

УДК 534.2:532; 532.595

© 1993 г. А.Н. Тимоха

О ВОЗДЕЙСТВИИ ЗВУКА НА ХАРАКТЕР СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЬ-ГАЗ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

Исследовано влияние акустического поля, создаваемого в газе, на частоты и формы колебания поверхности раздела жидкость-газ в условиях, близких к невесомости. Жидкость размещена в ограниченный цилиндрический сосуд, газ находится над свободной поверхностью жидкости. Задача изучается в нелинейной гидродинамической постановке. На примере проиллюстрированы качественные и количественные изменения указанного спектра частот и собственных мод колебания жидкости. Показано, что акустическое воздействие на свободную поверхность ограниченного объема жидкости со стороны газа может привести к выделенным изменениям спектральных параметров системы.

Система жидкость-газ, находящаяся в слабом гравитационном поле, благодаря подвижности поверхности раздела обладает бесконечным числом собственных частот колебания в низком диапазоне частот [1, 2]. Колебания свободной поверхности происходят относительно капиллярной формы равновесия по собственным формам и обусловлены наличием гравитационного поля и капиллярных сил. Нами исследуются малые колебания поверхности раздела жидкость-газ в ограниченном объеме в случае, когда в газе создается высокочастотное акустическое поле. Жидкость и газ находятся в прямом цилиндре в условиях, близких к невесомости (силовое поле направлено вдоль образующей цилиндра). Высокочастотное акустическое поле, создаваемое вибратором в газе, приводит к возникновению радиационных акустических сил, действующих на поверхности раздела и изменяющих геометрию и характер устойчивости последней [3]. Задача определения формы равновесия (средней во времени поверхности раздела) при наличии акустического поля в газе анализировалась при предположении об идеальности и потенциальности движения сред в полной нелинейной постановке с учетом капиллярных сил. Методом разложения в ряд по малому параметру ϵ , пропорциональному числу Маха акустического поля, создаваемого в газе, было выделено акустическое радиационное давление, действующее на поверхность раздела в случае, когда отношение плотности газа к плотности жидкости ($\rho_{01}/\rho_{02} \sim \epsilon \ll 1$) — малая величина. Это позволило исследовать свойства среднего во времени положения поверхности раздела $\Sigma_0(x = H_0(y, z))$ (капиллярно-звуковую равновесную форму). Нелинейная задача для определения Σ_0 выражает баланс трех сил (гравитационных, капиллярных, акустических радиационных) имеет вид [3]:

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla H_0}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2}} \right) + B_0 H_0 + \frac{1}{4\mu} (k^2 (\Phi_1)^2 - (\nabla \Phi_1)^2) = \text{const на } \Sigma_0, \tag{1}$$

$$\int H_0 dydz = 0; \quad - \frac{\partial H_0}{\partial \epsilon} = - \frac{H_{0y} W_y + H_{0z} W_z}{|\nabla W|} = \cos \alpha (1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2} \text{ на } \partial \Sigma,$$

$$\nabla \Phi_1 + k^2 \Phi_1 = 0 \text{ в } \langle Q_1 \rangle; \quad \partial \Phi_1 / \partial n = 0 \text{ на } S_1 \cup \Sigma_0, \tag{2}$$

$$\partial \Phi_1 / \partial n = \mu_0 V(y, z) / k; \quad V(y, z) = V_0(y, z) / \sup |V_0(y, z)| \text{ на } S_0.$$

Здесь неизвестная поверхность $\Sigma_0(x = H_0(y, z))$ – капиллярно-звуковая равновесная форма, l – характерный размер, ω – частота воздействия, $1/\omega$ – характерное время, $\langle Q_1 \rangle (W(y, z) < 0, H_0(y, z) < x < h_1)$ – средний во времени объем, занимаемый газом, $S_1 (W(y, z) = 0)$ – боковые стенки цилиндра, $S_0 (x = h_1)$ – плоская "крышка", на которой возбуждается акустическое поле (см. рис. 1), $\Phi_1(x, y, z)$ – волновая функция установившегося акустического поля в газе (первое приближение потенциала скоростей в газе в безразмерных переменных в исходной полной нелинейной задаче имеет вид $\varphi_1^{(1)} = \epsilon \sin(t) \Phi_1(x, y, z)$), $V_0(y, z) \sin(\omega t)$ – исходное распределение нормальных скоростей на S_0 , $Bo = gl^2 \rho_{02} / \sigma$ – число Бонда, α – угол смачивания, $k = \omega l / c$ – волновое

