АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 2

УДК 534.

 В.Н. Алексеев, А.Г. Семенов

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА РАССЕЯНИЕ ЗВУКА ДВИЖУЩИМСЯ ТЕЛОМ

В работе вычислены амплитуды рассеяния звука на неоднородностях течения вязкой жидкости при движении в ней сферы с постоянной скоростью и для сферы, центр которой осциллирует. Показано, что более медленный спад скорости сопутствующего течения вязкой жидкости при удалении от тела по сравнению с потенциальным течением и возникновение в среде завихренности в ряде случаев приводит к значительному увеличению амплитуды рассеяния звука.

При движении тела в жидкости частицы среды увлекаются телом и рассеяние звука происходит не только на поверхности самого тела, но и на неоднородностях сопутствующего течения жидкости. В работе [1] были найдены амплитуда и сечение рассеяния звука на неоднородностях течения, вызванного сферой движущейся в идеальной жидкости при произвольном соотношении между радиусом сферы a и длиной волны звука λ. При этом течение жидкости считалось потенциальным. Наиболее последовательный расчет рассеяния звука на сфере малого радиуса, движущейся в идеальной жидкости, был проведен в работе [2]. В линейном приближении по гидродинамическому числу Маха были найдены парциальные амплитуды и сечения как рассеяния звука поверхностью движущегося тела и неоднородностями потенциального течения среды по отдельности, так и полного рассеяния. Было показано, что добавка к парциальной амплитуде рассеяния на движущемся теле без учета рассеяния на течении среды по порядку величины равна парциальной амплитуде рассеяния на неоднородностях течения, а их сумма имеет очень простой вид, и при этом рассеяние носит чисто дипольный характер. Из анализа результатов работ [1, 3] следует, что особенности течения жидкости вблизи и вдали от сферы сильно влияют на характер рассеяния им звука. Поэтому в настоящей работе была предпринята попытка учесть более реальный характер обтекания жидкостью движущегося тела, и в частности принять во внимание вязкость жидкости, поскольку известно, что вязкий режим обтекания особенно существен в непосредственной близости от тела. Кроме того, при малых числах Рейнольдса спадание скорости в жидкости при удалении от тела происходит значительно медленнее, чем при потенциальном обтекании сферы идеальной жидкостью. Фактически это может приводить к увеличению области рассеяния и соответственно к возможному увеличению сечения рассеяния звука.

Вначале рассмотрим рассеяние звука на неоднородностях течения вязкой жидкости, вызванном движущейся сферой малого радиуса. При этом будем полагать, что скорость движения сферы V – постоянна и мала по отношению к скорости звука в среде c, так что гидродинамическое число Маха $M = V/c$ подчиняется неравенству $M \ll 1$. Кроме того, если соответствующее число Рейнольдса $\mathrm{Re} = aV/\nu$ также мало, то обтекание сферы жидкостью будет носить "стоксовый" характер, а распределение скорости $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ в жидкости будет описываться формулой – $\mathbf{U} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ (g\mathbf{V})$ [4]. В системе координат $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}t$, движущейся вместе со сферой, функция $g(r')$ удовлетворяет в этом случае уравнению

$$\operatorname{grad} \Delta'^2 g = 0, \quad (r' > a) \tag{1}$$

и граничным условиям, которые следуют из требования обращения в нуль скорости на поверхности сферы, т.е. при $r' = a$ и $\mathbf{U}' \to -\mathbf{V}$ при $r' \to \infty$. Решение уравнения (1), справедливое во внешней области $r' > a$ и убывающее на бесконечности, может быть найдено в форме $g = ar + b/r$. Определяя с помощью граничных условий неизвестные коэффициенты a и b, находим искомое распределение скорости $\mathbf{U}'(\mathbf{r}')$ в жидкости

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}') = -\mathbf{V} - \frac{a^3}{4}\,\frac{3(\mathbf{Vn})\,\mathbf{n} - \mathbf{V}}{r'^3} + \frac{3a}{4}\,\frac{(\mathbf{Vn})\,\mathbf{n} + \mathbf{V}}{r'}, \tag{2}$$

где $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{V}t)/|\mathbf{r} - \mathbf{V}t|$ — единичный вектор, направленный из центра сферы в точку наблюдения $\mathbf{r}$. Напомним, что в лабораторной системе координат скорость $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ равна $\mathbf{U}' + \mathbf{V}$.

