$[\zeta]_{q,s} = [\zeta^1]_{q,s}$. Подставив (28) в (25) при соответственных значениях κ и q, s, получим

$$A(k_x, k_y) = -r(2k_z^0)\,\delta(k_x - k_x^0)\,\delta(k_y - k_y^0) + \widetilde{A}(k_x\ k_y), \tag{30}$$

$$\widetilde{A}(k_x, k_y) = -\frac{k_z^0}{k_z}\left\{ w(k_x - k_x^0, k_y - k_y^0)\, r(k_z^0 + k_z) + \right.$$
$$+ \left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\,\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 + k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\,\frac{k_y - k_y^0}{k_z^0 + k_z}\right) \widetilde{C}(k_z^0 + k_z, k_x - k_x^0, k_y - k_y^0) +$$
$$+ \iint\limits_{-\infty}^{\infty} w(\alpha,\beta)\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\,\frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 + k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\,\frac{k_y - k_y^0 - \beta}{k_z^0 + k_z}\right) \times$$
$$\left. \times\, \widetilde{C}(k_z^0 + k_z, k_x - k_x^0 - \alpha, k_y - k_y^0 - \beta)\, d\alpha d\beta \right\}, \tag{31}$$

$$0 = \frac{k_z^0}{k_z}\left\{ w(k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0)\, r(k_z^0 - k_z) + \right.$$
$$+ \left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\,\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 - k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\,\frac{k_y - k_y^0}{k_z^0 - k_z}\right) \widetilde{C}(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0,$$
$$k_y - k_y^0) + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int w(\alpha,\beta)\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\,\frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 - k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0} \right.\times$$
$$\left. \times\, \frac{k_y - k_y^0 - \beta}{k_z^0 - k_z}\right) \widetilde{C}(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0 - \alpha,\ k_y - k_y^0 - \beta)\, d\alpha d\beta \Big\}. \tag{32}$$

Для раскрытия неопределенности типа 0/0 сложим соответственные части равенств (31) и (32). Тогда получим для спектральной амплитуды сплошной части пространственного дифрагированного спектра выражение

$$\widetilde{A}(k_x, k_y) = \frac{k_z^0}{k_z}\left\{ w(k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0)\,[r(k_z^0 - k_z) - \right.$$
$$- r(k_z^0 + k_z)] + \left[\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\,\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 - k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\,\frac{k_y - k_y^0}{k_z^0 - k_z}\right) \times\right.$$
$$\times\, \widetilde{C}(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0) - \left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\,\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 + k_z} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{k_y^0}{k_z^0}\,\frac{k_y - k_y^0}{k_z^0 + k_z}\right) \widetilde{C}(k_z^0 + k_z,\ k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0)\right] +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int w(\alpha,\beta)\left[\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\,\frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 - k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\,\frac{k_y - k_y^0 - \beta}{k_z^0 - k_z}\right) \times\right.$$
$$\times\, \widetilde{C}(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0 - \alpha,\ k_y - k_y^0 - \beta) -$$
$$- \left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\,\frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 + k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\,\frac{k_y - k_y^0 - \beta}{k_z^0 + k_z}\right) \widetilde{C}(k_z^0 + k_z,$$
$$\left. k_x - k_x^0 - \alpha,\quad k_y - k_y^0 - \beta)\right]\, d\alpha d\beta \Big\}, \tag{33}$$

в котором разности, содержащиеся в квадратных скобках, стремятся к нулю как

k_z при $k_z \to 0$. В этом пределе

$$\tilde{A}(k_x, k_y)|_{k_z=0} = -2\, k_z^0 \, \{ w(k_x - k_x^0, k_y - k_y^0)\, r'(\kappa)|_{\kappa=k_z^0} +$$

$$+ [(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\, \frac{k_x - k_x^0}{k_z^0} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\, \frac{k_y - k_y^0}{k_z^0})\, \frac{d}{d\kappa}\, \tilde{C}(\kappa, k_x - k_x^0,$$

$$k_y - k_y^0)|_{\kappa=k_z^0} + \frac{k_x^0 (k_x - k_x^0) + k_y^0 (k_y - k_y^0)}{(k_z^0)^3} \times \tilde{C}(k_z^0\ \ k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0)] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int w(\alpha, \beta)\, [(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\, \frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0} - \frac{k_y^0}{k_z^0} \times$$

$$\times \frac{k_y - k_y^0 - \beta}{k_z^0}\,)\, \frac{d}{d\kappa}\, \tilde{C}(\kappa, k_x - k_x^0 - \alpha,\ k_y - k_y^0 - \beta)|_{\kappa=k_z^0} +$$

$$+ \frac{k_x^0 (k_x - k_x^0 - \alpha) + k_y^0 (k_y - k_y^0 - \beta)}{(k_z^0)^3} \times$$

$$\times\ \tilde{C}(k_z^0,\ k_x - k_x^0 - \alpha,\ k_y - k_y^0 - \beta)\, d\alpha d\beta \}, \tag{34}$$

