

УДК 534.26

© 1993 г. Р.А. Дудник, А.Б. Колпаков

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКЕ С ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Рассматривается дифракция плоской волны, нормально падающей на тонкостенную цилиндрическую оболочку (ЦО) неограниченной длины, вдоль образующей которой (при $\varphi = \pi$) закреплена сосредоточенная по азимуту неоднородность. Показано, что поле рассеянное ЦО образовано суперпозицией полей, излучаемых как симметричными, так и антисимметричными колебаниями (относительно плоскости $\varphi = 0$; $\varphi = \pi$). Влияние неоднородности приводит к повышению эффективности возбуждения, а также увеличению интенсивности излучения этих форм, по сравнению с соответствующими формами однородной ЦО (в поле излучения симметричных преобладает монополюсное, а в поле антисимметричных — излучение дипольного типа). Это обстоятельство вызывает повышение уровня рассеянного поля оболочки с инерционной массой, по сравнению с полем однородной. Например, для формы с $q = 2$, уровень рассеянного поля увеличивается на 3 порядка, при увеличении эффективности возбуждения — на 1,5 порядка. Диаграмма направленности этой формы отличается от диаграммы излучения монополюсного типа на 17%.

Вопросам дифракции плоских акустических волн на однородных тонкостенных цилиндрических оболочках (ЦО) посвящен ряд работ (см., например [1, 2]). Представляет интерес исследование влияния на характер дифракционного поля различных неоднородностей, закрепленных на поверхности тонкостенной ЦО.

В настоящей работе рассматривается дифракция плоской волны, нормально падающей на цилиндрическую оболочку неограниченной длины, радиуса $r = a$, вдоль образующей которой (при $\varphi = \pi$) жестко закреплена сосредоточенная по азимуту неоднородность, характеризуемая погонной массой m_0 и моментом инерции I_0 относительно поворота вокруг нормали к поверхности оболочки. Проводимый анализ ограничивается простейшим случаем, соответствующим низкочастотным азимутальным формам колебания рассматриваемой модели, без учета тангенциальных сил инерции.

Как известно [1, 2], падающая волна $P_{\text{пад}}$ вызывает колебания ЦО, создающие в окружающем пространстве ($r \geq a$) рассеянное поле, представляемое в виде суммы звукового давления в волне, отраженной жестким цилиндром ($P_s^{(0)}$), и давления в излученной волне ($-P_{\text{изл}}$). При этом полное звуковое поле вне оболочки записывается в виде суммы трех составляющих: $P = P_{\text{пад}} + P_s^{(0)} - P_{\text{изл}}$. Вполне очевидно, что неоднородность, установленная на поверхности ЦО, оказывая воздействие на составляющую, связанную с излучением ($P_{\text{изл}}$), приведет к изменению дифракционного поля оболочки.

Известно, [2], что при решении задач о дифракции плоских волн на оболочках цилиндрического сечения используют разложение этих волн в ряды Фурье, где в качестве коэффициентов выступают цилиндрические функции. Действительно волна $P_{\text{пад}}$, распространяющаяся вдоль некоторого направления χ , падающая на поверхность оболочки под углом φ_1 к вертикальной плоскости $\varphi = 0$, может быть пред-

ставлена в виде ряда в цилиндрической системе координат $r, \tilde{\varphi}$ ($\chi = r \cos \tilde{\varphi}$, ($\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_1$)).

$$P_{\text{пад}} = P_{\text{пад}}(r, \tilde{\varphi}) = P_0 \exp[ik\chi] = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\tilde{\varphi}, \quad (1)$$

($\epsilon_n = 1$ при $n = 0$, $\epsilon_n = 2$ при $n \geq 1$),

где P_0 — амплитуда падающей плоской волны; k — волновое число; $J_n(kr)$ — функция Бесселя первого рода, n -го порядка. Поскольку для низкочастотных азимутальных форм колебаний оболочки в воздухе $ka \ll 1$, воспользуемся представлением $J_n(kr)$ при малом значении аргумента, для целочисленных неотрицательных значений n [3].

$$J_n(kr) |_{n=a} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! (n+s)!} \left(\frac{ka}{2}\right)^{n+2s}. \quad (2)$$

Согласно (2), функция $J_n(ka)$ будет убывать по мере увеличения n как $(ka)^n / (2^n \cdot n!)$. Следовательно интенсивность возбуждения различных форм колебания ЦО, под действием падающей волны, будет резко снижаться по мере увеличения их порядкового номера.

