

УДК 534.232

© 1993 г. И.Л. Рубанов

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА РАДИАЛЬНО КОЛЕБЛЮЩИМСЯ
ОТРЕЗКОМ ТРУБЫ С КОЛЬЦЕВОЙ ЩЕЛЬЮ**

Решена задача об излучении звука радиально колеблющимся отрезком трубы с кольцевой щелью. Приведены результаты исследования зависимости составляющих импеданса излучения от частоты возбуждения, радиуса и высоты трубы.

В работах [1–4] было исследовано звуковое поле радиально колеблющегося отрезка трубы конечной высоты. Рассмотрим звуковое поле, создаваемое в пространстве равномерно пульсирующим отрезком трубы с кольцевой щелью. Геометрия задачи приведена на рис. 1, где a – радиус трубы, $2H_1$ – высота трубы, 2δ – ширина щели. Будем предполагать, что толщина стенок трубы пренебрежимо мала. В математической постановке задача заключается в нахождении функции $p(r, z)$ – звукового давления, являющейся решением уравнения Гельмгольца, удовлетворяющей условиям излучения на бесконечности и граничным условиям на внутренней и внешней излучающих поверхностях:

$$\frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=a} = f(z); \quad \delta \leq |z| \leq H_1, \tag{1}$$

где $f(z)$ – четная функция – распределение колебательной скорости по высоте трубы, ρc – волновое сопротивление среды. Здесь и далее по тексту все линейные размеры – волновые.

Воспользовавшись методом частичных областей, будем искать решение в виде интеграла Фурье [1, 4]

$$p(r, z) = i\rho c \int_0^\infty \gamma A(t) \cos tz \begin{cases} H_1^{(1)}(\gamma a) J_0(\gamma r) |_{r \leq a} \\ H_0^{(1)}(\gamma r) J_1(\gamma a) |_{r > a} \end{cases} dt, \tag{2}$$

где $\gamma = \sqrt{1-t^2}$; $A(t)$ – неизвестная весовая функция; $J_\nu(x)$ и $H_\nu^{(1)}(x)$ – функция Бесселя и Ханкеля соответственно.

Выражение (2) удовлетворяет условию непрерывности колебательной скорости на $r = a$.

После учета в выражении (2) граничных условий на излучающей поверхности зависимости (1) и условия непрерывности звукового давления на поверхности $r = a$ ($|z| > H_1, \delta > |z|$) получим следующую систему парных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \gamma^2 A(t) H_1^{(1)}(\gamma a) J_1(\gamma a) \cos tz dt &= -f(z); \quad \delta < |z| \leq H_1, \\ \int_0^\infty A(t) \cos tz dt &= 0; \quad 0 < |z| \leq \delta; \quad H_1 < |z|. \end{aligned} \tag{3}$$