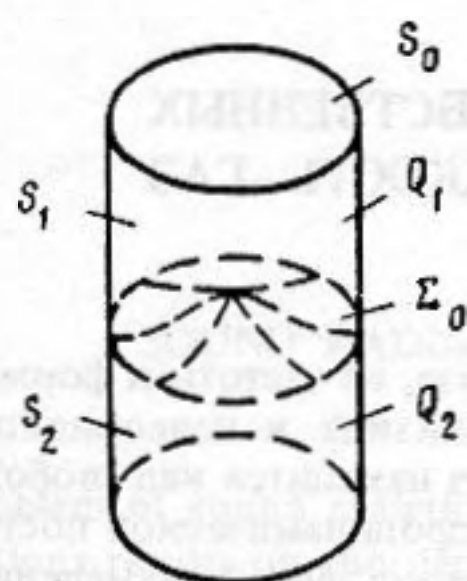


Рис. 1

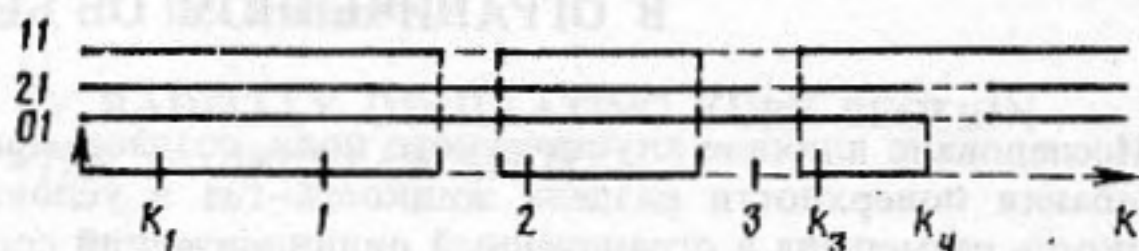


Рис. 2. Фазовая картина $(k, \|H_0\|)$; диапазоны устойчивости и неустойчивости капиллярно-звуковой равновесной формы

число акустического поля в газе, μ и μ_0 – безразмерные параметры, выражающие соответственно соотношение между поверхностными и массовыми силами и акустическими радиационными силами, а также соотношение между числом Маха нормальных скоростей на S_0 $M = \sup |V_0| / c$ и вводимым в задаче малым параметром ϵ :

$$\mu = \frac{\sigma / l^3}{\omega^2 \epsilon^2 \rho_{01}} = \frac{1}{\omega_*^2 \epsilon^2 (\rho_{01} / \rho_{02})}$$

$$\epsilon = \sup |V_0| / (c \mu_0) \ll 1; \mu_0 = \epsilon \left(\frac{c}{\sup |V_0|} \right).$$

В (1), (2) решение краевой задачи (2) определяет стоячую акустическую волну в газе, которая зависит от подлежащей определению поверхности Σ_0 через условие непротекания ($\partial \Phi_1 / \partial n = 0$ на Σ_0). В (1) второе и третье условие определяют сохранение объема жидкости и постоянство угла смачивания на контуре $\partial \Sigma_0$. Первое уравнение в (1) дает баланс распределенных по поверхности Σ_0 средних во времени давлений между жидкостью и газом, вызванных капиллярными, гравитационными силами и силами акустического радиационного давления. Поверхность Σ_0 в силу того, что отношение плотности газа к плотности жидкости – малая величина, является для акустического поля в первом в (смысле числа Маха) приближении поверхностью отражения. В случае отсутствия акустического поля или малости $1/\mu \ll 1$ задача (1), (2) превращается в задачу о капилляре.

