АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 **1993** **Вып. 2**

УДК 534.222

© 1993 г. **К.А. Наугольных, С.А. Рыбак, Ю.И. Скрынников**

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена задача о параметрическом излучении звука на разностной частоте, генерируемого нелинейным взаимодействием волн накачки в присутствии компактного неоднородного потока жидкости. Установлено, что наличие неоднородного потока может обусловить появление на диаграмме направленности излучения дополнительных лепестков. Показано, что их амплитуда может быть сравнима с величиной основного максимума в том случае, если в потоке присутствуют достаточно мелкомасштабные по сравнению с его геометрическими размерами пространственные структуры.

Как известно [1,2], излучение параметрической гидроакустической антенны формируется на достаточно протяженной (длиной в десятки километров) трассе распространения волн накачки. Поэтому в ее диаграмме направленности должны найти отражения те факторы, наличие которых вдоль трассы способно оказать заметное влияние на нелинейное взаимодействие звуковых волн. Как показали недавно проведенные эксперименты [3] по гидроакустическому зондированию толщи океана, к таким факторам, по-видимому, следует отнести неоднородное гидродинамическое поле скоростей, всегда в той или иной мере присутствующее в океане. В настоящей работе рассмотрена одна из задач о формировании параметрического излучения в неоднородном потоке жидкости.

При описании нелинейного взаимодействия звуковых волн в неоднородном потоке $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ жидкости будем исходить из уравнения

$$\Delta p - c^{-2} D_t^2 p = -\frac{\epsilon}{\rho c^4} D_t^2 p_0^2, \qquad (1)$$

в котором c – скорость звука в жидкости, ρ – ее плотность, ϵ – коэффициент нелинейности жидкости, p – звуковое давление, генерируемое полем накачки p_0, а через D_t обозначена конвективная производная $D_t = \partial_t + \mathbf{u}\nabla$. Уравнение (1) получено в адиабатическом приближении, предполагая, что поток изменяется на масштабах, значительно превосходящих длины всех акустических волн, рассматриваемых ниже. Считая гидродинамическое число Маха $M = u/c$ малым, заменим в уравнении (1) оператор D_t^2 на его приближенное выражение $\partial_t^2 + 2\mathbf{u}\nabla\partial_t$:

$$\Delta p - c^{-2} p_{tt} - 2c^{-2}\,\mathbf{u}\nabla p_t = -\frac{\epsilon}{\rho c^4}\,\partial_t^2 p_0^2 - \frac{2\epsilon}{\rho c^4}\,\mathbf{u}\nabla\partial_t p_0^2.$$

Дополнительные слагаемые, появившиеся при этом в левой и правой частях нелинейного волнового уравнения, описывают рассеяние волн на потоке и эффект модуляции им нелинейного параметра среды соответственно. Таким образом, влияние плавнонеоднородного потока жидкости на нелинейное взаимодействие звука сводится к следующим трем главным эффектам: а) рассеяние поля накачки на потоке, сопровождающееся генерацией звука; б) рассеяние волн комбинационного тона на потоке и в) генерация звука полем накачки вследствие нелинейного взаимодействия модулированного потоком. Нетрудно убедиться в том, что каждый из них является эффектом второго порядка малости по акустическому и первого — по гидродинамическому числам Маха. Следовательно, вклад каждого из перечисленных механизмов в возбуждение поля комбинационных тонов аддитивен и может быть рассчитан по отдельности.