Распространение звука в окрестности движущейся сферы будем описывать, как и в работах [1–3], уравнением типа Лайтхилла. Для монохроматической волны с частотой ω это уравнение записывается так:

$$\Delta p + k^2 p = \frac{2i}{\omega}\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(U_\beta\,\frac{\partial^2 p}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right), \tag{3}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, а p — акустическое давление. Как известно, уравнение (3) справедливо с точностью до линейных членов по гидродинамическому числу Маха и изначально не учитывает ни вязкости, ни изменения энтропии жидкости в результате диссипативных процессов, связанных с теплопроводностью и вязкостью среды. Учет диссипации в нулевом приближении по гидродинамическому числу Маха приводит к затуханию распространяющихся волн. Так, для плоской монохроматической волны вида $p_0 \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$ учет отброшенных членов в уравнении (3) приводит к изменению первоначального волнового числа $k = \omega/c$ и к появлению у него мнимой части, равной, согласно [4],

$$\operatorname{Im} k = \frac{\omega^2}{2c^3}\left[\left(\frac{4}{3}\nu + \frac{\zeta}{\rho}\right) + \lambda(\gamma - 1)\right], \tag{4}$$

где ν, ζ/ρ — коэффициенты вязкости, λ — коэффициент температуропроводности, а $\gamma = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей. Учет этих отброшенных членов по существу приводит к перенормировке волнового числа k в уравнении (3), что и будет предполагаться сделанным всюду ниже. Более общее, чем (3), уравнение Блохинцева — Хоу содержит, кроме того, перекрестные члены — линейные по числу Маха M и пропорциональные первой степени диссипативных коэффициентов. При условии малости этих коэффициентов и числа M эти дополнительные члены оказываются малыми по сравнению с уже присутствующими в уравнении (3) членами и в первом приближении их можно не учитывать. Таким образом, распространение звука в вязкой среде с учетом сопутствующего течения вблизи движущегося тела в выбранном приближении можно также описывать уравнением (3), имея в виду, что завихренность течения теперь отлична от нуля, а распределение скорости в окрестности тела может описываться, например, формулой (2).

Исходя из уравнения (3) найдем теперь волновое поле, рассеянное на неоднородностях течения (2), вызванное движением сферы малого радиуса. Считая, что на сферу падает плоская монохроматическая волна $p_i(\mathbf{r}) = p_0 \exp(ik\mathbf{n}_0\mathbf{r} - i\omega t)$ и имеет место неравенство $ka \ll 1$, воспользуемся борновским приближением для определения амплитуды рассеяния звука на неоднородностях течения вязкой жидкости. Так же, как и в работах [1, 2], амплитуду рассеяния звука f_f на течении $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ можно записать в слечующем виде:

$$f_f = \frac{ikn_{0\alpha}\, n_{0\beta}}{2\pi c} \int\limits_{r' \geqslant a} d^3 r' e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} \left[\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha} - ikn_{0\alpha} U_\beta\right]. \qquad (5)$$

Здесь $\mathbf{n}_0$ – единичный вектор вдоль направления падающей волны, а $\mathbf{q} = k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})$ – "переданный импульс", в котором единичный вектор $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ характеризует направление распространения рассеянных волн. По модулю волновой вектор $\mathbf{q}$ равен $q = 2k \sin(\theta/2)$, где θ – угол рассеяния, определяемый из равенства $\cos\theta = \mathbf{n}\mathbf{n}_0$. Интегрирование в формуле (5) должно выполняться по всей области, занятой течением жидкости, т.е. вне сферы при $r' \geqslant a$. В отличие от работы [1], где течение идеальной жидкости считалось потенциальным и распределение скорости $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ в окрестности сферы бралось в виде

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) \approx \frac{a^3}{2} \frac{3(\mathbf{V}\mathbf{n})\,\mathbf{n} - \mathbf{V}}{r'^3}, \quad (r' \geqslant a), \qquad (6)$$

теперь в формулу (5) следует подставить выражение (2) для скорости вязкого обтекания шара. Заметим, что в этом случае скорость можно формально представить в виде суммы из двух членов $\mathbf{U}(\mathbf{r})$, в которой величина $\mathbf{U}_1$ описывается вторым слагаемым в формуле (2), а $\mathbf{U}_2$ – третьим слагаемым. Напомним, что первый член в формуле (2), равный $-\mathbf{V}$, связан с переносом системы координат и для рассеяния несуществен.

Теперь обратим внимание на то, что по своей структуре выражение для составляющей скорости $\mathbf{U}_1$ аналогично формуле (6) и отличается от нее лишь коэффициентом, который в $(-1/2)$ раз меньше, чем у скорости потенциального течения. Поэтому, представив полную амплитуду рассеяния звука f_f также в виде из двух слагаемых $f_f = f_1 + f_2$, каждое из которых определяется соответствующей компонентой $\mathbf{U}_k$, можно сразу привести выражение для составляющей амплитуды f_1, определяемой течением $\mathbf{U}_1$. Используя основной результат работы [1], в которой найдена амплитуда рассеяния звука на неоднородностях потенциального течения (6), и учитывая упомянутый выше коэффициент $(-1/2)$, находим, что составляющая амплитуды f_1 равна

$$f_1 = \frac{k^2 a^3}{10} \left\{ (\mathbf{M}\mathbf{n}_0)\left[1 + \frac{5}{2}(\mathbf{n}\mathbf{n}_0)\right] - \frac{4}{3}(\mathbf{M}\mathbf{n})\left[1 + \frac{3}{8}(\mathbf{n}\mathbf{n}_0)\right] \right\}. \qquad (7)$$

