

УДК 534.222

© 1993 г. Г.А. Ляхов, А.К. Проскуряков, О.В. Умнова,
К.Ф. Шипилов

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ КОЛЕБАНИЙ В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Теоретически установлены условия реализации бистабильности, автоколебательного и стохастического режимов работы ультразвукового резонатора, заполненного вязкой жидкостью. Результаты расчета выходных параметров подтверждены в эксперименте с 2 МГц пучком в глицерине при длинах резонатора 0,6–4 см. При входной интенсивности $I_i \approx 0,2-1 \text{ Вт/см}^2$ реализуется акустическая бистабильность, при $I_i \approx 1-1,5 \text{ Вт/см}^2$ – автоколебательный режим, при $I_i \approx 1,5-2 \text{ Вт/см}^2$ – режим нерегулярных изменений прошедшей через резонатор волны.

Наблюдение нелинейных акустических эффектов в жидкости, помещенной в резонатор, затрудняют возникающие под действием звука течения. На основе оценок [1] удалось подобрать материальные и геометрические параметры среды и источника, при которых преобладает тепловой механизм нелинейности. Соответствующая экспериментальная схема реализует ультразвуковые (УЗ) автоколебания в резонаторе в режиме бистабильности. Представленный эксперимент по внутррезонаторному самовоздействию УЗ в вязкой жидкости (87% водный раствор глицерина) продолжает исследования тепловой самофокусировки (СФ) и самопросветления (СП) [2–5].

В теоретической модели учтена зависимость скорости звука от температуры: $c(T) = c_0 - (\partial c / \partial T) T$, где T – звукоиндуцированное изменение температуры. Зависимость $c(T)$ ведет к сдвигу собственных частот резонатора и обеспечивает распределенную обратную связь прямой и обратной волн. В зависимости от мощности возбуждающего УЗ пучка возможны различные режимы работы резонатора – бистабильный, автоколебательный, стохастический (нерегулярные изменения интенсивности звука на выходе резонатора). Реальный УЗ пучок имеет конечную апертуру, а дисперсионная бистабильность резонатора приводит к появлению неоднородностей в его профиле [6]. Поэтому мы учли, что роль эффективного радиуса a пучка в установившемся режиме играет размер его осевого пятна $a \sim k^{-1}$ (k – волновое число).

В эксперименте с использованием УЗ пучка мощностью порядка 1 Вт наблюдаются все три названных режима работы резонатора длиной 0,6–4 см. Начальная температура глицерина составляла 0–20°С. В этом диапазоне еще велика температурная производная скорости звука ($\partial \ln c / \partial T \sim 10^{-2} \text{ К}^{-1}$), а поглощение почти линейно ($\partial \ln \delta / \partial T \sim 10^{-5} \text{ К}^{-1}$).

Рассмотрим резонатор длиной l , заполненный жидкостью с коэффициентом δ_0 поглощения УЗ, ограниченный зеркалами с коэффициентом отражения $R_1 = R_2 = R$ по интенсивности, причем одним из зеркал служит сам излучатель УЗ интенсивности I_i , с частотой ω_0 . В предположении малости времени пробега звуком резонатора ($l \sim 1 \text{ см}$, $t_r = l/c \sim \sim 10^{-5} \text{ с}$) по сравнению с характерными временами задачи для медленной амплитуды звукового давления в жидкости имеет вид:

$$\partial_{xx}^2 p + (\omega_0/c_0)^2 p = i(\omega_0/c_0)\delta_0 p - 2(\omega_0/c_0)^2 \gamma T p, \quad (1)$$

где $\gamma = |\partial \ln c / \partial T|$. Считаем, что длина образования ударной волны больше l ; кроме того, ограничимся плосковолновым приближением, воспользовавшись результатами [6], численного расчета показавшего, что поперечные эффекты (дифракция, СФ) в бистабильном резонаторе уменьшают эффективный радиус пучка.

Для встречных звуковых волн $p = p_f \exp(-ikx) + p_b \exp(ikx)$ и температурной решетки $T = T_0 + T_1 \exp(-2ikx) + T_1^* \exp(2ikx)$ усреднение (1) по пространственному периоду $2\pi/k = 2\pi c_0/\omega_0$ и уравнение теплопроводности

$$\partial_t T - \chi \partial_{xx} T + (\chi/a^2) T = (\delta_0/2\rho^2 c_p c_0) |p|^2 \quad (2)$$