Под действием неоднородности происходит деформация собственных форм колебания оболочки $\Psi_q^{(i)}(\varphi)$, возрастающая с ростом массы m_0 для симметричных ($i = 1$), и момента инерции I_0 для антисимметричных ($i = 2$) форм (относительно плоскости $\varphi = 0$; $\varphi = \pi$) [4]. Мерой деформации могут служить коэффициенты разложения a_{qn} , b_{qn} соответствующих ортонормированных собственных функций в ряды Фурье:

$$\Psi_q^{(1)}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{qn} \cos n\varphi, \quad \Psi_q^{(2)}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{qn} \sin n\varphi \quad [5]$$

$$a_{qn} = \frac{4 \cos n\pi}{\sqrt{D_q^{(1)}}} \frac{\gamma^3 \sin \gamma}{\gamma^4 - (n\pi)^4}; \quad (3)$$

$$b_{qn} = \frac{4 \cos n\pi}{\sqrt{D_q^{(2)}}} \frac{n\pi \gamma^2 \sin \gamma}{\gamma^4 - (n\pi)^4},$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; $q = 2, 3, \dots$; $D_q^{(i)}$, $\gamma_q^{(i)}$ — соответственно нормы и собственные значения рассматриваемых функций. В разложениях собственных функций деформированных симметричных форм при $q \geq 2$ возникают члены разложения соответствующие пульсирующим ($n = 0$), осциллирующим ($n = 1$) (т.е. $a_{q0} \neq 0$, $a_{q1} \neq 0$), а также другим формам колебания однородной ЦО, более высокого порядка ($n = 2, 3, 4, \dots$). В разложении антисимметричных собственных функций отсутствуют составляющие, связанные с пульсирующими колебаниями однородной модели ($b_{q0} = 0$). Таким образом, каждая деформированная форма неоднородной ЦО будет представлять полный спектр пространственных гармоник. Поэтому воздействие неоднородности, согласно (1)–(3) изменит характер возбуждения оболочки посредством падающей волны. Как известно [5, 6], неоднородность повлияет и на излучение рассматриваемой модели ЦО в окружающее пространство.

С целью выяснения особенностей рассеянного поля неоднородной ЦО запишем систему уравнений самосогласованной задачи о вынужденных колебаниях оболочки

в упругой среде, под действием падающей волны [5, 7]

$$\begin{cases} \frac{d^4 v}{d\varphi^4} - \xi^2 v = -\frac{i\xi}{m_s \omega_1} (P_2 - P_1) \\ \left. \frac{d^3 v}{d\varphi^3} \right|_{\varphi=\pi} + \left. \frac{d^3 v}{d\varphi^3} \right|_{\varphi=-\pi} + 2\pi\alpha\xi^2 V = 0 \\ -\left. \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\pi} + \left. \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=-\pi} + 2\pi\kappa\xi^2 (a\dot{\vartheta}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} v|_{\varphi=\pi} = v|_{\varphi=-\pi} = V \\ \left. \frac{dv}{d\varphi} \right|_{\varphi=\pi} = \left. \frac{dv}{d\varphi} \right|_{\varphi=-\pi} = (a\dot{\vartheta}), \end{cases} \quad (5)$$

