

УДК 534.26

© 1993 г. В.В. Крылов, А.В. Шанин

**РАССЕЯНИЕ КЛИНОВОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ
НА НЕГЛУБОКОЙ ВЫЕМКЕ**

В первом приближении теории возмущений проанализировано рассеяние клиновой акустической волны на неглубокой выемке. Показано, что рассеяние происходит во все клиновые моды. Получены аналитические выражения для амплитуд рассеянных волн.

Как известно, вдоль ребра упругого твердого клина могут распространяться волноводные моды, локализованные в окрестности этого ребра, или клиновые акустические волны (см., например, [1–3]). Благодаря своим специфическим свойствам, клиновые волны представляют определенный интерес для различных практических приложений. В частности, они могут быть использованы для неразрушающего ультразвукового контроля ряда изделий и конструкций клинообразной формы – турбинных лопаток, гребных винтов, пропеллеров, рулей высоты самолетов и т.д. [3]. Однако использование клиновых волн в неразрушающем контроле в настоящее время в значительной мере сдерживается из-за отсутствия ясного понимания закономерностей их рассеяния на различных дефектах, таких, например, как зазубрины, выемки, торцы клина.

Первая экспериментальная работа по рассеянию клиновых волн была опубликована совсем недавно [4]. В ней было исследовано рассеяние антисимметричной клиновой волны, распространяющейся вдоль ребра алюминиевого клина, на дефектах двух типов – на торце клина и на неглубокой выемке прямоугольной формы, образованной в результате механической обработки его ребра. Что касается теоретического изучения процессов рассеяния клиновых волн, то публикации об этом в литературе вообще отсутствуют, если не считать имеющегося в обзорной работе [3] краткого упоминания о некоторых предварительных результатах по рассеянию на выемке в усеченном клине.

Ниже будет дано детальное изложение теории рассеяния антисимметричных мод клина – наиболее важной разновидности клиновых акустических волн – на малом дефекте типа неглубокой выемки. Клином будем считать остроугольным и изготовленным из изотропного материала (см. рис. 1). То обстоятельство, что клин полагается остроугольным, позволяет использовать для описания клиновых волн аналитический подход, опирающийся на точное решение уравнения изгибных колебаний пластин переменной толщины [5]. Малость же выемки позволяет развивать теорию рассеяния, используя метод возмущений.

В соответствии с работой [5] воспользуемся для описания антисимметричных мод остроугольного твердого клина приближением тонкой пластинки переменной толщины. Согласно этому приближению, уравнение, описывающее нормальные смещения w срединной поверхности клина, рассматриваемого как тонкая пластинка переменной толщины, можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -m(x, y) \omega^2 w, \quad (1)$$

где моменты M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} определяются соотношениями

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_{yy} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $D = Eh^3/12(1 - \nu^2) = D_0 x^3$ — изгибная жесткость пластины, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона ее материала, $h = h(x, y)$ — локальная толщина пластины,