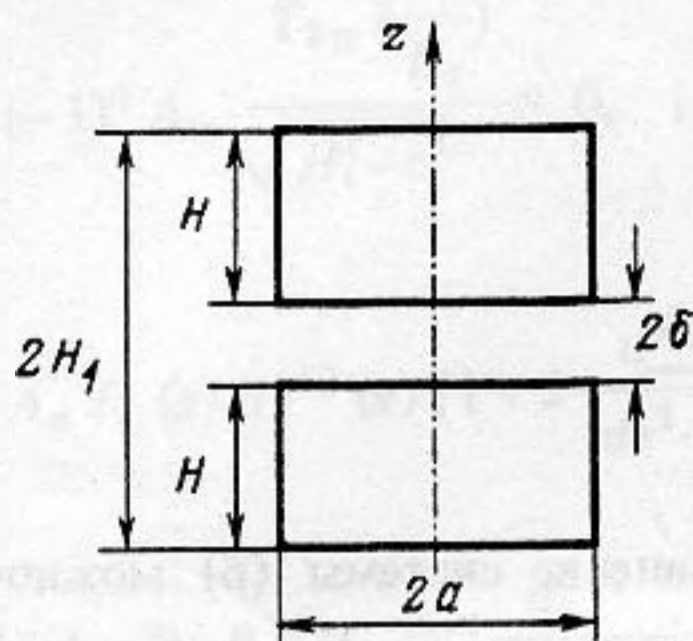


Рис. 1. Геометрия задачи

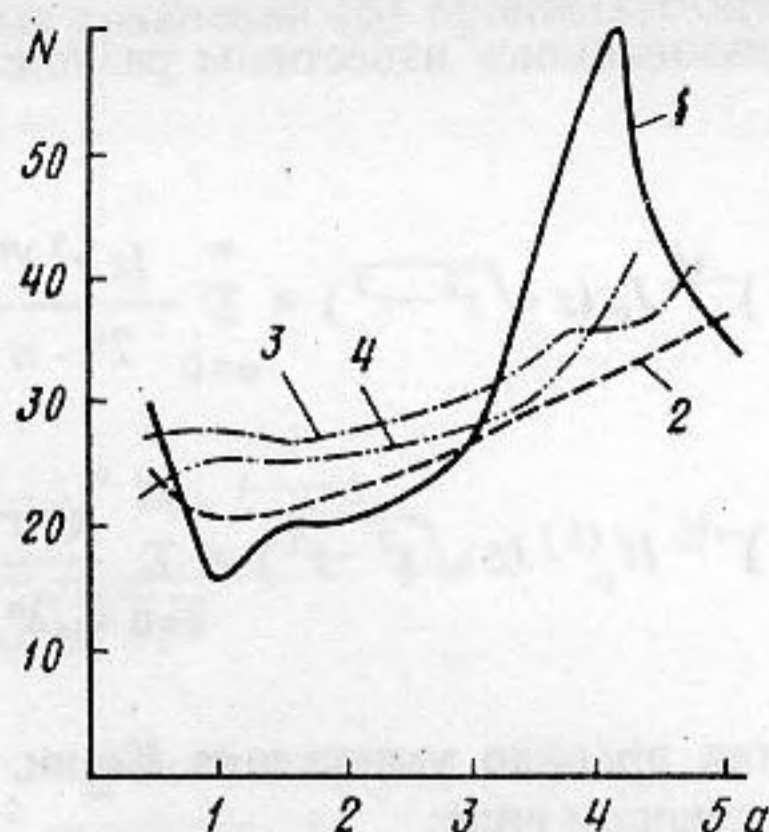


Рис. 2. Частотная зависимость числа членов ряда N : 1 - $\delta = 0$; 2 - $\delta = \infty$; 3 - $\delta = 0,5 H$; 4 - $\delta = H$

Воспользовавшись предложенной в работе [4] подстановкой, будем искать неизвестную функцию $A(t)$ в виде ряда Неймана [5]

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{2n}(tH_1). \quad (4)$$

После непосредственной подстановки выражения (4) в систему (3) с учетом того, что [6]

$$\int_0^{\infty} J_{2n}(ax) \cos xy dx = \begin{cases} (-1)^n (a^2 - y^2)^{-1/2} T_{2n}\left(\frac{y}{a}\right); & y < a \\ 0; & y > a, \end{cases} \quad (5)$$

где $T_n(x)$ - полином Чебышева, парные уравнения (3) принимают относительно неизвестных $\{A_n\}$ следующий вид:

$$\sum_n (-1)^n A_n \frac{T_{2n}\left(\frac{z}{H_1}\right)}{\sqrt{H_1^2 - z^2}} = 0, \quad |z| < \delta, \quad (6)$$

$$\sum_n A_n \int_0^{\infty} \gamma^2 J_{2n}(tH_1) H_1^{(1)}(\gamma a) J_1(\gamma a) \cos tz dt = -f(z), \quad \delta < |z| < H_1.$$

В работах [4, 7] близкие по структуре системы (в предельном случае $\delta = 0$) рассматривались как дифференциальные уравнения вынужденных колебаний, решение которых известно. Численное определение коэффициентов $\{A_n\}$ осуществлялось непосредственно методом граничной коллокации путем удовлетворения граничных условий в дискретном ряде точек, при этом вычисление сходящихся несобственных интегралов от осциллирующих функций, входящих в систему коэффициентами при неизвестных $\{A_n\}$, требовало значительных затрат машинного времени. Ниже предлагается подход, позволяющий избежать вычисления несобственных интегралов. Подход основан на разложении функций Бесселя и Ханкеля в ряд Неймана и свойствах косинус-преобразования Фурье.