дают, в предположении о том, что на однородный уровень T_0 влияет в основном диффузия в поперечном направлении ($a < l$), а время установления T_0 превышает время установления T_1 ($2ka > 1$), следующие укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_t \theta_0 + \theta_0 &= b_2 (I_f + I_b), \\ \partial_t \theta_1 + b_3 \theta_1 &= b_2 (I_f I_b)^{1/2} + \theta_2 \partial \Phi, \\ \partial_t \theta_2 + b_3 \theta_2 &= -\theta_1 \partial_t \Phi, \\ \partial_x I_{f,b} &= -\theta_2 (I_b I_f)^{1/2} \pm \ln(b_5) I_{f,b}, \\ \partial_x \Phi &= \theta_0 + \theta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_{f,b} &= |p_{f,b}|^2 / (2\rho c_0 I_i), \quad \Phi = \arg(p_f) - \arg(p_b), \\ \theta_0 &= T_0 2\omega_0 \gamma c / c_0, \\ \theta_1 &= (\omega_0 \gamma c l / c_0) [T_1 \exp(i\Phi) + T_1^* \exp(-i\Phi)], \\ \theta_2 &= i(\omega_0 \gamma c l / c_0) [T_1 \exp(i\Phi) - T_1^* \exp(-i\Phi)]; \end{aligned}$$

введены также безразмерные переменные $t' = t/\tau$, ($\tau = a^2/\chi$), $x' = x/l$ (штрихи далее опускаем). Граничные условия для (3):

$$\begin{aligned} I_b(l, t) &= b_1 I_f(1, t), \\ 1 &= I_f(0, t) + b_1 I_b(0, t) - 2 [b_1 I_b(0, t) I_f(0, t)]^{1/2} \times \cos [\Phi(1, t) + b_4], \\ \Phi(0, t) = \theta_{0,1,2}(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Процессом управляют пять параметров:

$$\begin{aligned} b_1 &= R, \\ b_2 &= (2I_i a^2 \delta_0 l \omega_0 \gamma c) / (\rho c_p c_0 \chi) = \tilde{b}_2 I_i; \\ b_3 &= (2ka)^2; \\ b_4 &= 2(kl - \pi n), \quad n - \text{целое}, \\ b_5 &= \exp(-\delta_0 l). \end{aligned}$$

Параметры b_1 и b_5 определяют добротность резонатора, b_2 — мощность возбуждения и нелинейность среды, b_3 — соотношение времен установления однородной температуры T_0 и тепловой решетки T_1 , b_4 — отстройку частоты падающего УЗ от ближайшей собственной частоты резонатора ($0 < b_4 < 2\pi$). Стационарная интенсивность на выходе из резонатора $I_T^s = I_f(1) (1 - b_1) I_i$ связана с входной неоднозначно:

$$\begin{aligned} I_T^s &= b_5 I_i (1 - b_1) / \{ 1 + (b_1 b_5)^2 - (2b_1 b_5) \cos [(2 + \\ &+ b_3^{-1}) \tilde{b}_2 I_T^s / (1 - b_1) + b_4] \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее, считая резонатор добротным ($b_1 \sim 1$, $-\ln b_5 < 1$), полагаем в (3) $I_f \approx I_b$, а неидеальность резонатора учтем в граничных условиях. В предположении медленности всех функций по x ($\theta_2 < 1$) усреднением (3) по длине резонатора приходим к системе