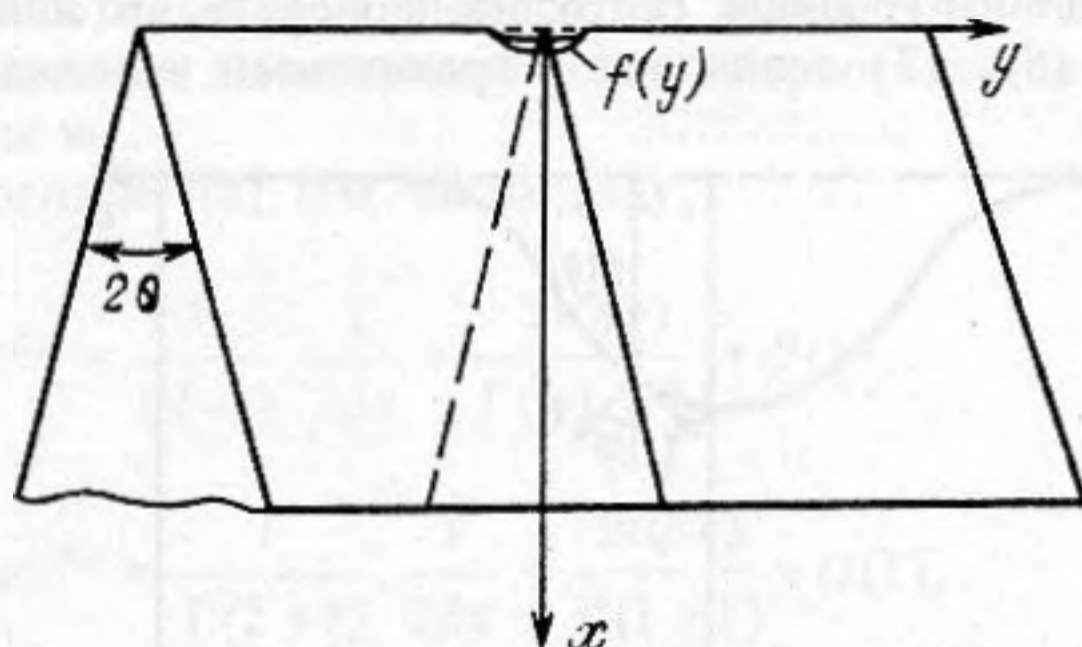


Рис. 1. Общий вид ребра клина с выемкой

$m(x, y)$ — масса единицы площади пластины, определяемая как $m = \rho h(x, y)$, ρ — плотность материала, ω — круговая частота. Так как в рассматриваемом случае (см. рис. 1) угол раскрытия клина равен 2θ , для h имеем $h = 2x \operatorname{tg} \theta$.

Как показано в работе [5], уравнение (1) имеет волновые решения, ограниченные при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} F_1(x, \beta) e^{i\beta y} &= U(-\xi, 2, 2\beta x) e^{-\beta x} e^{i\beta y}, \\ F_2(x, \beta) e^{i\beta y} &= U(2 + \xi, 2, 2\beta x) e^{-\beta x} e^{i\beta y}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $U(a, b, z)$ — функции Куммера, β — волновое число (множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен),

$$\begin{aligned} \xi &= -1 \pm \frac{1}{2} (\sigma - 2)^{1/2}, \\ \sigma &= 6\nu + \frac{3(1 - \nu)}{2 \operatorname{tg}^2 \theta} \left(\frac{v_\omega}{v_s} \right)^2, \\ v_\omega &= \frac{\omega}{\beta}, \quad v_s = (\mu/\rho)^{1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что ξ есть функция β . Согласно [5], введение этого параметра позволит избежать громоздких формул в дальнейшем изложении. При $\xi = 0, 1, 2, 3 \dots$ первое решение в (3) переходит в волноводные моды. При этом

$$U(-n, 2, 2\beta x) = (-1)^n n! L_n^1(2\beta x), \quad (5)$$

где $L_n^1(z)$ — полиномы Лагерра.

Рассмотрим теперь граничные условия на ребре клина с выемкой. Будем характеризовать локальную глубину выемки функцией $f(y)$, а также единичными векторами нормали n и касательной l , ориентированными как показано на рис. 2. Определим свободную верхнюю границу клина Γ , состоящую из идеального ребра и выемки.

В соответствии с работой [6], граничные условия на свободном крае тонкой искривленной пластины переменной толщины можно записать в виде

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial l} [\cos \varphi \sin \varphi (M_{xx} - M_{yy})] -$$

$$- \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial l} [(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) M_{xy}] = 0, \quad (6)$$

$$M_{xx} \cos^2 \varphi + M_{yy} \sin^2 \varphi - 2M_{xy} \cos \varphi \sin \varphi = 0. \quad (7)$$

Здесь через φ обозначен угол между нормалью к границе и осью X . Выражения (6) и (7) характеризуют равенство нулю поперечной силы и изгибающего момента, приходящихся на единицу длины границы. Нетрудно проверить, что для пластины постоянной толщины условия (6), (7) совпадают с граничными условиями, приведенными