Составляющая же амплитуды рассеяния звука f_2 рассчитывается на основе формулы (5), в которой скорость $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ берется в виде $\mathbf{U}_2 = 3a[(\mathbf{V}\mathbf{n})\,\mathbf{n} + \mathbf{V}]/4r$. В отличие от $\mathbf{U}_1$ эта составляющая скорости падает с удалением от тела более медленно (как $1/r$), что, с одной стороны, может приводить к увеличению величины интеграла, а с другой – именно она определяет завихренный характер вязкого течения. Действительно, непосредственный расчет показывает, что $\operatorname{rot} \mathbf{U}_1 = 0$, а общая завихренность течения $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{U}$ определяется компонентой скорости $\mathbf{U}_2$ и равна $\mathbf{\Omega} = 3a(\mathbf{V} \times \mathbf{n})/2r^2$.

Подставив в формулу (5) выражение для скорости $\mathbf{U}_2$, соответствующий интеграл можно взять точно и вычислить его при любом значении безразмерного параметра ka. Однако в рассматриваемом случае, $ka \ll 1$, интеграл (5) оценивается значительно проще, если заметить, что второе слагаемое в квадратных скобках подынтегрального выражения (5) в ka раз меньше первого и поэтому им можно в первом приближении пренебречь. Таким образом, подставляя в формулу (5) значение производной скорости $\mathbf{U}_2$, равное

$$\frac{\partial U_{2\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{3a}{4r^2}\left[V_\alpha n_\beta - V_\beta n_\alpha + \delta_{\alpha\beta}(\mathbf{V}\mathbf{n}) - 3 n_\alpha n_\beta (\mathbf{V}\mathbf{n})\right], \qquad (8)$$

и взяв интеграл методом дифференцирования по параметру, находим, что составляющая f_2 амплитуды рассеяния звука на течении $\mathbf{U}_2$ оказывается при условии $ka \ll 1$ приближенно равной

$$f_2 \simeq -\frac{3}{4} a (\mathbf{M}\,\mathbf{n}_0 + \mathbf{M}\,\mathbf{n}). \tag{9}$$

Сравнивая теперь найденные выше выражения (7) и (9), можно видеть, что составляющая f_2 амплитуды рассеяния звука на завихренной части течения в $(ka)^{-2}$ раз больше, чем f_1 и не зависит от частоты. С понижением частоты звука отношение амплитуд таким образом быстро растет. Поскольку суммарная амплитуда рассеяния $f_f = f_1 + f_2$ определяется в этом случае компонентой f_2, а f_1 всего лишь в 2 раза меньше амплитуды рассеяния звука на неоднородностях потенциального течения, то отсюда следует, что учет вязкости жидкости при $ka \ll 1$ приводит к значительному возрастанию амплитуды рассеяния звука. Однако заметим, что аккуратное вычисление отброшенной выше части интеграла (5), связанной со скоростью $\mathbf{U}(r)$, а не ее производной (8), показывает, что на самом деле эта часть не мала и также должна быть учтена. Более того, непосредственное вычисление интеграла (5) с учетом второго слагаемого в его подынтегральном выражении приводит к формальной расходимости интеграла. Это является прямым следствием медленного убывания скорости (2) с увеличением расстояния. Однако необходимо помнить, что "стоксово" распределение скорости в вязкой жидкости (2) справедливо лишь в области, непосредственно примыкающей к телу, а вдали от него скорость убывает с удалением от сферы быстрее, чем $1/r$ [4, 5]. В этом случае радиус области интегрирования в формуле (5) необходимо "физически" ограничить расстоянием порядка a/Re, до которого справедливо на самом деле распределение (2), в результате чего амплитуда рассеяния f_f оказывается конечной. При этом заметим, что полученная таким образом оценка интеграла (5) оказывается, так же как и рассчитанная ранее величина (9) для амплитуды $f_f \simeq f_2$, значительно большей, чем амплитуда рассеяния звука на неоднородностях потенциального течения.

Рассмотрим теперь влияние вязкого характера течения жидкости на рассеяние звука в случае, когда сфера осциллирует так, что ее центр колеблется с частотой Ω, двигаясь поступательно со скоростью $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{V} \exp(-i\Omega t)$. В общем случае это дает возможность рассмотреть ситуацию, когда тело перемещается в жидкости с произвольной скоростью $\mathbf{V}(t)$, переменной во времени, и при этом вычислить амплитуду рассеяния звука более аккуратно, избегая формальных расходимостей. Действительно, согласно формуле (5), амплитуда рассеяния звука на течении f_f является линейной функцией скорости тела. Поэтому, разложив функцию $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ во временной интеграл Фурье и вычислив по формуле (5) парциальные амплитуды рассеяния, найдем фурье-компоненты $f_f(\Omega)$ амплитуды рассеяния звука на неоднородностях течений, соответствующих осцилляциям центра сферы с разными частотами. При этом известно [4], что скорость течения вязкой жидкости в окрестности сферы, совершающей осцилляции с частотой Ω, экспоненциально убывает с удалением от центра сферы, т.е. быстрее, чем $1/r$. Поэтому соответствующие интегралы (5) для осциллирующих течений будут всегда сходиться, а суммарная амплитуда рассеяния будет также конечной.