Пренебрегая эффектами рассеяния, рассмотрим здесь только задачу о генерации звука полем накачки в среде, нелинейный параметр которой модулирован гидродинамическим потоком $\mathbf{u}$. Искомое звуковое поле может быть найдено из уравнения

$$\Delta p - c^{-2} p_{tt} = -\frac{\epsilon}{\rho c^4} \vartheta_t^2 p_0^2 - \frac{2\epsilon}{\rho c^4} \mathbf{u}\nabla\vartheta_t p_0^2, \tag{2}$$

решение которого представимо в виде суммы

$$p = p_1 + p_2 \tag{3}$$

полей комбинационных тонов, генерируемых волнами накачки в однородной среде:

$$\Delta p_1 - c^{-2} p_{1tt} = -\frac{\epsilon}{\rho c^4} \vartheta_t^2 p_0^2$$

и — при участии потока:

$$\Delta p_2 - c^{-2} p_{2tt} = -\frac{2\epsilon}{\rho c^4} \mathbf{u}\nabla\vartheta_t p_0^2.$$

Для оценки величины эффекта воспользуемся простейшей моделью параметрического излучателя, предложенной Вестервельтом [4], в которой первичное поле p_0 составляют две гармонические волны на близких частотах ω_1 и ω_2 ($\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1$, ω_2), распространяющиеся в одном направлении:

$$p_0 = A_1(\mathbf{r}_\perp)\,\Phi_1(z)\,p_{01}\sin(\omega_1(t - z/c) + \varphi) + A_2(\mathbf{r}_\perp)\,\Phi_2(z)\,p_{02}\sin(\omega_2(t - z/c)). \tag{4}$$

Функции Φ_1 и Φ_2 описывают затухание гармоник:

$$\Phi_1(z) = \exp(-\alpha_1 z), \; \Phi_1(z) = \exp(-\alpha_2 z),$$

а апертурные множители берутся в виде

$$A_1(\mathbf{r}_\perp) = \exp(-r_\perp^2/a_1^2), \; A_2(\mathbf{r}_\perp) = \exp(-r_\perp^2/a_2^2).$$

Здесь a_1 и a_2 по порядку величины совпадают с размерами излучателей первой и второй гармоники соответственно, p_{01} и p_{02} — амплитуды гармоник, φ — произвольная фаза, $\mathbf{r}_\perp$ — компонента радиус-вектора в плоскости перпендикулярной направлению распространения волн накачки (4).

Сохранив в p_0^2 лишь компоненту на разностной частоте $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, получим уравнения

$$\Delta P_1 + k^2 P_1 = \frac{\epsilon\Omega^2}{\rho c^4} A_1 A_2 \Phi_1 \Phi_2 e^{-ikz}, \tag{5}$$

$$\Delta P_2 + k^2 P_2 = -\frac{2\epsilon\Omega^2}{\rho c^4}\left(\frac{u_z}{c} - i\frac{\mathbf{u}_\perp}{a\Omega}\frac{\mathbf{r}_\perp}{a}\right) A_1 A_2 \Phi_1 \Phi_2 e^{-ikz}, \tag{6}$$

$$k = \Omega/c, \; a = a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2)^{-1/2}$$

для комплексных амплитуд низкочастотных составляющих компонент p_1 и p_2 генерируемого звукового поля (3),

$$p_1 = \frac{1}{2} P_2(z, \mathbf{r}_\perp) \exp(i\Omega t + i\varphi) + \text{к.с.},$$

$$p_2 = \frac{1}{2} P_2(z, \mathbf{r}_\perp) \exp(i\Omega t + i\varphi) + \text{к.с.}$$

Для нахождения решений каждого из полученных уравнений Гельмгольца в дальней волновой зоне воспользуемся приближенной функцией Грина для свободного пространства в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'},$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{n}k$, а $\mathbf{n}$ – единичный вектор, задающий направление на точку наблюдения. Тогда, разложив скорость потока в интеграл Фурье

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{q}\, \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}), \tag{7}$$