где v — нормальная составляющая колебательной скорости; V — скорость смещения центра инерции неоднородности по нормали к поверхности оболочки; $\dot{\vartheta}$ — угловая скорость поворота неоднородности относительно нормали к поверхности оболочки; условия (5) соответствуют жесткому закреплению неоднородности на поверхности оболочки; $\alpha = m_0/(2\pi m_s a)$ — параметр неоднородности; $m_s = \rho_s h$ — масса единицы поверхности оболочки толщины h ; $\kappa = I_0/(M_{об} a^2)$ — параметр, характеризующий момент инерции неоднородности; $M_{об}$ — момент инерции оболочки; $\xi = \omega/\omega_1$ — безразмерная частота внешнего гармонического воздействия; $\omega_1 = \omega_0 \beta$ — характерная частота рассматриваемых низкочастотных форм колебаний; $\omega_0 = (1/a) \times \sqrt{E(\rho_s(1-\nu^2))}$ — частота пульсирующих колебаний оболочки; $\beta = h/a \sqrt{12}$ — известный параметр теории оболочек; E, ν, ρ_s — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки соответственно. В правую часть первого уравнения системы (4) входит разность давлений внутри P_1 и снаружи P_2 оболочки. В дальнейшем, для определенности будем полагать $P_1 = 0$, а $P_2 = P_{пад} + P_s^{(0)} - P_{изл}$.

Решение системы (4) будем искать известным методом [2], в виде рядов по собственным формам колебаний неоднородной ЦО в вакууме

$$v(\varphi) = v_0 \sum_{q=2}^{\infty} (C_q^{(1)} \Psi_q^{(1)}(\varphi) + C_q^{(2)} \Psi_q^{(2)}(\varphi)), \quad (6)$$

где v_0 — размерная амплитуда, $C_q^{(i)}$ — искомые амплитуды разложений колебательной скорости, определяемые из решения соответствующей системы алгебраических уравнений относительно $C_q^{(i)}$

$$\begin{cases} C_q^{(i)} Z_q^{(i)} + \epsilon \sum_{r=2}^{\infty} C_r^{(i)} Z_{qr}^{(i)} = f_q^{(i)} \\ f_q^{(i)} = \frac{1}{D_q^{(i)}} \frac{1}{P_0} \int_0^{2\pi} (P_{пад} + P_s^{(0)}) \Psi_q^{(i)} d\varphi \\ Z_{qr}^{(1)} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} Z_n a_{qn} a_{rn} \frac{\epsilon_n}{2}; \quad v_0 = \frac{P_0}{m_s \omega_1} \\ Z_{qr}^{(2)} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} Z_n b_{qn} b_{rn}; \\ Z_q^{(i)} = [(\xi^{(i)})^2 - \xi^2] (-i\xi)^{-1} + 2\Delta; \\ Z_n = i \frac{H_n^{(1)}(ka)}{[H_n^{(1)}(ka)]'}, \end{cases} \quad (7)$$

где $Z_q^{(i)}$ – безразмерный механический импеданс q -й формы колебаний, которой соответствует собственная частота $\xi_q^{(i)}$, зависящая от массы неоднородности m_0 для симметричных ($i = 1$) и от момента инерции I_0 для антисимметричных форм ($i = 2$); Δ – безразмерный параметр собственных потерь в системе; Z_{qr} – импеданс излучения q -й формы колебаний (при $q = r$) и взаимодействия q -й и r -й форм колебаний неоднородной ЦО через окружающую упругую среду; Z_n – импеданс излучения n -й формы колебаний однородной оболочки ($H_n^{(1)}(kr)$ – функция Ханкеля первого рода, n -го порядка); $\epsilon = \rho c / (m_s \omega_1)$ – безразмерный параметр, характеризующий взаимодействие тонкостенной оболочки с упругой средой, равный отношению волнового сопротивления среды ρc к инерционному импедансу поверхности оболочки $m_s \omega_1$, взятому на частоте ω_1 .