Распределение скорости в вязкой жидкости в окрестности осциллирующей сферы находится, как и ранее, по формуле $\mathbf{U} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(g\mathbf{V})$. Подставив сюда переменную скорость в виде $\mathbf{V}\exp(-i\Omega t)$, экспоненциальный временной множитель при соответствующих амплитудах будем далее, как обычно, опускать. В отличие от равномерного движения, неизвестная функция $g(r)$ удовлетворяет теперь не уравнению (1), а уравнению

$$\Delta^2 g + \kappa^2 \Delta g = 0, \quad r > a, \tag{10}$$

в котором квадрат "волнового" числа κ является чисто мнимой величиной: $\kappa^2 = i\Omega/\nu$, а $\kappa = (1+i)/\delta$. Величина δ равна $\delta = \sqrt{2\nu/\Omega}$, имеет размерность длины и физический смысл толщины вязкого пограничного слоя. Решение уравнения (10) во внешней области и убывающее на бесконечности записывается в следующем виде [4]:

$$g(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r} e^{i\kappa (r-a)}, \quad (r > a), \tag{11}$$

где неизвестные коэффициенты A и B находятся из граничного условия $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ на поверхности сферы при $r = a$ и оказываются равными

$$A = -\frac{3a}{2\kappa^2}\left(1 - i\kappa a - \frac{\kappa^2 a^2}{3}\right), \quad B = \frac{3a}{2\kappa^2}. \tag{12}$$

Для дальнейших вычислений решение $g(r)$ удобно представить в виде суммы из двух слагаемых: $g_1 = A/r$ и $g_2 = (B/r)\exp[i\kappa(r-a)]$. При условии $|\kappa a| \to \infty$ толщина вязкого слоя вблизи сферы стремится к нулю и решение (11) описывается лишь составляющей $g_1 = A/r$ с коэффициентом $A \simeq -a^3/2$ и $B = 0$, что соответствует потенциальному обтеканию сферы идеальной жидкостью. В случае предельно малой частоты колебаний сферы толщина вязкого слоя становится бесконечно большой ($|\kappa a| \ll 1$) и для скорости частиц среды получается выражение, аналогичное (2) для стоксова режима обтекания твердой сферы.

При расчете амплитуды рассеяния звука на неоднородностях осциллирующего течения (11), (12) формулу (5) удобно преобразовать так же, как и в работе [1], выполнив в ней интегрирование по частям

$$f_f = -\frac{ik}{2\pi c}\int_{r'=a} (d\mathbf{S}'\mathbf{n}_0)(\mathbf{U}\mathbf{n}_0)\, e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} - \frac{k^2(\mathbf{n}_0\mathbf{n})}{2\pi c} \times \tag{13}$$

$$\times \int_{r' \geqslant a} d^3 r' (\mathbf{U}\mathbf{n}_0)\, e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'}.$$

Объемный интеграл с полной дивергенцией подынтегрального выражения (5) преобразован здесь по теореме Гаусса в поверхностный. При этом интеграл, взятый по бесконечно удаленной от тела поверхности S_∞, обратился в нуль, поскольку составляющая скорости $\mathbf{U}(\mathbf{r}')$, связанная с $g_2(r')$, экспоненциально убывает при $r' \to \infty$, а составляющая скорости, определяемая функцией $g_1(r')$, падает с удалением от центра сферы как $1/r'^3$, в то время как площадь поверхности S_∞ растет всего лишь как r'^2. Таким образом, из полученного выражения (13) видно, что амплитуда рассеяния звука на неоднородностях осциллирующего течения выражается через поверхностный интеграл I_S и объемный $-I_V$. При вычислении поверхностного интеграла I_S, стоящего первым в формуле (13), воспользуемся граничным условием, согласно которому на поверхности сферы имеет место равенство скоростей $\mathbf{U} = \mathbf{V}$, после чего интеграл I_S легко берется и оказывается равным

$$I_S = 2k^2 a^3 (\mathbf{M}\mathbf{n}_0)(1 - \mathbf{n}\mathbf{n}_0)\frac{j_1(qa)}{(qa)}, \tag{14}$$

где $j_1(qa)$ – сферическая функция Бесселя первого порядка. Заметим, что интеграл по сферическим углам брался здесь методом дифференцирования по параметру, выражаясь через базовый интеграл

$$\int d\Omega' e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} = 4\pi j_0(qr'), \tag{15}$$

в котором $j_0(qr)$ – сферическая функция Бесселя нулевого порядка.