получим следующие решения уравнений (5) и (6):

$$P_1 = -P_0 \frac{\exp(-r_\perp^2 a^2/4)}{\alpha_1 + \alpha_2 - i(k_z - k)} \frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{8}$$

$$P_2 = P_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \int d^3\mathbf{q} \frac{\exp(-|\mathbf{r}_\perp + \mathbf{q}_\perp|^2 a^2/4)}{\alpha_1 + \alpha_2 - i(k_z + q_z - k)} \left[\left(\frac{2}{c} + \frac{q_z}{\Omega}\right)\tilde{u}_z - \frac{\mathbf{k}_\perp \tilde{\mathbf{u}}_\perp}{\Omega}\right], \tag{9}$$

$$P_0 = \frac{\epsilon \Omega^2 p_{01} p_{02} a^2}{4\rho c^4}.$$

В интеграле (9) учтено также условие несжимаемости $\tilde{u}_z q_z + \tilde{\mathbf{u}}_\perp \mathbf{q}_\perp = 0$, которое с большой точностью выполнимо для любого гидродинамического поля скоростей в океане.

Компонента P_1 определяет излучение на разностной частоте в отсутствие потока. Оно максимально в направлении распространения волн накачки, что, как нетрудно видеть из (8), является следствием трехволнового резонанса, определяемого условиями

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \quad \Omega = \omega_1 - \omega_2, \tag{10}$$

где $\mathbf{k}_1 = \mathbf{e}_z \omega_1/c$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{e}_z \omega_2/c$ – волновые векторы гармоник, составляющих поле накачки ($\mathbf{e}_z$ – единичный вектор, направленный вдоль оси z). Таким образом, в полном соответствии с результатами, полученными Вестервельтом [4] для однородной среды, амплитуда единственного максимума на диаграмме направленности параметрического излучения в отсутствие потока равна

$$|P_1|_{\max} = \frac{P_0}{(\alpha_1 + \alpha_2) r},$$

а его угловая полуширина –

$$\delta\theta_0 = (2(\alpha_1 + \alpha_2)/k)^{1/2}.$$

Иначе формируется диаграмма направленности компоненты P_2. Обращает на себя внимание тот факт, что в этом случае при каждом фиксированном векторе $\mathbf{q}$ максимум модуля подынтегрального выражения в (9) определяется в отличие от (10) уже условиями четырехволнового резонанса

$$\mathbf{k} + \mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \quad \Omega = \omega_1 - \omega_2, \tag{11}$$

в котором участвует также волна нулевой частоты – фурье-гармоника потока. Расширение числа волн, участвующих в резонансе безусловно не может не сказаться и на направленности компоненты P_2 после интегрирования в **q**-пространстве.

Для оценки направленности компоненты P_2 учтем, во-первых, ограниченность пространственного спектра рассматриваемого потока компонентами со спектральными векторами, величины которых $q < q^{\max}$. Причем изначально предполагалось, что величина ограничивающего вектора $\mathbf{q}^{\max}$ гораздо меньше волнового числа любой рассматриваемой здесь акустической волны, в частности $q^{\max} \ll a^{-1}$. Поэтому можно без потери точности заменить в выражении (9) бесконечные пределы интегрирования по поперечной компоненте $\mathbf{q}_\perp$ на соответствующие конечные, положив при этом $\mathbf{q}_\perp = 0$ в экспоненциальном множителе. Далее, принимая во внимание тождество

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon + i(x - x_0)} = \pi\delta(x - x_0) - iP\left(\frac{1}{(x - x_0)}\right),$$

очевидно, для оценки величины главного эффекта можно приближенно считать, что

$$\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 - i(k_z + q_z - k)} \approx \pi\delta(q_z + k_z - k)$$

при условии

$$(\alpha_1 + \alpha_2) L_z \ll 1, \tag{12}$$

в котором L_z – максимальный продольный пространственный масштаб потока. В результате имеем

$$P_2 = \frac{2\pi}{c} P_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \exp(-k_\perp^2 a^2/4) \int_0^{q_\perp^{\max}} q_\perp dq_\perp \int_0^{2\pi} d\varphi\, \tilde{u}_z(k - k_z, q_\perp, \varphi). \tag{13}$$