В системе (7), значения $f_q^{(i)}$ – представляют коэффициенты, характеризующие эффективность возбуждения форм колебаний неоднородной оболочки под действием поля ($P_{\text{пад}} + P_s^{(0)}$). Используя представление (1) для поля падающей волны, а также известное представление для $P_s^{(0)}$ [8], можно получить следующие выражения для $f_q^{(i)}$

$$\begin{cases} f_q^{(1)} = 2\pi G_0 a_{q0} + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n i^n \pi G_n a_{qn} \cos n \varphi_1 \\ f_q^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n i^n \pi G_n b_{qn} \sin n \varphi_1, \end{cases} \quad (8)$$

где $G_n = J_n(ka) - ([J_n(ka)]' / [H_n^{(1)}(ka)]') H_n^{(1)}(ka)$ – коэффициенты разложения действующего на оболочку внешнего поля; φ_1 – угол между направлением распространения падающей волны и плоскостью симметрии ЦО ($\varphi = 0$; $\varphi = \pi$).

Из соотношений (8) следует, что возбуждение колебаний неоднородной оболочки с фиксированной плоскостью симметрии зависит от направления распространения падающей волны. При произвольном угле падения φ_1 волны $P_{\text{пад}}$ (1), относительно плоскости ($\varphi = 0$; $\varphi = \pi$), будут возбуждаться как симметричные, так и антисимметричные азимутальные формы колебания. Согласно (7) и (8), значения $f_q^{(i)}$ при $ka \ll 1$ пропорциональны

$$f_q^{(1)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_{qn} J_n(kr); \quad f_q^{(2)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_{qn} J_n(kr), \quad (9)$$

откуда видно, что при возбуждении симметричных форм колебаний преобладает влияние пространственной гармоник с $n = 0$ – члены суммы $a_{q0} J_0 \approx a_{q0}$, а при возбуждении антисимметричных – гармоник с $n = 1$ – члены $b_{q1} J_1 \approx b_{q1} (ka/2)$.

Отметим, что для однородной ЦО соотношения (8) принимают следующий вид

$$\begin{cases} f_q^{(1)} = \epsilon_q i^q \frac{1}{q!} \left(\frac{ka}{2}\right)^q \cos q \varphi_1 \\ f_q^{(2)} = \epsilon_q i^q \frac{1}{q!} \left(\frac{ka}{2}\right)^q \sin q \varphi_1. \end{cases} \quad (10)$$

Определив распределение колебательной скорости $v(\varphi)$ (см. (5)–(7)) на поверхности неоднородной оболочки, можно определить ее поле излучения. С этой целью, используя известное [2] представление для звукового давления создаваемого ЦО радиуса $r = a$ с заданным распределением нормальной составляющей скорости на ее поверхности, получим выражение для излучаемого нормированного поля $P_{\text{изл}}$ в

дальней зоне.

$$P_H = \frac{P_{изл}}{\epsilon P_{эТ}} = -\frac{2i}{ka} C_0 - 2i [C_1^{(1)} \cos \varphi + C_1^{(2)} \sin \varphi] +$$

$$+ \sum_{q=2}^{\infty} \left\{ C_q^{(1)} \left[-\frac{2i}{ka} a_{q0} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n a_{qn} \cos n \varphi \right] + \right.$$

$$\left. + C_q^{(2)} \sum_{n=2}^{\infty} Y_n b_{qn} \sin n \varphi \right\}, \quad (11)$$

$$Y_n = \frac{2}{n!} e^{-i \frac{n\pi}{2}} \left(\frac{ka}{2} \right)^{n-1},$$

которое для случая однородной оболочки [1] будет выглядеть следующим образом:

$$P_H = \frac{2}{ika} \beta^2 (-i\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{i(n!)^2} \left(\frac{ka}{2} \right)^{2n-1} \times$$

$$\times \frac{\cos n(\varphi - \varphi_1)}{[(\xi^{(l)})^2 - \xi^2] (-i\xi)^{-1} + 2\Delta}, \quad (12)$$