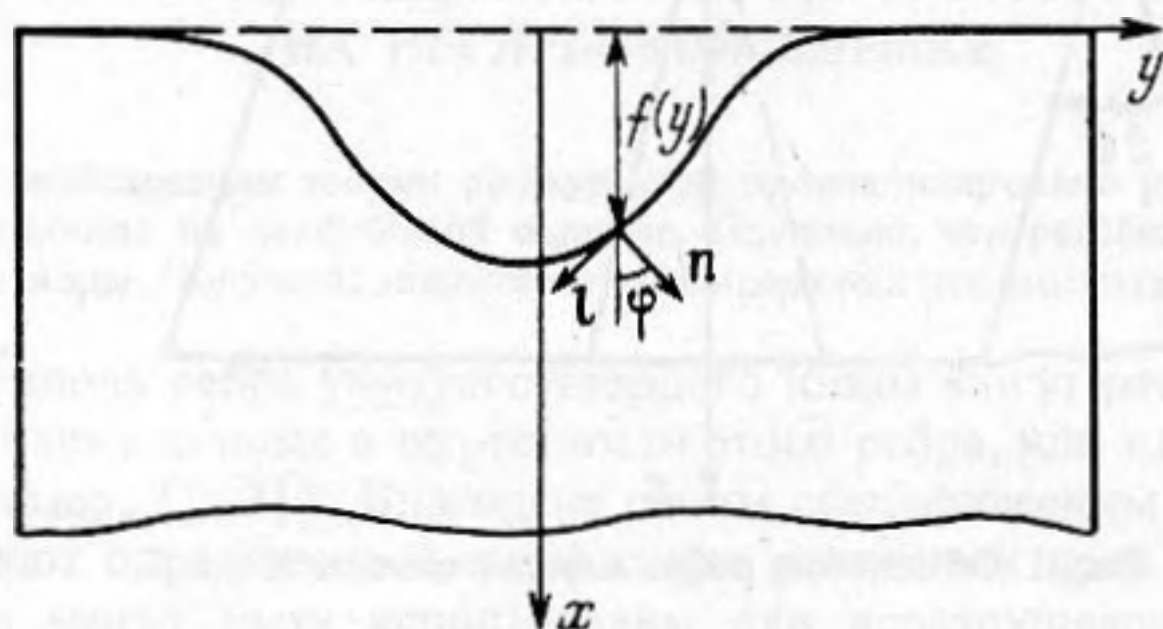


Рис. 2. Геометрия выемки

в книге [7], а в случае клина без выемки, т.е. при $\varphi = 0$, — с условиями, описанными в работе [5].

Пусть на рассмотренную выемку на ребре клина падает одна из клиновых мод, которую будем обозначать символом w_i . Рассеянное поле обозначим через w_s , так что $w = w_i + w_s$. Моменты M , определенные выражениями (2), а также граничные условия (6), (7), в которые они входят, являются линейными дифференциальными операторами, действующими на функцию w . В соответствии с этим перепишем граничные условия (6), (7) в более компактном виде:

$$B^*[w_s] = -B^*[w_i],$$

$$B^{**}[w_s] = -B^{**}[w_i], \quad (8)$$

где через $B^*[w]$ обозначен оператор, стоящий в левой части (6), а через B^{**} — оператор, стоящий в левой части (7). Будем искать рассеянное поле w_s в виде суперпозиции решений вида (3):

$$w_s = \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(\beta) F_1(x, \beta) + A_2(\beta) F_2(x, \beta)] e^{i\beta y} d\beta. \quad (9)$$

Как будет показано ниже, каждое из решений F_1, F_2 обладает свойством

$$B(y) = b(y) + O(bf), \quad (10)$$

где B — одно из граничных значений B^*, B^{**} , f — характерная малая глубина дефекта, $b(y)$ — величина, не зависящая от глубины.

В соответствии с (10), для рассеянного поля, представляющего собой суперпозицию решений (3), также имеет место аналогичное соотношение:

$$B^*[w_s] = b^*[w_s] + O(bf),$$

$$B^{**}[w_s] = b^{**}[w_s] + O(bf). \quad (11)$$

Построим ряд теории возмущений

$$w_s = w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots \quad (12)$$

такой, что

$$b^*[w_1] = -B_i^*; \quad b^{**}[w_1] = -B_i^{**}, \quad (13)$$

$$b^*[w_2] = -B^*[w_1] + b^*[w_1]; \quad b^{**}[w_2] = -B^{**}[w_1] + b^{**}[w_1], \quad (14)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b^*[w_n] = -B^*[w_{n-1}] + b^*[w_{n-1}]; \quad b^{**}[w_n] = -B^{**}[w_{n-1}] + b^{**}[w_{n-1}]. \quad (15)$$

Выписанные соотношения позволяют находить последовательно все члены итерационного ряда. Кроме того, нетрудно убедиться, что $B[w_n] \sim f^{n-1} \cdot B_i$.

Ниже мы ограничимся вычислением только первого члена ряда (12), или борновским приближением w_1 .