Воспользовавшись известным разложением функций Бесселя и Ханкеля в ряд Неймана [5]

$$(s^2 - \tau^2)^{-1/2} J_\nu(z \sqrt{s^2 - \tau^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z \tau^2)^n J_{\nu+n}(zs)}{2^n \cdot n! s^{\nu+n}},$$

$$(s^2 - \tau^2)^{-1/2} H_\nu^{(1)}(z \sqrt{s^2 - \tau^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z \tau^2)^n H_{\nu+n}^{(1)}(zs)}{2^n \cdot n! s^{\nu+n}}$$

и применив правило умножения Коши, второе уравнение системы (6) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_1(a) H_1^{(1)}(a) \int_0^{\infty} (1-t^2)^2 J_{2n}(tH_1) \cos t z dt + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_0^{\infty} (1-t^2)^2 t^{2m} J_{2n}(tH_1) \cos t z dt = -f(z), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\delta < |z| < H_1,$$

где

$$B_m = (a)^m \sum_{l=0}^m (m! 2^m (m-l)! l!)^{-1} J_{1+l}(a) H_1^{(1)}(a). \quad (8)$$

С учетом косинус-преобразования Фурье функций Бесселя (5) и известного свойства косинус-преобразования Фурье [6]

$$\int_0^{\infty} t^{2n} f(t) \cos t z dt = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \int_0^{\infty} f(t) \cos t z dt$$

уравнение (7) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_1(a) H_1^{(1)}(a) \left[1 + 2 \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^4}{dz^4} \right] \frac{(-1)^n T_{2n}\left(\frac{z}{H_1}\right)}{\sqrt{H_1^2 - z^2}} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left[(-1)^n \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} - 2(-1)^{m+2} \frac{d^{2m+2}}{dz^{2m+2}} + (-1)^{m+2} \frac{d^{2m+4}}{dz^{2m+4}} \right] \times \\ & \times \frac{(-1)^m T_{2n}\left(\frac{z}{H_1}\right)}{\sqrt{H_1^2 - z^2}} = -f(z), \quad \delta < |z| < H_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, с учетом выражения (9) система уравнений (6) принимает окончательный вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \frac{T_{2n}\left(\frac{z}{H_1}\right)}{\sqrt{H_1^2 - z^2}} = 0, \quad |z| < \delta, \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n J_1(a) H_1^{(1)}(a) \left[1 + 2 \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^4}{dz^4} \right] \frac{(-1)^n T_{2n}\left(\frac{z}{H_1}\right)}{\sqrt{H_1^2 - z^2}} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left[(-1)^m \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} - 2(-1)^{m+2} \frac{d^{2m+2}}{dz^{2m+2}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{m+2} \frac{d^{2m+4}}{dz^{2m+4}} \right] \frac{(-1)^n T_{2n}\left(\frac{z}{H_1}\right)}{\sqrt{H_1^2 - z^2}} = -f(z), \quad \delta < |z| < H_1.$$

Воспользовавшись ортогональностью полиномов Чебышева на $[-1; 1]$, система уравнений (10) сводится к следующей:

$$(-1)^n J_1(a) H_1^{(1)}(a) h_n = - \int_{\delta}^{H_1} f(z) T_{2n}\left(\frac{z}{H_1}\right) dz -$$

$$- J_1(a) H_1^{(1)}(a) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \int_{\delta}^{H_1} T_{2k}\left(\frac{z}{H_1}\right) \left[\left(2 \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^4}{dz^4} \right) \frac{T_{2k}\left(\frac{z}{H_1}\right)}{\sqrt{H_1^2 - z^2}} \right] dz \right\} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} A_k (-1)^k \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_{\delta}^{H_1} T_{2k}\left(\frac{z}{H_1}\right) \left\{ \left[(-1)^m \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} + 2(-1)^{m+2} \frac{d^{2m+2}}{dz^{2m+2}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (-1)^{m+2} \frac{d^{2m+4}}{dz^{2m+4}} \right] \frac{T_{2k}\left(\frac{z}{H_1}\right)}{\sqrt{H_1^2 - z^2}} \right\} dz, \quad n = 0; 1; 2; \dots, \quad (11)$$

$$h_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2}; & n = 0 \\ \frac{\pi}{4}; & n \neq 0. \end{cases}$$

В соответствии с определением безразмерный импеданс исследуемой модели равен [1-4]

$$z_s = \frac{1}{\rho c S_{\text{изл}}} \int_{S_{\text{изл}}} [p_{r \geq a}(S) - p_{r \leq a}(S)] dS. \quad (12)$$

Подставив в выражение (12) формулу (2) с учетом разложения (4), проведя интегрирование с учетом выражения для вронскиана функций Бесселя и Ханкеля [5], а также