где $ka = \pi \xi N$, $N = a\omega_1 / (\pi c)$ — параметр, определяющий размеры ЦО на характерной частоте ω_1 (для рассматриваемых низкочастотных колебаний $N \ll 1$). В качестве эталонного ($P_{эТ}$) использована амплитуда давления в волне (дальнее поле), возникающей при отражении на жестком цилиндре $P_s^{(0)}$ [8].

$$P_s^{(0)} = -\frac{i\pi (ka)^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}$$

Соотношения (7)–(9) наглядно иллюстрируют влияние неоднородности на дифракционное поле оболочки. Во-первых, неоднородность может привести к значительному повышению уровня излучаемого давления, по сравнению с однородной ЦО, в результате деформации собственных форм $\Psi_q^{(l)}$, когда излучение каждой деформированной формы образовано суперпозицией излучений монопольного (при $a_{q0} \neq 0$) и дипольного (при $a_{q1} \neq 0$, $b_{q1} \neq 0$) типов. Во-вторых, диаграммы направленности $P_H(\varphi)$ могут значительно отличаться от соответствующих диаграмм однородной оболочки.

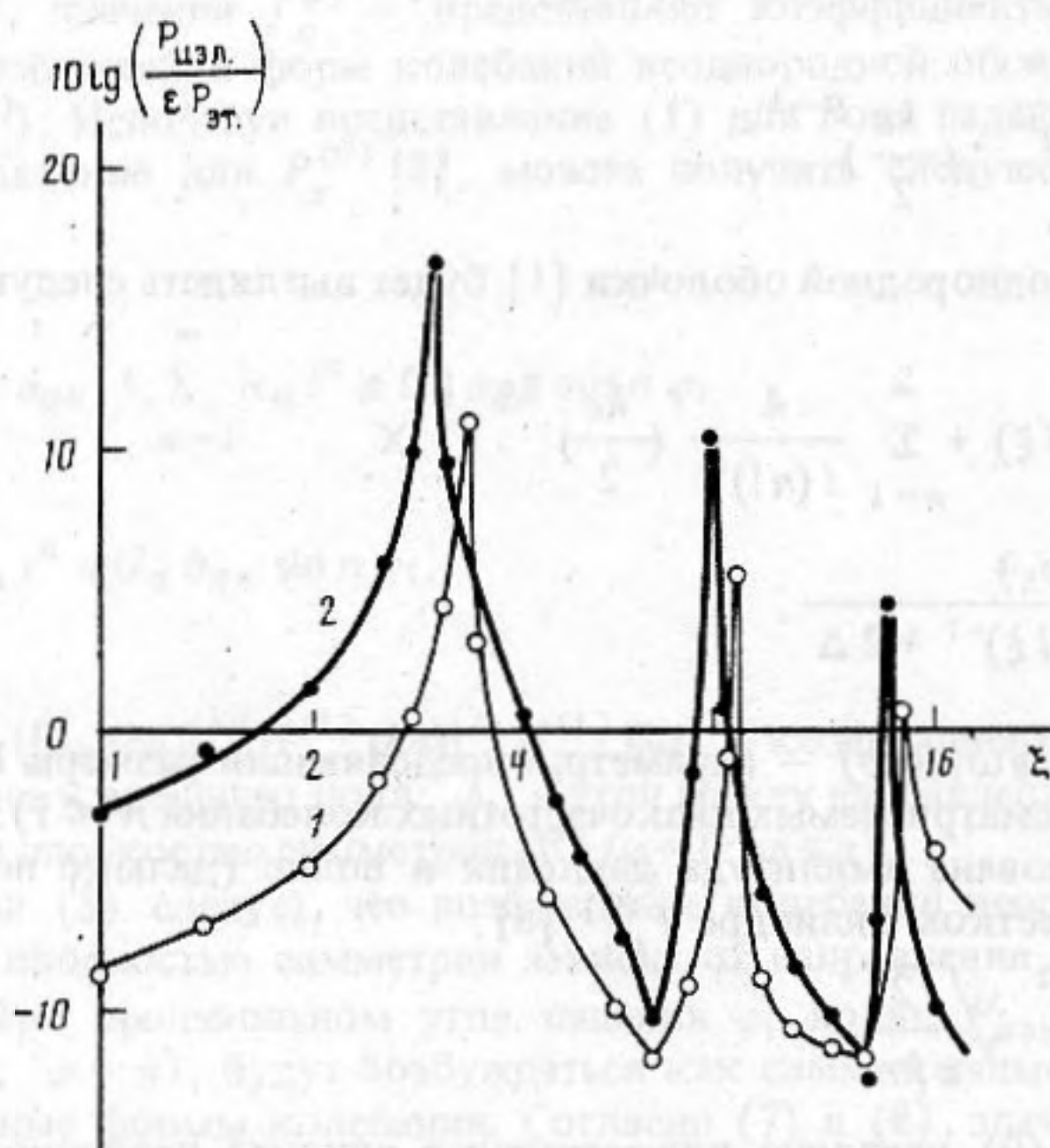
С целью иллюстрации полученных результатов исследуем влияние неоднородности на частотную характеристику поля рассеянного ЦО (11). Для определенности будем полагать, что волна падает вдоль плоскости ($\varphi = 0$; $\varphi = \pi$) и возбуждаются только симметричные формы колебаний. Будем использовать приближенное решение системы (7), без учета связи между формами колебаний. В этом случае выражение (11) преобразуется к виду