При вычислении объемного интеграла I_V выразим скорость осциллирующего течения жидкости через функцию $g(r)$ и полученное значение скорости $U_\alpha = V_\beta\, \partial^2 g/\partial x_\alpha \partial x_\beta + V_\alpha \kappa^2 g_2$ подставим в подынтегральное выражение второго слагаемого формулы (13). При этом ввиду убывания функции $g_2(r)$ на бесконечности экспоненциальным образом соответствующую часть интеграла I_V, пропорциональную производной $\partial^2 g_2/\partial x_\alpha \partial x_\beta$, вычислим интегрированием по частям. В результате преобразований искомый интеграл вновь разобьется на сумму, состоящую из двух объемных и двух поверхностных интегралов, и может быть представлен в виде

$$I_V = -\frac{k^2(\mathbf{n}_0\mathbf{n})}{2\pi c} n_{0\alpha} V_\beta \int d^3r' \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} -$$

$$-\frac{ik^2(\mathbf{n}_0\mathbf{n})(\mathbf{V}\mathbf{q})}{2\pi c} n_{0\alpha} \int dS_\alpha g_2 e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} + \frac{k^2(\mathbf{n}_0\mathbf{n})}{2\pi c}[(\mathbf{n}_0\mathbf{q})\times$$

$$\times(\mathbf{V}\mathbf{q}) - \kappa^2(\mathbf{n}_0\mathbf{V})] \int d^3r' g_2 e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} + \frac{k^2(\mathbf{n}_0\mathbf{n})}{2\pi c} n_{0\alpha} V_\beta \int dS'_\beta \frac{\partial g_2}{\partial x_\alpha} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'}. \quad (16)$$

Теперь подставим сюда конкретные выражения для функций $g_1(r)$ и $g_2(r)$ и найдем соответствующие составляющие интеграла $I_V^{(k)}$. Используя значение (15) базового интеграла при интегрировании по телесному углу, найдем, что первое слагаемое в формуле (16) при произвольной величине безразмерного параметра ka равно

$$I_V^{(1)} = Ak^2(\mathbf{n}_0\mathbf{n})[(\mathbf{M}\mathbf{n}_0) - 3(\mathbf{M}\mathbf{n})]\frac{j_1(qa)}{(qa)}, \quad (17)$$

где коэффициент A определяется формулой (11). Второй и третий интегралы в формуле (16) вычисляются более просто и равны

$$I_V^{(2)} = 3k^2a^3(\mathbf{n}\mathbf{n}_0)(\mathbf{M}\mathbf{q})(\mathbf{n}_0\mathbf{q})(1/\kappa^2)\frac{j_1(qa)}{(qa)}, \quad (18)$$

$$I_V^{(3)} = 3k^2a^3(\mathbf{n}\mathbf{n}_0)[(\mathbf{M}\mathbf{n}_0) - (\mathbf{M}\mathbf{q})(\mathbf{n}_0\mathbf{q})\kappa^{-2}]\frac{\cos(qa) - i(\kappa/q)\sin(q/a)}{\kappa^2a^2 - q^2a^2}.$$

При вычислении последнего слагаемого в формуле (16) вновь используем значение (15) для базового интеграла и метод дифференцирования по параметру при интегрировании по углам. В результате вычислений получаем, что:

$$I_V^{(4)} = 3k^2a^3(\mathbf{n}_0\mathbf{n})(1 - i\kappa a)\left[\frac{(\mathbf{M}\mathbf{q})(\mathbf{n}_0\mathbf{q})}{\kappa^2}\frac{j_2(qa)}{(qa)^2} - \frac{(\mathbf{M}\mathbf{n}_0)}{(\kappa a)^2}\frac{j_1(qa)}{(qa)}\right]. \quad (19)$$

Сложив полученные выше интегралы (14), (17) – (19), нетрудно найти выражение для амплитуды рассеяния звука на неоднородностях осциллирующего течения жидкости при произвольном значении безразмерного параметра ka. Однако из приведенных формул видно, что выражение для амплитуды f_f будет иметь в этом общем случае довольно громоздкий вид. Поэтому приведем здесь лишь предельные выражения для амплитуды f_f. Вначале выпишем выражение для амплитуды рассеяния f_f при малых значениях параметра ka. Заметим, что в этом случае можно опустить первое слагаемое в квадратных скобках выражения (19) для $I_V^{(4)}$ и пренебречь составляющей $I_V^{(2)}$, поскольку в общую сумму они вносят существенно меньший вклад, относительно пропорциональный $(ka)^2$. Далее воспользуемся разложением сферических функций Бесселя в ряд по малому параметру $qa = 2\,ka\sin\theta/2$ и после преобразований найдем, что искомая амплитуда рассеяния при $ka \ll 1$ выглядит приближенно так:

$$f_f \simeq k^2a^3\left\{\frac{2}{3}(\mathbf{M}\mathbf{n}_0) - \frac{1}{2}(\mathbf{n}\mathbf{n}_0)(\mathbf{M}\mathbf{n}_0 + \mathbf{M}\mathbf{n})\left[1 + 3\frac{1 - i\kappa a}{q^2a^2 - \kappa^2a^2}\right]\right\}. \quad (20)$$