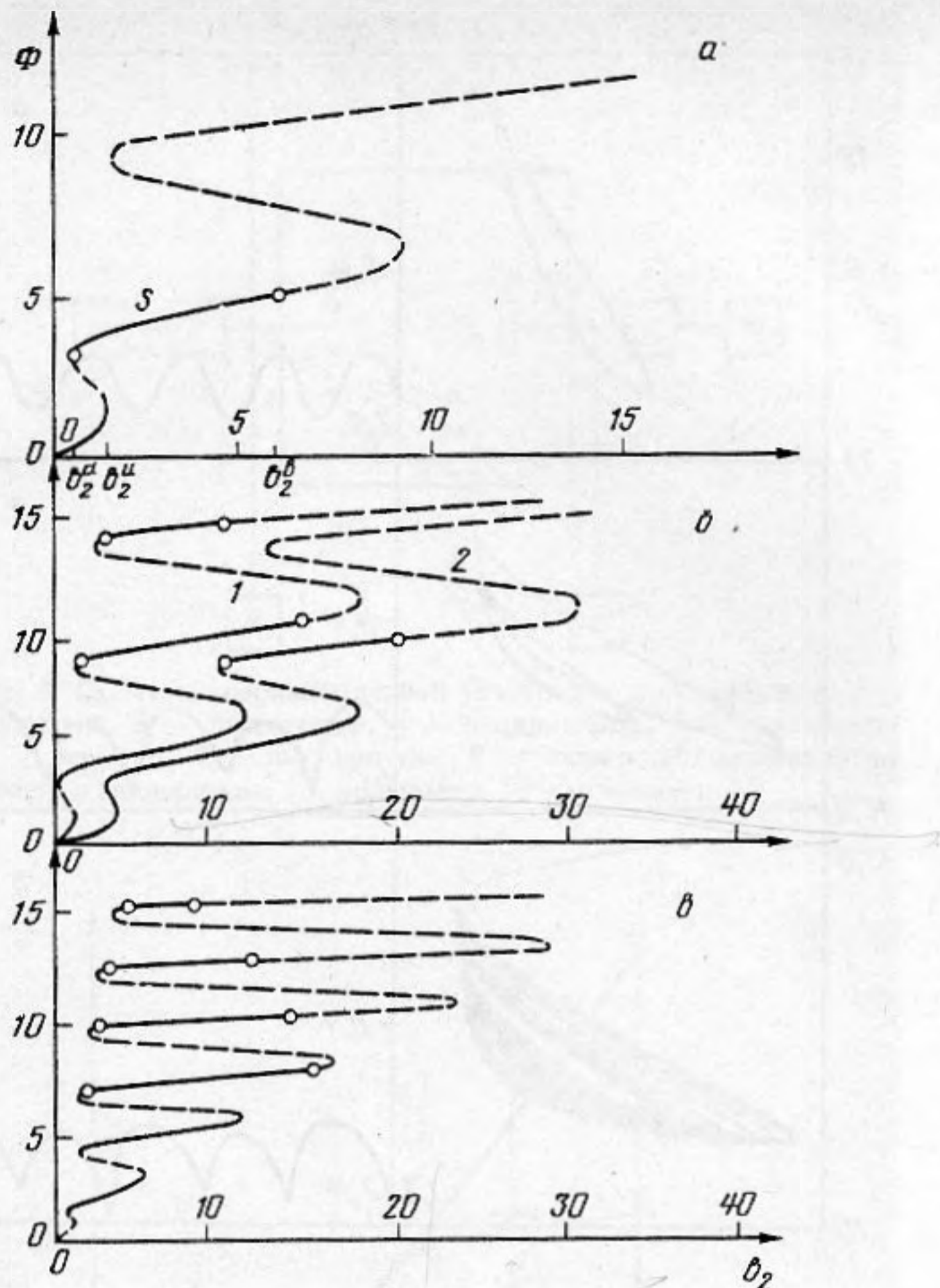


Рис. 1. Бифуркационные диаграммы $\Phi^s(b_2)$ при $b_1 = 0,9$; $b_4 = \pi$: а - $b_3 = 2$, $b_5 = 0,6$; б - $b_3 = 5$, $b_5 = 0,6$ (1), 0,3 (2); в - $b_3 = 10$, $b_5 = 0,6$. Сплошные линии - устойчивые участки, штриховые - неустойчивые, ■ - бифуркации Хопфа

обыкновенных дифференциальных уравнений для $\theta_1(t) = \theta_1(1t) = \theta_2(t) = \theta_2(1, t)$, $\Phi(t) = \theta_0(1, t) + \theta_1(1, t)$:

$$\begin{aligned} \Phi' &= [3b_2J - \Phi - (b_3 - 1)\theta_1] / (1 - \theta_2), \\ \theta_1' &= -b_3\theta_1 + b_2J + \Phi'\theta_2, \\ \theta_2' &= -b_3\theta_2 - \Phi'\theta_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $J = b_5 \exp(-\theta_2) / [1 + (b_1 b_5)^2 - 2(b_1 b_5) \cos(\Phi + b_4)] = I_T^s / (I_i(1 - b_1))$.

Линеаризация (5) по малым отклонениям от стационарных значений дает характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} (\lambda/b_3)^3 + (\lambda/b_3)^2 [1 + b_3^{-1} + 3P - 3Q] + (\lambda/b_3) [1 + 2b_3^{-1} + P(5 + b_3^{-1}) - \\ - Q(2 + b_3^{-1})] + [P(2 + b_3^{-1}) + b_3^{-1}] = 0, \end{aligned}$$

где $P = -(b_2/b_3)(dJ^s/d\Phi)$, $Q = (b_2J^s/b_3)^2$, а $J^s = I_T^s / (I_i(1 - b_1))$ определяется из (4). Анализ (6) показывает, что автоколебательный режим возникает при $1 + b_3^{-1} + 3P - 3Q \approx 0$, а период автоколебаний $t_0 = 2\pi a^2 / J [b_3(1 + 2Pb_3 + P)]^{1/2}$ растет с увеличением длины резонатора.