На примерах в [3] было показано, что путем выбора параметров акустического поля можно добиться изменения геометрии поверхности раздела жидкость–газ, стабилизировать поверхность раздела (капиллярно-звуковую равновесную форму) в том случае, когда числа Бонда $Bo < 0$ и капиллярная форма при (отсутствии акустического поля) неустойчива – эффект акустической стабилизации поверхности раздела. Для анализа устойчивости капиллярно-звуковой равновесной формы применялся статический, так называемый спектральный признак устойчивости, сводящий исследование задачи устойчивости к отысканию собственных значений из задачи $\mu \mu_1 A h = \lambda h$ ($\lambda > 0$ – устойчивость). Указанный спектральный признак устойчивости капиллярно-звуковой равновесной формы является обобщением известного спектрального признака устой-

чивости капиллярной формы равновесия. Он характеризует тенденцию возврата возмущенной поверхности в свое исходное состояние и основан на анализе возмущения баланса средних давлений на Σ_0 при малых возмущениях поверхности раздела.

Цель настоящей работы есть анализ качественного и количественного изменения этого спектра малых (собственных) колебаний поверхности раздела жидкости и газа в том случае, когда в газе возбуждается высокочастотное акустическое поле. Для этого, используя известный закон изменения баланса давления на свободной поверхности относительно капиллярно-звуковой равновесной формы [3], сформулируем задачу о собственных колебаниях поверхности раздела при наличии акустического поля относительно Σ_0 .

Пусть $\tau = \epsilon^{3/2}t$ — "медленное" время (по отношению к характерному времени $t_* = 1/\omega$), а $\varphi(\tau, x, y, z)$ потенциал скоростей относительных медленных движений жидкости, связанных с подвижностью свободной поверхности. Тогда уравнениями малых относительных движений жидкости являются уравнение неразрывности в $\langle Q_2 \rangle$ (которое с учетом усреднения по быстрым движениям превращается в уравнение Лапласа), условие неперетекания на S_2 линеаризованное кинематическое условие на Σ_0 и линеаризованное динамическое условие на Σ_0 , дающее баланс давлений малых медленных относительных движений жидкости [1, 2]. В [4] было показано, что указанная задача может быть получена путем усреднения уравнений в вариациях движения системы относительно динамического режима, определяемого капиллярно-звуковой равновесной формой [1, 2, 5]:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = 0 \text{ в } \langle Q_2 \rangle; \partial\varphi/\partial n = 0 \text{ на } S_2, \\ \partial\varphi/\partial n = h_\tau/\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}; \varphi_\tau + \mu_1\mu Ah = 0 \text{ на } \Sigma_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mu_1 = \rho_{01}/(\rho_{02}\epsilon) \sim 1$, t — быстрое безразмерное время, $\tau = \epsilon^{3/2}t$ — медленное время, $t_R = \omega^{-1}t = \epsilon^{-3/2}\omega^{-1}\tau$ — реальное время, $\mu\mu_1 Ah$ — оператор, задающий возмущенный баланс давлений при малых возмущениях $h(y, z)$ поверхности $\Sigma_0(x = H_0(y, z))$:

$$\begin{aligned} Ah = -\text{div}[\nabla h/(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2} - (\nabla h, \Delta H_0)\nabla H_0/(1 + (\nabla H_0)^2)^{3/2}] + \\ + (2\mu)^{-1} \{ k^2 \Phi_1 \Phi_{1x} h - (\nabla \Phi_1, \nabla \Phi_{1x}) h + k^2 \Phi_1 \Phi - (\nabla \Phi_1, \nabla \Phi) \} + \text{Bo}h, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\int h dy dz = 0; -\frac{\partial h}{\partial e} = \cos \alpha \frac{(\nabla h, \nabla H_0)}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2}} \text{ на } \partial\Sigma_0,$$

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \text{ в } \langle Q_1 \rangle; \partial\Phi/\partial n = 0 \text{ на } S_1 \cup S_0,$$

$$\partial\Phi/\partial n = -(\Phi_{1xx}h - \Phi_{1zz}h_z - \Phi_{1yy}h_y - [\Phi_{1xy}H_{0y} + \Phi_{1xz}H_{0z}]h)/(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2} \text{ на } \Sigma_0.$$

Заметим, что в рассматриваемых системах величина $\epsilon^{-3/2}\omega^{-1} \sim 1$ (с/рад), что говорит о близости времен реального и времени τ и указывает на то, что задача (3) описывает визуально наблюдаемые малые колебания на свободной поверхности жидкости в том случае, когда в газе создается акустическое поле.