Когда толщина вязкого слоя δ мала по сравнению с радиусом шара, то $|\kappa a| \gg 1$ и выражение, стоящее в квадратных скобках полученной формулы (20), оказывается по модулю близким к единице. В этом случае обтекание сферы вязкой жидкостью схоже с потенциальным течением идеальной жидкости вблизи осциллирующего шара и амплитуда рассеяния (20), так же как и при рассеянии звука на потенциальном течении [1–3], оказывается пропорциональной k^2a^3M. При низкочастотных колебаниях сферы, когда параметр $|\kappa a|$ существенно меньше единицы, происходит возрастание амплитуды (20) как по сравнению со случаем рассеяния звука на потенциальном течении идеальной жидкости, так и с понижением частоты осцилляций Ω. При этом возможны два варианта. В первом случае, когда $|\kappa| \gg k$ длина волны звука $\lambda = c/(2\pi\omega)$ оказывается большой по сравнению с толщиной вязкого слоя $\delta = \sqrt{2\nu/\Omega}$ и тогда выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (20), можно заменить на множитель $\simeq 3\, i\, \delta^2/2\, a^2$. В этом случае амплитуда рассеяния звука (20) на осциллирующем течении вязкой жидкости возрастает в $|\kappa a|^{-2}$ раз по сравнению со случаем обтекания сферы идеальной жидкостью и становится равной по модулю

$$|f_f| \simeq 3a\left(\frac{\delta}{4\pi\lambda}\right)^2 (\mathbf{n}_0\mathbf{n})(\mathbf{M}\mathbf{n}_0 + \mathbf{M}\mathbf{n}). \tag{21}$$

Во втором случае $|\kappa| \ll k$ и чисто мнимая добавка в знаменателе третьего члена выражения (20) $\kappa^2a^2 = 2\,i(a/\delta)^2$ оказывается по модулю малой величиной по сравнению с безразмерным параметром q^2a^2. В этом случае модуль амплитуды рассеяния звука на вязком течении при конечных, но не слишком малых углах рассеяния возрастает до величины, которая по порядку равна aM. Однако в области малых углов рассеяния безразмерный параметр q^2a^2, равный $k^2a^2\theta^2$, стремится к нулю и в комбинации $q^2a^2 - \kappa^2a^2$ уже нельзя пренебрегать малой, но конечной величиной κ^2a^2. Амплитуда рассеяния звука, равная при конечных значениях θ, согласно (20), выражению

$$f_f \simeq \frac{3}{2}\, a\, \frac{(\mathbf{n}\mathbf{n}_0)(\mathbf{M}\mathbf{n}_0 + \mathbf{M}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}\mathbf{n}_0 - 1)}, \qquad (\mathbf{n} \neq \mathbf{n}_0) \tag{22}$$

перестает расти с уменьшением угла рассеяния θ и в пределе при $\theta \to 0$ переходит в (21). Обратим здесь внимание на то, что аномально большие значения амплитуд (21) и (22) при $\theta \to \pi$ стремятся к нулю, так что при обратном рассеянии амплитуда f_f, согласно формуле (20), будет равна по порядку величины по-прежнему k^2a^3M.

Проанализируем теперь поведение суммы интегралов (14), (17)–(19) при больших значениях безразмерного параметра ka. Из поведения сферических функций Бесселя $j_n(2\,ka\sin\theta/2)$ при $ka \gg 1$ следует, что рассеяние волн на крупномасштабных неоднородностях течения вязкой жидкости носит, как и при дифракции звука на сфере большого радиуса, резко выраженный анизотропный характер. При этом ширина диаграммы направленности рассеянных волн по порядку величины равна $\sim 1/ka$, как и при дифракции звука на шаре. При вычислении амплитуды рассеяния звука f_f вперед на малые углы, подчиняющиеся условию $\theta \ll 1/ka$, следует считать, что безразмерный параметр $qa = 2\,ka\sin\theta/2$ по-прежнему мал и поэтому можно воспользоваться снова формулой (20) для амплитуды рассеяния звука. Однако теперь выражение (20) для амплитуды f_f будет определять интенсивность рассеянных волн только вперед, а параметр ka будет считаться большим. Поскольку в этом приближении функции Бесселя $j_n(2\,ka\sin\theta/2)$ при увеличении угла рассеяния быстро убывают по величине и сильно осциллируют, то подобным же образом будет вести себя и амплитуда рассеяния f_f при возрастании угла рассеяния θ. Напомним, что при рассеянии звука на крупномасштабных неоднородностях потенциального течения идеальной жидкости амплитуда рассеяния f_f на малые углы вела себя как k^2a^3M при $ka \gg 1$ [1]. При малой толщине вязкого слоя, когда имеет место неравенство $|\kappa a| \gg 1$, обтекание сферы вязкой жидкостью близко по характеру к потенциальному течению идеальной жидкости. Из формулы (20) при $ka \gg 1$ и $\theta \ll 1/ka$ следует тогда, что амплитуда рассеяния звука на крупномасштабных неоднородностях течения вязкой жидкости оказывается, как и в идеальной жидкости, пропорциональной k^2a^3M. Однако в противоположном случае, когда имеет место неравенство $|\kappa a| \ll 1$, возможно, как и для сферы малого радиуса, возрастание модуля f_f в $|\kappa a|^{-2}$ раз при рассеянии на малые углы $\theta \ll 1/ka$ и при условии $ka \gg 1$.