Отметим, что, согласно [8] (см. также [5]),

$$U(-\xi, 2, 2\beta x)e^{-\beta x} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \frac{1}{2\beta x} + \frac{\ln(\beta x)}{\Gamma(-1-\xi)} + O(1), \quad (16)$$

$$U(2+\xi, 2, 2\beta x)e^{-\beta x} = \frac{1}{\Gamma(2+\xi)} \frac{1}{2\beta x} + \frac{\ln(\beta x)}{\Gamma(1+\xi)} + O(1), \quad (17)$$

где $\Gamma(\xi)$ – гамма-функция. Таким образом, суперпозиция таких решений есть

$$w_1 = f_1(y) \cdot (1/x) + f_2(y) \ln x + O(1). \quad (18)$$

В соответствии с (2) имеем

$$M_{xx}[w_1] = -2D_0 f_1(y) + D_0 x f_2(y) + O(x^2), \quad (19)$$

$$M_{yy}[w_1] = -2D_0 \nu f_1(y) + \nu D_0 x f_2(y) + O(x^2),$$

$$M_{xy}[w_1] = -2(1-\nu)D_0 x \frac{df_1}{dy} + O(x^2).$$

Поскольку в граничные условия (6), (7) входят только первые произвольные моменты, члены порядка x^2 и выше не вносят вклад в b .

Определим теперь $b^*[w_1]$ и $b^{**}[w_1]$, непосредственно подставив (19) в (6) и (7). После простых преобразований получим

$$b^*[w_1] = D_0 [f_2(\cos\varphi - \cos^2\varphi \sin\varphi(1-\nu)) - 2(1-\nu)f_1 \frac{\partial}{\partial l}(\cos\varphi \sin\varphi) + 2 \frac{df_1}{dy}(\sin\varphi((1-\nu)(1+\sin^2\varphi) - \nu))], \quad (20)$$

$$b^{**}[w_1] = -2D_0 [f_1(\cos^2\varphi + \nu \sin^2\varphi)]. \quad (21)$$

Уравнения (20), (21) позволяют определить f_1 и f_2 по известным b^* и b^{**} ($b^* = B_i^*$, $b^{**} = B_i^{**}$). Из второго уравнения (21) можно найти f_1 , а затем, подставив найденное значение в первое уравнение, – определить f_2 .

По найденным таким образом величинам f_1 и f_2 можно однозначно восстановить функцию w_1 , представленную в виде

$$w_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(\beta)F_1(x, \beta) + A_2(\beta)F_2(x, \beta)] e^{i\beta y} d\beta. \quad (22)$$

Действительно, подставив (16), (17) в (22) и учтя (18), получим выражения f_1 и f_2 через A_1 и A_2 :

$$f_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(\beta) \frac{1}{2\beta\Gamma(-\xi)} + A_2(\beta) \frac{1}{2\beta\Gamma(2+\xi)}] e^{i\beta y} d\beta, \quad (23)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(\beta) \frac{1}{\Gamma(-1-\xi)} + A_2(\beta) \frac{1}{\Gamma(1+\xi)}] e^{i\beta y} d\beta. \quad (24)$$

Чтобы выразить A_1 и A_2 через f_1 и f_2 , произведем преобразование Фурье от обеих частей (23), (24):

$$\frac{A_1(\beta)}{2\beta\Gamma(-\xi)} + \frac{A_2(\beta)}{2\beta\Gamma(2+\xi)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) e^{-i\beta y} dy, \quad (25)$$

$$\frac{A_1(\beta)}{\Gamma(-1-\xi)} + \frac{A_2(\beta)}{\Gamma(1+\xi)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) e^{-i\beta y} dy. \quad (26)$$

Решая систему (25), (26) относительно A_1 и A_2 , нетрудно получить

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(1+\xi)} & -\frac{1}{\Gamma(2+\xi)} \\ -\frac{1}{\Gamma(-1-\xi)} & \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) e^{-i\beta y} dy \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) e^{-i\beta y} dy \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1+\xi)} - \frac{1}{\Gamma(2+\xi)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-1-\xi)}. \quad (28)$$