$$P_H = -\frac{2i}{ka} C_0 - 2i C_1^{(1)} \cos \varphi + \left\{ -C_2^{(1)} \left[\frac{2i}{ka} a_{20} + 2i a_{21} \cos \varphi + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{ka}{2} a_{22} \cos 2\varphi + \dots \right] - C_3^{(1)} \left[\frac{2i}{ka} a_{30} + 2i a_{31} \cos \varphi + \frac{ka}{2} a_{32} \cos 2\varphi + \dots \right] + \dots \right\}. \quad (13)$$

На графиках рисунка представлена частотная характеристика излучаемого нормированного давления $P_H(\xi)$ в направлении $\varphi = 0$. Расчет проведен для ЦО из стали находящейся в воздухе, когда $\epsilon = 0,35$, $N = 1,43 \cdot 10^{-2}$ при $a/h = 100$, $2\Delta = 0,1$ и окружающая среда оказывает слабое влияние на колебания оболочки. Видно, что с увеличением пара-

метра неоднородности α , одновременно с понижением резонансных частот колебаний $\xi_q^{(1)} < q^2$ при $q \geq 2$, увеличивается уровень излучаемого давления. Действительно, при $\alpha = 0,2$, превышение над уровнем эталонного излучения на резонансной частоте формы колебаний с $q = 2$ достигает ~ 11 dB. При $q \geq 3$, уровни спадают как q^2 . С увеличением массы неоднородности до $\alpha = 1$, превышение (для формы с $q = 2$) составляет ~ 17 dB. Такое резкое увеличение уровней максимумов на частотной характеристике поля рассеянного ЦО вызвано двумя обстоятельствами: во-первых, повышением эффективности возбуждения форм колебаний неоднородной оболочки по сравнению с однородной; во-вторых, изменением механизма излучения форм, когда в поле излучаемом каждой деформированной формой преобладает излучение монопольного типа.