Влияние вязкости жидкости на рассеяние звука при $ka \gg 1$ особенно наглядно проявляет себя при учете многократного рассеяния волн, которое приводит по существу к рефракции лучей вблизи тела. Для движущегося тела эта рефракция может приводить иногда к "фокусировке" или, точнее, к дополнительной сходимости лучей вдали от тела [6]. Как хорошо известно, решение задачи в случае $ka \gg 1$ может быть представлено в следующей форме:

$$p = p_0 \, e^{ikz + i\Psi(r,t)}, \tag{23}$$

где величина $\Psi(\mathbf{r}, t)$ имеет физический смысл дополнительного эйконала в геометрической акустике. В приближении Бурре теории многократного рассеяния или метода плавных возмущений эйконал Ψ записывается в форме, аналогичной (5), выражаясь через борновскую поправку к падающему полю $p_0 \exp(ikz)$. Сама борновская поправка, учитывающая всего лишь однократное рассеяние волн, вычисляется обычно по фраунгоферовой зоне рассеивателя и приводит к представлению рассеянного поля в форме $(p_0 f/r) \exp(ikr)$, где f – амплитуда рассеяния звука, записываемая, например, в виде (5). Однако при $ka \gg 1$, учитывая острую направленность рассеянного поля, функцию Грина $\exp(ik \mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid)/\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid$, стоящую в интеграле для борновской поправки, аппроксимируют выражением $(1/\mid z-z' \mid) \exp[ik \mid z-z' \mid + ik(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)^2/2 \mid z-z' \mid]$. Учитывая медленность изменения скорости течения жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ на фоне быстро осциллирующего множителя $\exp[ik(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)^2/2 \mid z-z' \mid)$, функцию $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ выносят далее на знак интегрирования по поперечным координатам $\mathbf{r}'_\perp$ и производят по этим координатам интегрирование. Оставшийся интеграл по продольной координате $z' = \mathbf{r}'\mathbf{n}_0$ в отличие от интеграла (5) приобретает теперь очень простой вид

$$\Psi = -(k/c) \int dz' (\mathbf{U}\mathbf{n}_0) \quad (ka \gg 1), \tag{24}$$

а бесконечный ряд теории возмущений точно сворачивается к решению (23) с эйконалом Ψ в форме (24). Заметим, что сам эйконал $\Psi(z, \mathbf{r}_\perp)$ имеет физический смысл дополнительного набега фазы распространяющейся волны за счет изменения скорости звука в окрестности движущегося тела. Это следует, в частности, из уравнения (3), которое в указанном приближении сводится к уравнению Гельмгольца с эффективным волновым числом $k_{эф} = \omega/c_{эф}$, квадрат которого при $ka \gg 1$ равен приближенно $k^2_{эф} \simeq k^2 \; (1-2 \; U_z/c)$. Для потенциального течения ($\mathbf{U} = \nabla \Phi$) интеграл (24) равен $(k/c) \; [\Phi(-\infty) - \Phi(\infty)]$ и при отсутствии в жидкости разрывов, т.е. в односвязанной области, эйконал Ψ обращается точно в нуль. В этом случае рассмотренный в работе [6] эффект "фокусировки" волнового поля, связанный с образованием минимума скорости звука $c_{эф}$ вблизи тела и своего рода акустической линзы, будет отсутствовать. Однако для реальных и вязких течений типа (2) или (1) интеграл (24) уже не равен тождественно нулю, а определяется завихренностью течения $\mathbf{\Omega}$. Более того, при стоксовом течении (2) интеграл для Ψ вообще расходится и только, обрезая интегрирование в (24) при $r \simeq a/\mathrm{Re}$, расстоянии, до которого справедливо на самом деле распределение скорости (2), получается, как и ранее, конечный результат.