Пользуясь свойствами гамма-функции, выражение для Δ можно переписать в виде

$$\Delta = -\frac{2 \sin \pi \xi}{\pi}. \quad (29)$$

Подставив определенные таким образом величины A_1 и A_2 в представление (22), нетрудно убедиться, что A_1 имеет полюсы в точках $\xi = 0, 1, 2, \dots$, соответствующих волновым модам. Функция A_2 не имеет полюсов в этих точках за счет компенсации особенностей, обусловленной свойствами гамма-функции. Стандартная процедура нахождения амплитуд рассеянных волноводных мод путем контурного интегрирования выражения (22) приводит к следующему выражению для поля, рассеянного в клиновые моды различных порядков:

$$w_{\text{волн}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i [\text{Res}(A_1(\beta), \beta_n) F_1(x, \beta_n) e^{i\beta_n y} - \text{Res}(A_1(\beta), -\beta_n) F_1(x, \beta_n) e^{-i\beta_n y}], \quad (30)$$

где β_n — волновые числа мод, соответствующие значениям параметра $\xi = 0, 1, 2, \dots$; через $\text{Res}(A_1(\beta), \beta_n)$ обозначены вычеты функции $A_1(\beta)$ в точках β_n . Воспользовавшись выражением (5), запишем

$$w_{\text{волн}} = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! L_n^1(2\beta_n x) e^{-\beta_n x} [\text{Res}(A_1(\beta), \beta_n) e^{i\beta_n y} - \text{Res}(A_1(\beta), -\beta_n) e^{-i\beta_n y}]. \quad (31)$$

Чтобы вычислить вычеты функции A_1 в точках $\pm\beta_n$, примем во внимание связь между β и ξ :

$$\beta = \pm \frac{\omega}{v_s \text{tg} \theta} \left(\frac{3(1-\nu)}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{(4\xi^2 + 8\xi + 6(1-\nu))^{1/2}}. \quad (32)$$

Знак "+" в (32) берется для положительных значений β_n , а знак "-" — для отрица-

тельных. Обозначим через $\tilde{f}_1(\beta)$ и $\tilde{f}_2(\beta)$ преобразования Фурье от функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$:

$$\tilde{f}_1(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) e^{-i\beta y} dy; \quad (33)$$

$$\tilde{f}_2(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) e^{-i\beta y} dy.$$

Тогда A_1 запишется в форме

$$A_1(\beta) = -\frac{\pi}{2 \sin \pi \xi} \left(\frac{2\beta \tilde{f}_1(\beta)}{\Gamma(1+\xi)} - \frac{f_2(\beta)}{\Gamma(2+\xi)} \right). \quad (34)$$

При этом вычеты функции A_1 в точках $\pm\beta_n$ имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Res}(A_1(\beta), \pm\beta_n) &= -\frac{\pi}{2} \left(\frac{2\beta f_1(\beta)}{\Gamma(1+\xi)} - \frac{\tilde{f}_2(\beta)}{\Gamma(2+\xi)} \right) \frac{1}{\partial \sin \pi \xi / \partial \xi} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \Big|_{\pm\beta_n} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2n!} \left(\pm 2\beta_n \tilde{f}_1(\pm\beta_n) - \frac{\tilde{f}_2(\pm\beta_n)}{(n+1)} \right) (\pm\beta_n) \frac{4(n+1)}{4n^2 + 8n + 6(1-\nu)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Подстановка выражения (35) совместно с формулой (31) в соотношение (30) дает формальное решение задачи о рассеянии падающей клиновидной волны в другие клиновидные моды, полученное в первом приближении теории возмущений.

Рассмотрим в качестве конкретного примера рассеяние основной клиновидной моды $w_i = A e^{-\beta x} e^{i\beta y}$,

$$w_i = A e^{-\beta x} e^{i\beta y}, \quad (36)$$

где A — произвольная постоянная, на прямоугольной выемке на ребре, характеризуемой длиной l и глубиной H . Анализ порядков убывания (по H) различных слагаемых в правых частях граничных условий (8) показывает, что низшим порядком оказывается H^2 , т.е. условия (8) на выемке можно записать в виде

$$B^*[w_i] = -3AH^2\beta_0^2 e^{i\beta_0 y} + O(H^3), \quad (37)$$

$$B^{**}[w_i] = O(H^3). \quad (38)$$

Пренебрегая членами $\sim H^3$ и используя соотношения (20), (21), нетрудно определить f_1 и f_2 :

$$f_1(y) = 0, \quad (39)$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 3A\beta_0^2 H^2 e^{i\beta_0 y} & \text{при } |y| < l/2, \\ 0 & \text{при } |y| \geq l/2. \end{cases} \quad (40)$$