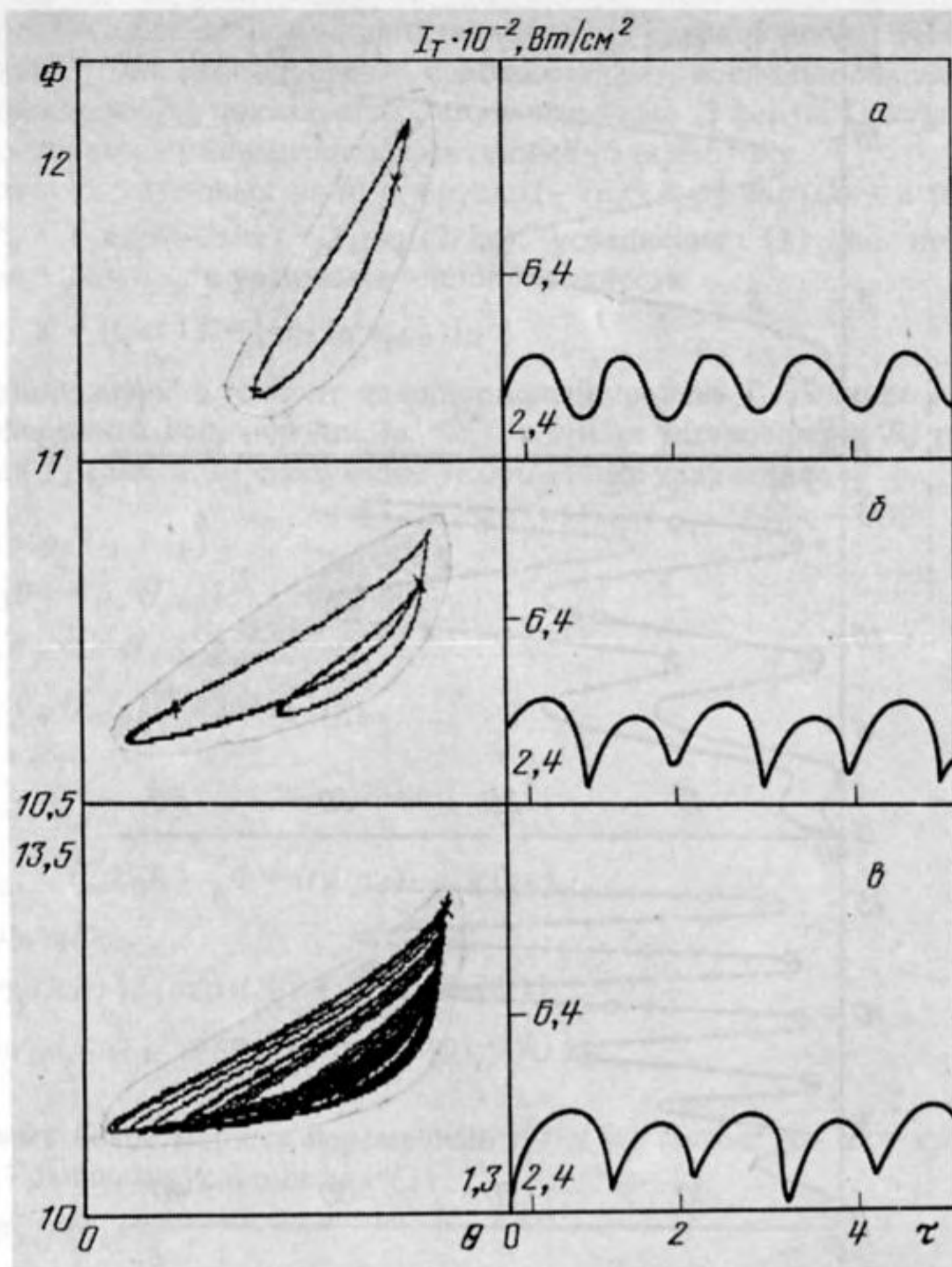


Рис. 2. Фазовые диаграммы $\Phi(\theta_1)$ и интенсивность установившихся автоколебаний $I_T(\tau = t/(a^2/\chi))$: $b_1 = 0,9$; $b_4 = \pi$, $b_5 = 5$, $b_2 = 15,5$ (а), 16,5 (б), 16,55 (в)

Численное решение (5) проведено с использованием пакета AUTO, позволяющего исследовать устойчивость стационарных решений, отыскивать точки бифуркаций рождения цикла, исследовать решение вблизи бифуркационных точек.

С ростом параметра b_3 увеличивается число бифуркационных точек (рис. 1), они возникают парами и перемещаются на верхние участки мультистабильной зависимости $\Phi^s(b_2)$. При этом низшая правая бифуркационная точка смещается в область больших b_2 (значит, и больших I_l). В областях устойчивости достигается стационарное значение пропускания. Положение бифуркационных точек слабо зависит от отстройки b_4 . С уменьшением b_5 (с ростом $\delta_0 l$) происходит уничтожение бифуркационных точек на верхних участках зависимости $\Phi^s(b_2)$, нижняя правая бифуркационная точка смещается в область больших значений b_2 , чем длиннее резонатор, тем большее значение I_l необходимо для достижения автоколебательного режима.

При переходе точки бифуркации однопериодическая зависимость $I_T(t)$ (рис. 2, а) претерпевает удвоение периода (рис. 2, б), затем реализуется через последовательность удвоений периода стохастический режим (рис. 2, в).