Из выражения (13) следует, что структура диаграммы направленности компоненты P_2 определяется исключительно характером зависимости функции $\tilde{u}_z$ от продольной компоненты q_z спектрального вектора. Действительно, каждому максимуму функции $\tilde{u}_z(q_z)$ с координатой $q_z^{(i)}$ соответствует пара симметрично расположенных боковых лепестков с угловыми координатами θ_i, определяемыми из соотношения

$$k - k_z = q_z^{(i)},$$

которое для малых углов $\theta_i \ll 1$ дает

$$\theta_i = \pm (q_z^{(i)}/k)^{1/2}. \tag{14}$$

Поскольку соответствующий каждой паре масштаб $\Lambda_i = 1/q_z^{(i)}$ заведомо меньше L_z, то всегда выполняется условие $|\theta_i| > \delta\theta_0$, т.е. дополнительные максимумы не затеняются основным максимумом на диаграмме направленности суммарного давления (3). По порядку величины их амплитуда равна

$$|P_2^{(i)}|_{\max} \approx |P_1|_{\max}\, 2\pi M(\alpha_1 + \alpha_2) L_x q_x^{\max} L_y q_y^{\max}/q_z^{(i)}, \tag{15}$$

где L_x и L_y – поперечные размеры потока. Как следует из выражения (15), эффект тем ощутимее, чем богаче пространственный спектр рассматриваемого гидродинамического поля скоростей:

$$q_x^{\max} \gg L_x^{-1},\ q_y^{\max} \gg L_y^{-1}.$$

Поскольку $q_z^{(i)} \sim \theta_1^2$, то

$$|P_2^{(i)}|_{\max} \sim \theta_i^{-2},$$

поэтому реально доступны наблюдению лишь несколько лепестков, расположенных в непосредственной близости от главного максимума.

В другом предельном случае

$$(\alpha_1 + \alpha_2) L_z \gg 1 \tag{16}$$

диаграмма направленности компоненты P_2 так же, как и компоненты P_1, имеет единственный максимум:

$$P_2 = -\frac{2}{c} P_1 \int_{q_z^{\min}}^{q_z^{\max}} dq_z \int_0^{q_\perp^{\max}} q_\perp dq_\perp \int_0^{2\pi} d\varphi \tilde{u}_z(q_z, q_\perp, \varphi). \quad (17)$$

В заключение сформулируем основные результаты работы. Качественно описаны особенности диаграммы направленности параметрического излучения звука на разностной частоте, сформированного в результате нелинейного взаимодействия, модулированного компактным гидродинамическим потоком. Показано, что определяющим фактором в формировании направленности такого излучения является зависимость фурьегармоники продольной компоненты скорости потока от продольной компоненты спектрального вектора. Установлено, что амплитуды дополнительных максимумов на диаграмме направленности могут быть сравнимы с основным в том случае, если рассматриваемый поток содержит достаточно мелкие пространственные структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. С. 237.
2. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И.* Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. С. 264.
3. *Есипов И.Б., Зименков С.В., Калачев А.И., Назаров В.Е.* Зондирование океанического вихря направленным параметрическим излучением // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 1. С. 173–176.
4. *Westervelt P.J.* Parametric acoustic array // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. V. 35. P. 535–537.

Акустический институт
им. Н.Н. Андреева
Российской академии наук

Поступила в редакцию
17.12.92

K.A. Naugol'nykh, S.A. Rybak, Yu.I. Skrynnikov

ON THE NONLINEAR SOUND INTERACTION IN THE PRESENCE OF AN INHOMOGENEOUS STREAM

Following Westervelt's model, the expression for an acoustic parametric array was derived taking into account the presence of an inhomogeneous ocean stream. It was shown that the possible influence of the stream on the acoustic interaction is to initiate even number of symmetrical side maximums in the directivity pattern of the parametric array. Their magnitudes can reach the same value as the main maximum has if the stream is composed of vortices of small enough scale.