Фурье-образы $\tilde{f}_1(\beta)$ и $\tilde{f}_2(\beta)$ при этом имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\beta) &= 0, \\ \tilde{f}_2(\beta) &= \frac{3A\beta_0^2 H^2}{\pi} \cdot \frac{\sin [(\beta_0 - \beta)l/2]}{(\beta_0 - \beta)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Подставив (41) в (36), получим

$$\begin{aligned} \text{Res}(A_1(\beta), \pm\beta_n) &= \frac{(-1)^n}{2n!} \left(-\frac{3A\beta_0^2 H^2}{\pi} \cdot \frac{\sin [(\beta_0 \pm \beta_n)l/2]}{\beta_0 \mp \beta_n} \right) \times \\ &\times (\pm\beta_n) \frac{2}{2n^2 + 4n + 3(1-\nu)}, \end{aligned} \quad (42)$$

откуда для рассеянного поля клиновых волн имеем

$$w_{\text{волн}} = -A 6i\beta_0^2 H^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n L_n^1(2\beta_n x) e^{-\beta_n x}}{2n^2 + 4n + 3(1-\nu)} \left[\frac{\sin(\beta_0 - \beta_n)l/2}{\beta_0 - \beta_n} e^{i\beta_n y} + \frac{\sin(\beta_0 + \beta_n)l/2}{\beta_0 + \beta_n} e^{-i\beta_n y} \right]. \quad (43)$$

Из выражения (43) следует, что рассеяние происходит во все клиновые моды, характеризующиеся номерами $n = 0, 1, 2, \dots$. Первое слагаемое в квадратных скобках (43) характеризует моды, рассеянные в прямом направлении, а второе слагаемое — моды, рассеянные в обратном направлении. Рассеяние в обратную моду с тем же номером, что и падающая, очевидно, представляет собой отражение от дефекта.

Нетрудно видеть, что амплитуды рассеянных волн пропорциональны H^2 . Данное обстоятельство отражает тот факт, что рассеяние пропорционально площади поперечного сечения дефекта $S = H^2 \operatorname{tg} \theta$. Отметим, что и в случае рассеяния поверхностных акустических волн пропорциональность площади поперечного сечения также имеет место. Однако в этом случае $S \sim H$, и рассеянное поле ведет себя линейным образом в зависимости от H , в соответствии с хорошо известными теоретическими и экспериментальными результатами (см. [9]).

Отметим в заключение, что несмотря на то что проделанный выше анализ относился к клину, изготовленному из изотропного материала, основные его результаты будут справедливы и для случая анизотропных остроугольных клиньев [10], отличающегося от изотропного лишь эффективной перенормировкой скоростей клиновых волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lagasse P.E., Mason I.M., Ash E.A. Acoustic surface waveguides — analysis and assessment // IEEE Trans. Sonics Ultrason. 1973. V. 20. P. 143–154.
2. Moss S.L., Maradudin A.A., Cunningham S.L. Vibrational edge modes for wedges of arbitrary interior angles // Phys. Rev. B. 1973. V. 8. №6. P. 2999–3008.
3. Krylov V.V. Wedge acoustic waves: new theoretical and experimental results // Singapore: World Scientific Publishing, 1990. P. 174–189.
4. Крылов В.В., Рагузина И.В. Рассеяние клиновых акустических волн // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 949–951.
5. McKenna J., Boyd G.A., Thurston R.N. Plate theory solution for guided flexural acoustic waves along the tip of a wedge // IEEE Trans. Sonics. Ultrason. 1974. V. 21. №3. P. 178–186.
6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
8. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979.
9. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991.
10. Крылов В.В., Шанин А.В. Влияние упругой анизотропии на скорости клиновых акустических волн // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 1. С. 130–133.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
13.01.92

V.V. Krylov, A.V. Shanin

SCATTERING OF WEDGE ACOUSTIC WAVES BY A SHALLOW GROOVE

Scattering of wedge acoustic waves by a shallow groove located at the tip of a sharp — angled elastic wedge is studied theoretically in the first order of the perturbation theory. An analytical expression for scattered field is derived which demonstrates that scattering into different orders modes takes place, the propagation directions of these modes being both forward and backward. The comparison of the results obtained with surface acoustic waves scattering is discussed.