Измерения были проведены в глицерине с начальной температурой 10°C ($\delta_0 \approx 0,2 \text{ см}^{-1}$; $c_0 \approx 2 \cdot 10^5 \text{ см/с}$; $\gamma \approx 10^{-2} \text{ К}^{-1}$; $\rho = 1,2 \text{ г/см}^2$; $c_p \approx 4 \text{ Дж/г}\cdot\text{К}$) при $l = 0,6 - 4 \text{ см}$, $R = 0,9$. Таким образом, экспериментальные значения параметров: $b_1 =$

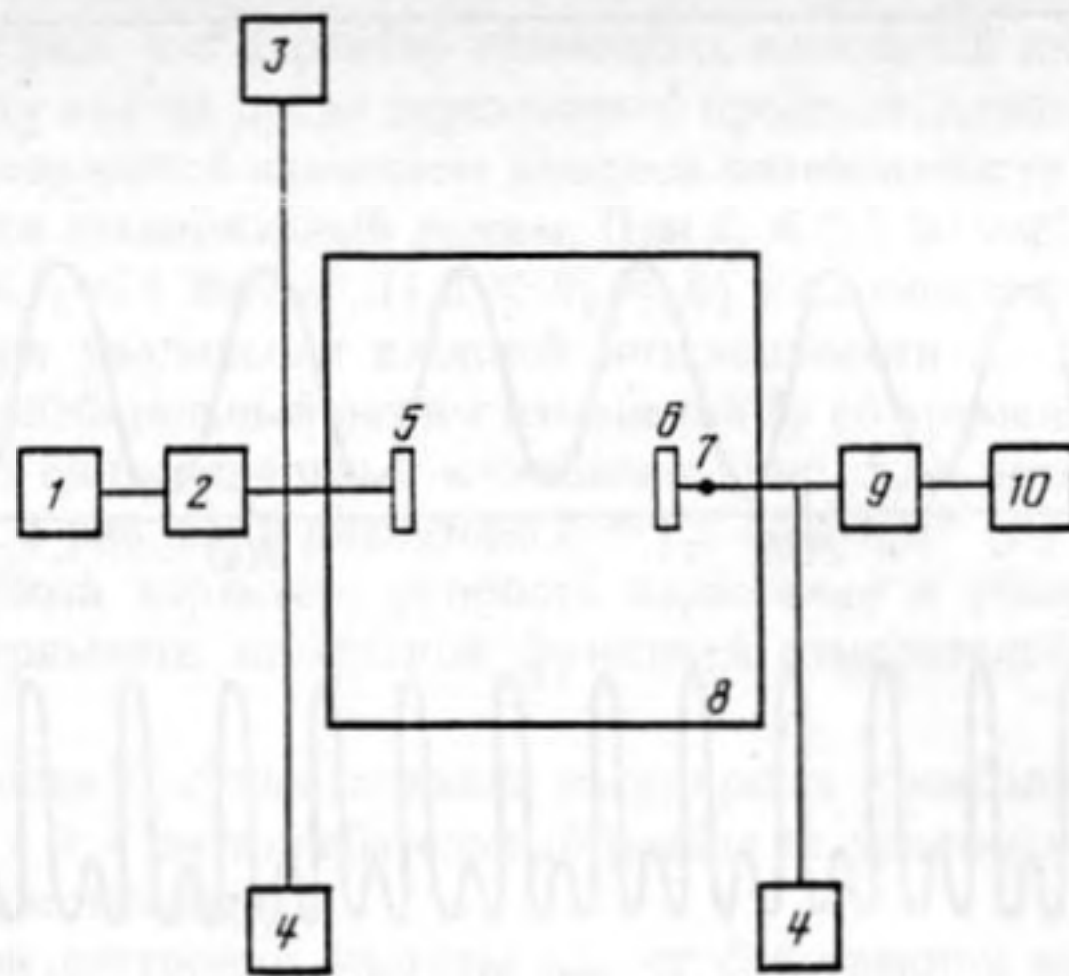


Рис. 3. Схема экспериментальной установки: 1 – генератор, 2 – усилитель, 3 – частотомер, 4 – осциллограф, 5 – излучатель, 6 – зеркало, 7 – пьезодатчик, 8 – термостабилизированная кювета с глицерином, 9 – вольтметр, 10 – самописец