где

$$r'(\kappa) = -i\overline{\xi(x\ y)\exp[-i\kappa\,\zeta(x\ y)]} = -i\overline{\zeta(x, y)} - \kappa\, \overline{\zeta^2(x, y)} +$$

$$+ \ldots + \frac{(-i)^m}{(m-1)!}\, \kappa^{m-1}\, \overline{\zeta^m(x, y)} + \ldots .$$

Подстановка выражения (30) в формулу (27) приводит к выражению

$$P_r(x, y, z) = -r\,(2\, k_z^0) \exp[i\,(k_x^0 x + k_y^0 y + k_z^0 z)] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \tilde{A}(k_x, k_y) \exp[i\,(k_x x + k_y y + k_z z)]\, dk_x dk_y$$

для рассеянного поля, где спектральная амплитуда сплошного спектра $\tilde{A}(k_x, k_y)$ представлена формулами (31), (33), (34), а функция $w(\alpha, \beta)$ согласно (32) находится из решения интегрального уравнения

$$w(k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0) = -\frac{1}{r\,(k_z^0 - k_z)}\, [(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\, \frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 - k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\, \frac{k_y - k_y^0}{k_z^0 - k_z}) \times$$

$$\times\ \tilde{C}(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0) + \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int w(\alpha, \beta)\, (1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\, \frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 - k_z} -$$

$$- \frac{k_y^0}{k_z^0}\, \frac{k_y - k_y^0 - \beta}{k_z^0 - k_z}\,)\, \tilde{C}(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0 - \alpha,\ k_y - k_y^0 - \beta)\, d\alpha\, d\beta], \tag{35}$$

которое можно решать методом последовательных приближений. Подстановка в формулы (31) и под интегралом в (33) – (35) самого грубого приближения $w = 0$ приводит соответственно к обычному кирхгофовскому приближению для спектральной амплитуды сплошного спектра

$$\tilde{A}^{(k)}(k_x, k_y) = -\frac{k_z^0}{k_z}\, (1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\, \frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 + k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\, \frac{k_y - k_y^0}{k_z^0 + k_z}) \times$$

$$\times\ \tilde{C}(k_z^0 + k_z,\ k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0)$$

и к уточненному геометроакустическому приближению $\widetilde{A}(k_x, k_y) \approx \widetilde{A}_g(k_x, k_y)$,

$$\widetilde{A}_g(k_x, k_y) = \frac{k_z^0}{k_z}\left[\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 - k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\frac{k_y - k_y^0}{k_z^0 - k_z}\right) \times\right.$$

$$\times \widetilde{C}(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0)\frac{r(k_z^0 + k_z)}{r(k_z^0 - k_z)} - \left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 + k_z} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{k_y^0}{k_z^0}\frac{k_y - k_y^0}{k_z^0 + k_z}\right)\widetilde{C}(k_z^0 + k_z,\ k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0)\right],$$

остающемуся конечным и при $k_z \to 0$, когда в пределе

$$\widetilde{A}_g(k_x, k_y)\,|_{k_z = 0} = 2\left\{\left(k_z^0 - k_x^0\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0} - k_y^0\frac{k_y - k_y^0}{k_z^0}\right) \times\right.$$

$$\times\left[\widetilde{C}(k_z^0,\ k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0)\frac{1}{r(\kappa)}\frac{d}{d\kappa}r(\kappa) - \frac{d}{d\kappa}\widetilde{C}(\kappa, k_x - k_x^0,\right.$$

$$\left.\left. k_y - k_y^0)\right] - \frac{k_x^0(k_x - k_x^0) + k_y^0(k_y - k_y^0)}{(k_z^0)^2}\widetilde{C}(k_z^0, k_x - k_x^0, k_y - k_y^0)\right\}_{\kappa = k_z^0}.$$

Более точные выражения мы получим, положив в формулах (31), (33) и (34) согласно (35) приближенно

$$w(k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0) \approx -\frac{1}{r(k_z^0 - k_z)}\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0}{k_z^0 - k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\frac{k_y - k_y^0}{k_z^0 - k_z}\right) \times$$

$$\times \widetilde{C}(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0,\ k_y - k_y^0) \tag{36}$$

и

$$w(\alpha, \beta) \approx -\frac{1}{r(k_z^0 - \chi)}\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{\alpha}{k_z^0 - \chi} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\frac{\beta}{k_z^0 - \chi}\right)\widetilde{C}(k_z^0 - \chi, \alpha, \beta), \tag{37}$$