того, что [6]

$$\int_0^{\infty} x^{-1} J_{\nu}(ax) \sin xy dx = \begin{cases} \nu^{-1} \sin [\nu \arcsin (\frac{y}{a})], & 0 < y < a \\ a^{\nu} \sin [\frac{\nu\pi}{2}] \\ \nu [y + (y^2 - a^2)^{1/2}]^{\nu}, & a < y < \infty, \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} x^{-1} J_0(ax) \sin xy dx = \begin{cases} \arcsin \frac{y}{a}, & 0 < y < a \\ \frac{\pi}{2}, & a < y < \infty, \end{cases}$$

получим следующее выражение для импеданса излучения:

$$z_s = r_s - ix_s = \frac{2}{\pi a H} \left\{ A_0 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\delta}{H_1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \sin \left(2n \arcsin \frac{\delta}{H_1} \right) \right\} \quad (13)$$

При численных экспериментах система алгебраических уравнений (11) решалась методом редукции [8], при этом все бесконечные ряды, входящие в систему, достаточно быстро сходятся, несмотря на то, что многократное дифференцирование ухудшает их сходимость. Действительно, рассмотрим ряд

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m B_m \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} T_{2k}(z).$$

С учетом выражения для B_m (8) и того, что [5, 9]

$$\frac{dT_n(x)}{dx} \leq n^2, \quad \sum_m (-1)^m \frac{x^{2m}}{m!} = e^{-x^2}$$

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m B_m \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} T_{2k}(z) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2n)^m (2k)^{4m}}{m!} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^m e^{-(2k)^4 (2a)} < \infty.$$

При численной реализации предложенного решения производные от полиномов Чебышева находились при помощи известных рекуррентных соотношений [5, 9]

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = n(1-x^2)^{-1} [T_{n-1}(x) - xT_n(x)],$$