Таким образом, необходимо констатировать, что влияние вязкости жидкости на рассеяние звука движущися телом в ряде случаев может оказаться существенным. При этом напомним, что полное рассеянное поле в окрестности движущегося тела определяется рассеянием звука как на неоднородностях течения окружающей жидкости, так и на поверхности самого тела. Считая, что даже в том случае, когда поправка к амплитуде рассеяния звука на теле, вызванная движением его поверхности, не очень изменяется с учетом вязкости среды, из изложенного следует, что заметное влияние вязкости на рассеяние может проявляться как в случае низкочастотного, так и высокочастотного звука. При этом влияние вязкости среды на величину рассеянного поля осуществляется двояким образом. Во-первых, за счет более медленного спада скорости течения жидкости по мере удалeния от тела, как, например, в случае стоксова обтекания, "расширяется " область интегрирования в выражениях типа (5) или (24), и поэтому соответствующие интегралы, являющиеся мерой рассеяния, возрастают.

Во-вторых, за счет появления у течения жидкости завихренности $\mathbf{\Omega}$ происходит также увеличение рассеяния. Это особенно наглядно проявляется в случае предельно больших значений параметра *ka*, когда эйконал Ψ для потенциальных течений обращается тождественно в нуль, в то время как для вихревых течений он принимает конечные значения.

В заключение отметим, что указанные причины возрастания рассеяния звука не являются исключительной особенностью вязких течений вблизи твердых тел. Так, особенностью более медленного спадания скорости с расстоянием обладают и поверхностные волны, возбуждаемые телом, движущимся в жидкости под ее свободной поверхностью. Что касается завихренности, то она может существовать при отсутствии тела и в идеальной жидкости. Так, в частности, для течения (6) идеальной жидкости в окрестности движущейся сферы завихренность $\mathbf{\Omega}$ была равна нулю, а с ней обращался в нуль и эйконал Ψ. Присоединяя же к этому течению (6), справедливому вне сферы радиуса a, решение уравнения (1) во внутренней области при $r \leqslant a$ вида

$$g(r) = -\frac{\sigma}{8} r^2 + \frac{3}{16} \frac{r^4}{a^2} \quad (r \leqslant a), \tag{25}$$

получаем модифицированное течение, для которого общая завихренность оказывается уже отличной от нуля и равна $\Omega = 9\,(\mathbf{V} \times \mathbf{r})/2a^2$. Это течение аналогично движущемуся вихрю Хилла, который, как известно [5], может существовать в идеальной жидкости и при отсутствии тела. Вычисление интеграла (24) показывает, что в этом случае эйконал становится отличным от нуля и равен

$$\Psi = -(ka)\,(\mathbf{M}\mathbf{n}_0)\,\left(1 - \frac{r_\perp^2}{a^2}\right)^{3/2} \tag{26}$$

Зависимость эйконала от поперечной координаты $\mathbf{r}_\perp$ приводит, как и ранее, к искажению первоначально плоского фронта распространяющейся волны, что эквивалентно образованию акустической "линзы" [6] и, как показано в работах [7, 8], в этом случае также может быть рассчитана "фокусировка" рассеянного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.Н., Семенов А.Г., Скворцов А.Т.* Рассеяние звука потенциальным течением, возникающим при движении сферы // Акуст. журн. (в печати.)
2. *Алексеев В.Н., Семенов А.Г.* Рассеяние звука движущейся сферой // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 5. С. 789–797.
3. *Головчанская А.Е., Лямшев Л.М., Скворцов А.Т.* Рассеяние звука потенциальными течениями // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 2. С. 368–370.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
5. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
6. *Алексеев В.Н., Римский-Корсаков А.В., Семенов А.Г.* Особенности распространения звука в окрестности движущегося тела // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 4. С. 581–587.
7. *Климов В.В.* Влияние поля скорости вихря на распространение акустических волн // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 261–266.
8. *Климов В.В.* Пространственное распределение поля в окрестности каустики, образующейся при рассеянии звука полем скорости вихря // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 2. С. 277–284.

Акустический институт
им. Н.Н. Андреева
Российской академии наук

Поступила в редакцию
02.03.92

V.N. Alekseev, A.G. Semenov

VISCOSITY INFLUENCE ON SOUND SCATTERING BY A MOVING BODY

The results of a theoretical study of an adjacent flow viscosity influence on the sound field scattered by a moving body are presented. The sound scattering amplitude is shown to be very sensitive to small changes in flow parameters. In practically important cases when the viscosity is taken into account, the predicted parameters of sound scattering are shown to increase drastically in comparison with the parameters obtained for a widely used approximation for a potential flow. This is due to two main reasons. First of all this is due to the slower change of the flow velocity far from the body in comparison with a potential flow and, second, this is due to the presence and the value of vorticity of the corresponding flow. The parameters of scattered waves for an oscillating sphere are also shown to increase with the decrease of oscillations frequency.