где $\chi = \sqrt{(k_z^0)^2 - \alpha(2k_x^0 + \alpha) - \beta(2k_y^0 + \beta)}$. При этом для формулы (33) получим

$$\widetilde{A}(k_x, k_y) \approx \widetilde{A}_g(k_x, k_y) - \frac{k_z^0}{k_z}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{1}{r(k_z^0 - \chi)}\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{\alpha}{k_z^0 - \chi} - \right.$$

$$\left. - \frac{k_y^0}{k_z^0}\frac{\beta}{k_z^0 - \chi}\right)\widetilde{C}(k_z^0 - \chi, \alpha, \beta)\left[\left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 - k_z} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{k_y^0}{k_z^0}\frac{k_y - k_y^0 - \beta}{k_z^0 - k_z}\right)\widetilde{C}(k_z^0 - k_z,\ k_x - k_x^0 - \alpha,\ k_y - k_y^0 - \beta) -$$

$$- \left(1 - \frac{k_x^0}{k_z^0}\frac{k_x - k_x^0 - \alpha}{k_z^0 + k_z} - \frac{k_y^0}{k_z^0}\frac{k_y - k_y^0 - \beta}{k_z^0 + k_z}\right)\widetilde{C}(k_z^0 + k_z,$$

$$\left. k_x - k_x^0 - \alpha,\ k_y - k_y^0 - \beta)\right]\,d\alpha\,d\beta. \tag{38}$$

Для пологих поверхностей согласно формуле (29) в формулах (31)–(38) можно положить $\widetilde{C}(\kappa, q, s) \approx -i\kappa\,[\zeta]_{q,s}$. При этом в случае малых неровностей, удерживая в (38) только линейные по амплитуде неровностей члены, получим $\widetilde{A}(k_x, k_y) = 2ik_z^0[\zeta]_{q,s}$ при $q = k_x - k_x^0$, $s = k_y - k_y^0$, что совпадает с результатом, полученным по методу малых возмущений.

Тeореме взаимности для амплитуд дифрагированных спектров, выражаемой формулой

$$\left(\frac{k_z}{k_z^0}\right)^{1/2} A(k_x, k_y)|_{k_x^0, k_y^0} = \left(\frac{k_z^0}{k_z}\right)^{1/2} A(-k_x^0, -k_y^0)|_{-k_x, -k_y} \ [5],$$

удовлетворяют не только точные значения этих амплитуд, но и кирхгофовские их значения[1] $\tilde{A}^{(k)}(k_x, k_y)$, как легко проверить прямой подстановкой. Точные модифицированные выражения для амплитуд спектров (17) и (33), раскрывающие неопределенность типа 0/0 в случае скользящих направлений рассеяния, получены прибавлением к точным выражениям (15) и (31) соответственно выражений (16) и (32), тождественно равных нулю. Поэтому и модифицированные выражения (17) и (33) также удовлетворяют теореме взаимности. При получении же нового геометроакустического приближения $\tilde{A}_g$ интегральные слагаемые в выражениях (16) и (32) отбрасываются, остатки этих выражений уже не равны нулю и поэтому амплитуды $\tilde{A}_g$ удовлетворяют теореме взаимности лишь приближенно, с относительной точностью порядка квадрата наклонов поверхности. Это цена, требуемая для устранения расходимостей геометроакустического приближения.

Выражаю А.Г. Вороновичу глубокую благодарность за полезные указания и обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Урусовский И.А.* К теории дифракции волн на неровной периодической поверхности // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 4. С. 1005–1012.
2. *DeSanto J.A.* Scattering from a sinusoid: derivation of linear equations for the field amplitudes // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. V. 57. N 5. P. 1195–1197.
3. *Бреховских Л.М.* Дифракция волн на неровной поверхности // ЖЭТФ. 1952. Т. 23. С. 275–304.
4. *Whitman G. and Schwering F.* Scattering by periodic metal surface with sinusoidal height profiles – a theoretical approsch // IEEE Transaction on antennas and propagation. 1977. P. 869–876.
5. *Воронович А.Г.* Рассеяние волн на неровных поверхностях сложного спектрального состава. Докт. диссертация. М.: Институт океанологии АН СССР, 1987. 297 с.

Акустический институт
им. Н.Н. Андреева
Российской Академии наук

Поступила в редакцию
04.06.91

I.A. Urusovskii

ON PLANE WAVE DIFFRACTION ON UNEVEN SURFACE

The problem of diffraction of a plane harmonical sound wave on an arbitrary uneven pressure release surface is reduced to the integral equation for the continuous part of the spatial spectrum of the ratio of the normal velocity on the surface to its Kirchgoff value without the shadowing factor by the use of the DeSanto approach and Whitman and Schwering choice of the unknown function at this surface. The kernel of this equation and the spatial spectrum of the diffracted field are expressed in terms of the generalized Bessel functions. The method of small perturbations is valid for the solution of the equation. More precise corrections to the Kirchgoff amplitudes including simple refined geometrical acoustics expressions for the spectral amplitudes remaining finite for the wave grazing at an uneven surface and derived. These expressions in the case of small roughnesses can be reduced to the ones prescribed by the perturbation method.

---

[1] На это обстоятельство и эту формулу автору указал А.Г. Воронович.