$$\frac{d}{dx^2} T_n(x) = (1-x)^{-1} [x \frac{d}{dx} T_n(x) - n^2 T_n(x)].$$

Скорость сходимости полученного решения иллюстрируется частотной зависимостью

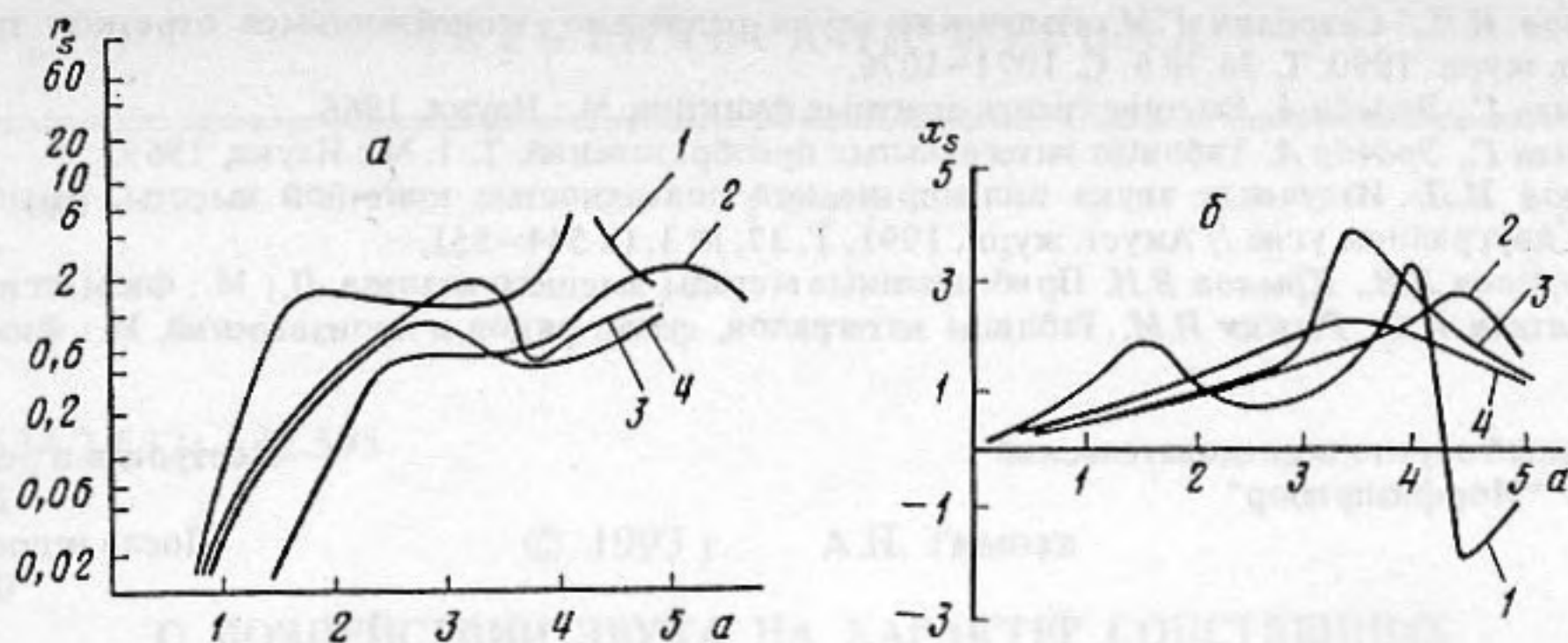


Рис. 3. Частотная зависимость составляющих импеданса излучения, a — активная составляющая, δ — реактивная; 1 — $\delta = 0$; 2 — $\delta = \infty$; 3 — $\delta = 0,5H$; 4 — $\delta = H$

числа членов ряда (13) N , необходимых для стабилизации третьей значащей цифры в значениях соответствующих составляющих импеданса излучения исследуемой модели для $H/a = 0,25$ и различной ширине щели δ (рис. 2). Сходимость результатов не хуже, чем в методе, предложенном в работе [4, 7], при этом в рассмотренном частотном диапазоне она мало зависит от ширины щели. Результаты расчетов частотной зависимости составляющих импеданса излучения исследуемой модели для $H/a = 0,25$ и различной ширине щели приведены на рис. 3. Там же для сравнения приведены частотные зависимости для одиночного отрезка трубы высоты $H/a = 0,25; 0,5$ (в предельных случаях $\delta = \infty, \delta = 0$), заимствованные из работы [4]. Частотная зависимость импеданса исследуемой модели, так же как и в случае отрезка равномерно пульсирующей трубы [1–4], характеризуется последовательной сменой резонансов — частот, соответствующих нулевому значению реактанса $x_s = 0$, и антирезонансов — частот изменения характера реактанса с инерционного — массового — на упругий, сопровождаемого разрывом активной составляющей импеданса r_s . Наличие кольцевой щели в области низких частот не приводит к изменению характера нагрузки, и начало координат — точка $a = 0$ — может рассматриваться как первый резонанс $x_s = 0$. По сравнению с частотной характеристикой сплошного отрезка трубы высоты $2H$ наличие кольцевой щели приводит к исчезновению в частотной характеристике исследуемой модели первого низкочастотного резонанса. При этом наличие щели приводит в области $a \leq 2,0$ к уменьшению активной составляющей импеданса излучения более чем в 2 раза.

Вследствие акустического взаимодействия между частями трубы, разделенными кольцевой щелью, найденный импеданс излучения отличается от импеданса одиночного отрезка трубы высоты H (предельный случай бесконечной щели). Так, в частности, активная составляющая импеданса исследуемой модели больше активной составляющей одиночного отрезка трубы при волновых размерах $a \leq 3,3$.

Отметим, что подобным способом может быть решена задача при наличии любого числа кольцевых щелей в отрезке трубы конечной высоты.

В заключение автор приносит глубокую благодарность сотрудницам ВЦ Латв. Гос. ун-та Б.Ю. Гехт и Т.П. Ресаре за проведение расчетов на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шендеров Е.Л. Излучение звука при осесимметричных колебаниях конечной открытой трубы // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 138–147.
2. Томилина Т.М. Импеданс излучения полого цилиндрического излучателя // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 122–125.
3. Басовский В.Г., Гомилко А.М., Мелешко В.В. Излучение звука жесткой цилиндрической оболочки конечной длины // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 6. С. 983–989.

4. Рубанов И.Л., Свердлин Г.М. Излучение звука радиально колеблющимся отрезком трубы // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 6. С. 1071–1076.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, Т. 1. М.: Наука, 1969.
7. Рубанов И.Л. Излучение звука цилиндрической поверхностью конечной высоты, расположенной в двугранном угле // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 3. С. 544–551.
8. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л.; М.: Физматгиз, 1962.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Центральный научно-исследовательский институт "Морфизприбор"

Поступила в редакцию
28.12.91
После исправления
09.04.92

I.L. Rubanov

SOUND RADIATION BY RADially OSCILLATING TUBE SECTION WITH A CIRCULAR SPLIT

A problem of sound radiation by a radially oscillating tube section with a circular split is solved. The investigations results on the dependence of radiation impedance components on the frequency, height and radius of the tube section are given.