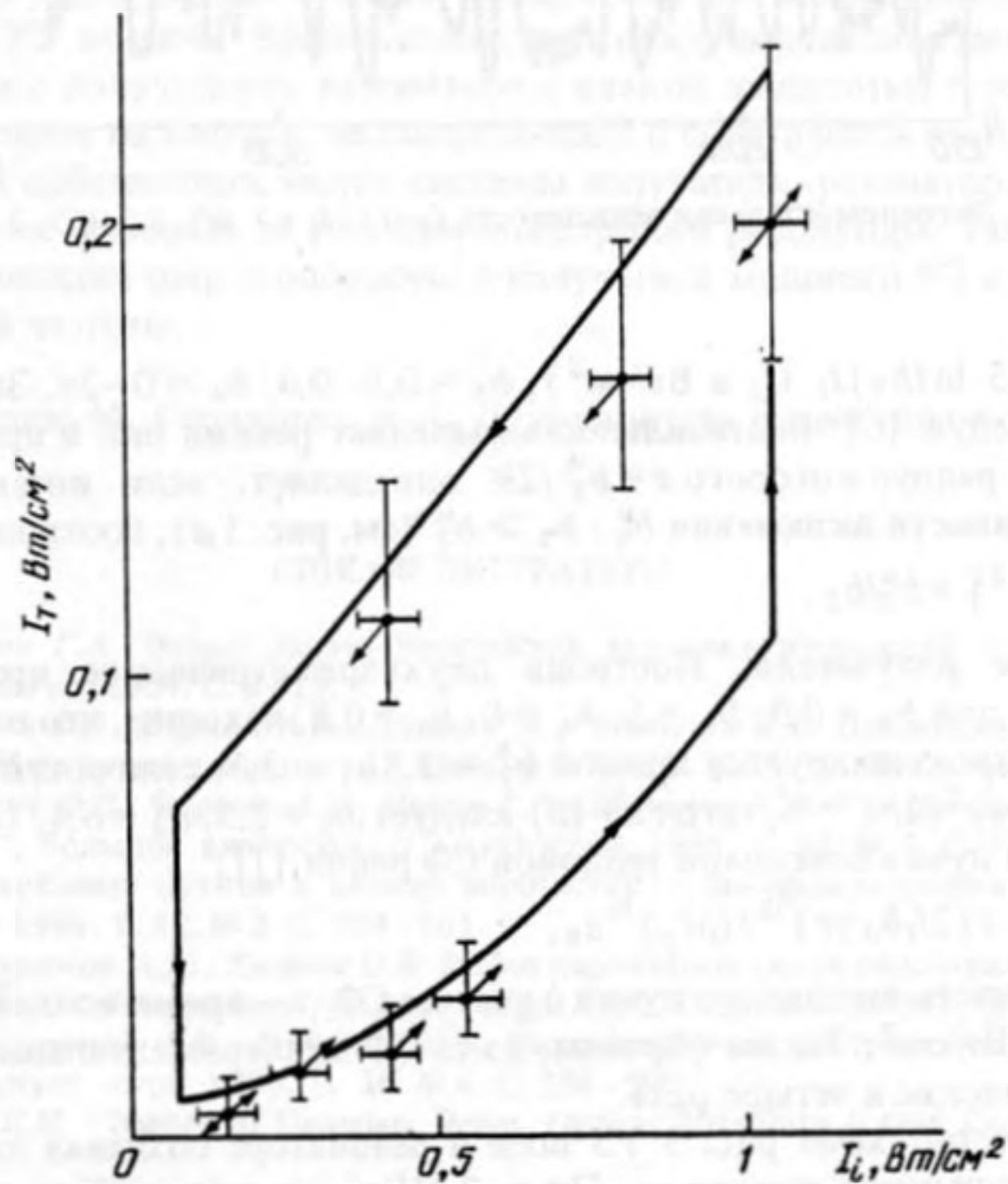


Рис. 4. Зависимость интенсивности ультразвука на выходе резонатора I_T от входной интенсивности I_i . Стрелками обозначено направление изменения I_i . $T_0 = 10^\circ\text{C}$ $l = 1,2$ см ($b_1 = 0,9$, $b_2 = 6I_i$, $b_4 = 0$, $b_5 = 0,75$). Сплошная линия – теория; экспериментальные точки приведены с указанием точности измерений