Частотная характеристика нормированного давления $P_H(\xi)$ при различных значениях параметра α : 1 — 0,2; 2 — 1

Изменение излучения той или иной формы колебания, вызванное влиянием неоднородности (согласно (12), (13)), можно оценить, пользуясь соотношением

$$X = \frac{P_{\text{изл}}(\alpha \neq 0)}{P_{\text{изл}}(\alpha = 0)} \sim \left(\frac{C_q(\alpha \neq 0)}{C_q(\alpha = 0)} \right) \left(\frac{a_{q0} \frac{2}{ka}}{\left(\frac{ka}{2}\right)^{q-1}} \right), \quad (14)$$

в котором отношение $C_q(\alpha \neq 0)/C_q(\alpha = 0)$ — определяет изменение эффективности возбуждения (на резонансных частотах пропорционально $a_{q0}/(ka/2)^2$), а отношение $a_{q0} (2/ka)/(ka/2)^{q-1}$ — изменение уровня звукового давления излучаемого q -й формой. Например для формы с $q = 2$ (квадрупольная форма однородной ЦО), при $\alpha = 1$, когда $a_{20} = -0,234$, $ka = 0,145$, согласно (14) будет иметь место увеличение эффективности возбуждений \sim на 1,5 порядка. Соответственно уровень рассеянного поля возрастает \sim на 3 порядка, по сравнению с уровнем поля рассеянного однородной оболочкой.

Диаграмма направленности поля, рассеянного однородной ЦО, согласно (12) определяется, в основном, пульсирующими колебаниями тонкостенной оболочки ($\xi_{\text{рез}} = 1/\beta$) и осциллирующими колебаниями ЦО как целого, и может быть представлена

в виде

$$\Phi(\alpha = 0) = \left[1 - \left(\frac{C_s}{C} \right)^2 \cos \varphi \right], \quad (15)$$

где C_s , C — соответственно скорость продольных волн в материале оболочки и скорость звука в окружающем пространстве. В соотношении (15) не учитывается малый вклад в рассеянное поле от форм колебаний более высокого порядка ($q \geq 2$).

В случае неоднородной ЦО, когда монополюсный и дипольный характер излучения преобладает на резонансной частоте каждой деформированной формы, диаграмма направленности, согласно (13), определяется выражением

$$\Phi(\alpha \neq 0) = \left(1 + \frac{a_{21}}{a_{20}} ka \cos \varphi \right).$$

Коэффициенты разложения a_{21} , a_{20} (3) при малых значениях α , например при $\alpha = 0,2$ для формы с $q = 2$ равны $a_{21} = 0,141$; $a_{20} = -0,13$. Диаграмма определяется выражением: $1 - 0,17 \cos \varphi$ и отличается \sim на 17% от диаграммы излучения монополюсного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лямшев Л.М. Дифракция звука на безграничной тонкой упругой цилиндрической оболочке // Акуст. журн. 1958. Т. 4. № 2. С. 161–167.
2. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1965. 655 с.
4. Иванов В.С., Плахов Д.Д. Колебания кругового кольца несущего сосредоточенную массу // Инж. журн. 1963. Т. 3. № 3. С. 482–489.
5. Дудник Р.А., Музычук О.В., Фияксель Э.А. Излучение звука цилиндрической оболочки с локальной массой // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 834–840.
6. Дудник Р.А., Фияксель Э.А. Дифракция звука на неоднородной цилиндрической оболочке неограниченной длины // Тр. Всесоюз. симп. "Взаимодействие акустических волн с упругими телами". Таллинн: Таллинский технический ун-т. 1989. С. 86–88.
7. Вибрации в технике. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
8. Рэлеи Дж. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.

Нижегородский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию
16.04.92

R.A. Dudnik, A.B. Kolpakov

PLANE WAVE DIFFRACTION BY A CYLINDRICAL SHELL WITH LOCAL INHOMOGENEITY

The diffraction of a plane wave incident normally upon a cylindrical shell with thin walls and with unlimited length is considered. An inhomogeneity with a local dimension along the azimuth is fixed along its length at $\varphi = \pi$. It is demonstrated that an inertial inhomogeneity leads to the increase of scattered field level by 2–3 orders in comparison with the scattered field of a homogeneous shell. This is connected with the deformation of inherent oscillation modes.