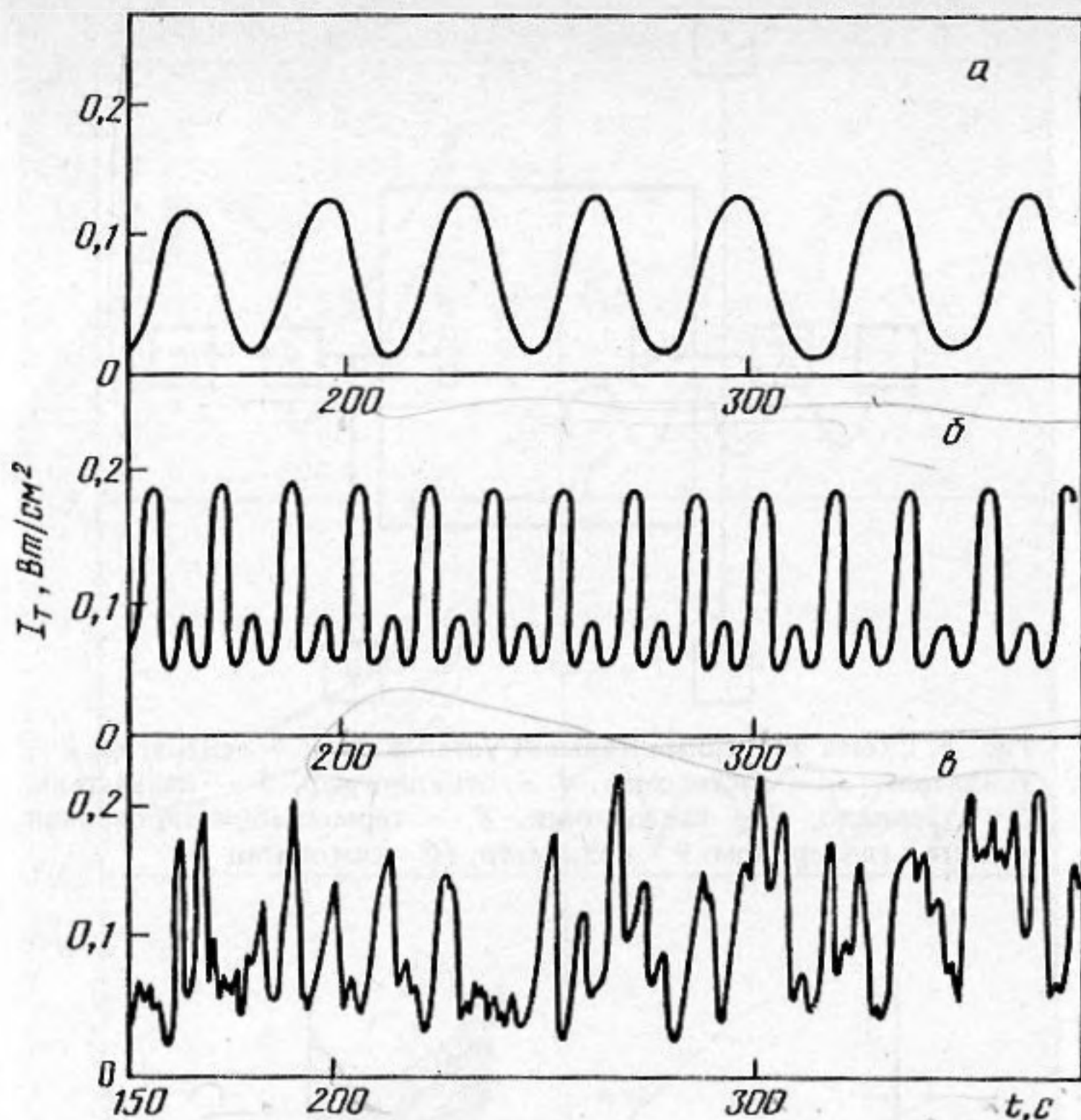


Рис. 5. Экспериментальная зависимость $I_T(t)$: $I_i = 1$ (а), 1,2 (б), 2 Вт/см² (в)

$= 0,9$, $b_2 = -0,25 \ln(b_5) I_i$ (I_i в Вт/см²), $b_5 = 0,9-0,4$, $b_4 = 0-2\pi$. Значение параметра b_3 определим, следуя [6]: бистабильность выделяет резкий пик в приосевой части пучка, эффективный радиус которого $a = b_3^{1/2} / 2k$ определяет, если интенсивность на оси близка к интенсивности включения b_2^u : $b_2 \geq b_2^u$ (см: рис. 1 а), соотношение

$$\exp[-(a/a_0)^2] = b_2^u/b_2, \quad (8)$$

a_0 — апертура излучателя. Построив двухпараметрическое продолжение бифуркационной точки для $b_1 = 0,9$, $b_3 = 5$, $b_4 = 0$, $b_5 = 0,8$, находим, что на участке с зависимостью b_2^b от b_3 аппроксимируется прямой $b_2^b \approx 3,8b_3 - 3,1$, величина b_2^u слабо зависит от b_3 : $b_2^u = \pi(1 + b_1 b_5)^2 / 2b_5 \approx 6$, тогда из (8) следует $b_3 = 2,5$, $b_2^b = 6,4$, ($I_i^b \approx 1,3$ Вт/см²).

Степень сжатия пучка благодаря тепловой СФ равна [1]:

$$(I_T/I_f)^{1/2} \approx 1 - l(2I_i \delta_0 \gamma \tau)^{1/2} / (\rho c_p)^{1/2} a_0,$$

где I_f — интенсивность выходного пучка с учетом СФ, τ — время воздействия, $(I_T/I_f)^{1/2} \approx 0,5$ при $I_i \approx 1$ Вт/см². Таким образом, из-за СФ экспериментальные значения I_i превосходят теоретические в четыре раза.

В эксперименте по схеме рис. 3 УЗ поле в резонаторе создавал пьезокерамический излучатель 5 (резонансная частота $\omega_0 / 2\pi = 2$ МГц), на который через усилитель мощности 2 приходил сигнал с генератора 1. Давление в прошедшей волне измеряли широкополосным пьезодатчиком 6, подключенным к вольтметру 9, служившему линейным детектором для самописца 10. Параметры подаваемого и принимаемого электрических сигналов контролировали с помощью осциллографа 4 и частотомера 3. Одним из зеркал служил излучатель с апертурой $2a_0 = 1,5$ см, вторым — металлическая пластина с коэффициентом отражения по интенсивности 0,9. Зеркала были установлены в термостабилизированной кювете, заполненной глицерином. Резонансная кривая использованного пьезоизлучателя перекрывала несколько аксиальных мод резонатора.

Эксперимент обнаружил, что характер временных изменений интенсивности I_T прошедшей через резонатор волны после переходного процесса, длящегося 30–200 с ($\tau = a_0^2/\chi$), полностью определяется значением входной интенсивности. Если $I_i \leq 1$ Вт/см² ($l = 1,2$ см), реализуется стационарный режим. При $I_i \leq 0,2$ Вт/см² I_T линейно зависит от I_i , в диапазоне $0,2 \leq I_i \leq 1$ Вт/см² ($1,2 < b_2 < 6$) наблюдается акустическая бистабильность (рис. 4). При увеличении входной интенсивности до 1–1,5 Вт/см² ($b_2 \approx 6-9$) наблюдается колебательный режим изменения I_T со временем. При дальнейшем повышении I_i , исходно синусоидальные колебания (рис. 5а) превращаются в сумму гармоник (рис. 5б, ср. с рис. 2). В диапазоне $I_i \approx 1,5-2$ Вт/см² ($b_2 \approx 9-12$) изменения приобретают нерегулярный характер, скорость нарастания и убывания сигнала определяется в этом эксперименте аппаратной функцией измерительной системы (фронт 0,1 с) (рис. 5в).

Диапазон интенсивности I_i существования регулярных колебаний сужался с ростом длины резонатора, при $l > 4$ см колебательный режим не удалось наблюдать, столь резким был переход к стохастичности.

Изменения начальной отстройки частоты ω_0 от собственной частоты резонатора и начальной температуры T_0 не сказывались качественно на режиме изменений I_T , от них зависели лишь форма гистерезисной петли и частота автоколебаний.

Тепловой механизм нелинейности играет определяющую роль в резонаторной схеме организации самовоздействия ультразвука в вязкой жидкости. Изменения температуры на 2–15°С в области распространения волны обеспечивает достаточные изменения скорости звука $c(T)$ для осуществления качественно различных режимов самоподстройки резонатора УЗ волной. Эффективная звукоиндуцированная перестройка акустически связанного с излучателем резонатора с вязкой жидкостью в нем позволит получить мощное УЗ поле на частоте, не совпадающей с собственной частотой излучателя, но равной одной из собственных частот системы излучатель–резонатор, причем ее можно заданным образом изменять за счет самоподстройки резонатора. Такой подход перспективен для реализации широкополосного излучателя мощного УЗ с плавной перестройкой центральной частоты.

Авторы благодарны М. Столярову и А. Лукьянову за содействие в проведении численного счета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бункин Ф.В., Ляхов Г.А. Новые задачи нелинейной акустики жидкостей // Исследования по гидрофизике. М.: Наука, 1984. С. 3–19.
2. Ассман В.А., Бункин Ф.В., Верник А.В., Ляхов Г.А., Шипилов К.Ф. Наблюдение теплового самовоздействия звукового пучка в жидкости // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 148–150.
3. Ассман В.А., Бункин Ф.В., Верник А.В., Ляхов Г.А., Шипилов К.Ф. Самовоздействие звукового пучка в жидкости с большой вязкостью // Акуст.журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 138–140. Тепловое самовоздействие звуковых пучков в вязких жидкостях – самофокусировка и самопросветление // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 3. С. 754–761.
4. Ляхов Г.А., Проскуряков А.К., Умнова О.В. Расчет параметров самоконцентрации акустического волнового пакета в вязкой жидкости // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 502–506.
5. Ассман В.А., Проскуряков А.К., Шипилов К.Ф. Распространение ультразвуковых пучков в вязких жидкостях // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 4. С. 586–590.
6. Firth W.J., Wright E.M. Theory of Gaussian Beam Optical Bistability // Opt. Commun. 1982. V. 4. P. 233–238.

Институт общей физики
Российской академии наук

Поступила в редакцию
26.05.92

NONLINEAR REGIMES OF OSCILLATIONS IN ACOUSTIC RESONATOR

The conditions for realization of bistability, autovibration and stochastic regimes of an ultrasonic resonator with a viscous liquid are found out theoretically. The calculations of output parameters are confirmed experimentally with a 2 MHz beam in glycerol for the resonator length from 0,6 to 4 cm. The acoustic bistability appears at the input intensity I_i from 0,2 up to 1 W/cm², at $I_i = 1 \div 1,5$ W/cm² the autovibration regime takes place and at $I_i = 1,5 \div 2$ W/cm² the regime of nonlinear beating of the output intensity arises. It turns out that thermal nonlinearity plays an essential role in the self-action of ultrasonic waves in a resonator. The increase of temperature ($2 \div 15^\circ$ C) in the propagation regime of the wave provides the alterations of the sound velocity $c(T)$ sufficient for different regimes of the resonator self-sweeping by an acoustic wave. The efficient sound-induced self-sweeping of the resonator coupled with transducers gives an opportunity to obtain intense ultrasonic fields with the frequency equal to the eigenfrequency of the resonator-transducers system and to vary it due to the resonator self-sweeping. This approach may be recommended for the construction of wide-band transducers of intense ultrasound with smooth sweep of the central frequency.