Влияние акустического поля через акустическое радиационное давление в случае слабых гравитационных сил ($\text{Bo} \sim 1$) может изменить характер малых собственных колебаний жидкости со свободной поверхностью. Поскольку общая структура задачи (3) аналогична известным задачам о колебаниях жидкости в сосуде [1, 2] и отличается лишь наличием дополнительных членов в операторе A , то, следуя [2], перейдем от (3) к упомянутой выше задаче о нормальных (собственных) колебаниях жидкости относительно капиллярно-звуковой равновесной формы. Для этого положим $h(y, z, \tau) = \exp(i\lambda\tau)H(y, z)$, $\Phi(x, y, z, \tau) = i\lambda \exp(i\lambda\tau)\gamma(x, y, z)$ и подставим в (3):

$$\Delta\gamma = 0 \text{ в } \langle Q_2 \rangle; \partial\gamma/\partial n = 0 \text{ на } S_2,$$

$$\partial\gamma/\partial n = H/\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}; -\lambda^2\gamma + \mu_1\mu AH = 0 \text{ на } \Sigma_0.$$

В задаче (5) оператор A имеет вид (4), а подлежащие определению λ, H, γ являются соответственно собственными частотами и формами колебания свободной поверхности

Зависимость значений собственных частот колебания жидкости по формам H_{pq} от частоты акустического воздействия

Форма	0 Гц	800 Гц	1000 Гц	2000 Гц
H_{11}	0,4540	0,251	21,60	6,707
H_{21}	2,075	1,963	1,882	1,588
H_{01}	4,097	3,992	3,924	1,204
H_{12}	5,400	5,296	5,231	4,087
H_{31}	10,95	10,85	10,79	10,11

и жидкости [2] при наличии в газе высокочастотного акустического поля. (Случай $\lambda_{pq}^2 < 0$ соответствует неустойчивости капиллярно-звуковой формы при возмущениях по H_{pq} , а случай $\lambda_{pq}^2 = 0$ бифуркации и началу некоторого переходного процесса, который может быть исследован лишь в рамках нелинейной теории волн на поверхности ограниченного объема жидкости [6]). На примере выясним, как влияет акустическое поле на значения собственных частот колебания жидкости. Рассмотрим случай, когда сосуд — круговой цилиндр, угол смачивания $\alpha = \pi/2$, $V_0(y, z) = v_0 = \text{const}$

$$(V = 1, \epsilon = -v_0/(\mu_0 \sin(kh_1)), \mu_0 = -\sin(kh_1))$$

(в газе создается плоская акустическая волна). Тогда капиллярно-звуковая равновесная форма является плоской $H_0(y, z) = 0$ ($\Phi_1 = k^{-2} \cos(kx)$), как и соответствующая углу смачивания $\pi/2$ капиллярная форма равновесия. Исследование устойчивости такой капиллярно-звуковой равновесной формы при помощи спектрального признака было проведено в [3].

В указанном случае задача (5) решается методом разделения переменных, откуда находятся собственные формы колебания поверхности

$$H_{pq} = J_p(\kappa_{pq}r) \sin(\cos)(p\theta); J'_p(\kappa_{pq}) = 0; p = 0, 1, \dots; q = 1, 2, \dots$$

Им соответствуют собственные частоты

$$\lambda_{pq} = (\mu_1 \kappa_{pq} \text{th}(\kappa_{pq}h_2) [\mu(V_0 + \kappa_{pq}^2) - 0,5 \left\{ \begin{array}{l} \text{cth}(\xi h_1)/\xi, \quad k^2 < \kappa_{pq}^2 \\ -\text{ctg}(\xi h_1)/\xi, \quad k^2 > \kappa_{pq}^2 \end{array} \right\}])^{1/2}$$

$$\xi = |\kappa_{pq}^2 - k^2|^{1/2}$$

В случае отсутствия акустического поля моды колебания H_{pq} имеют тот же вид, значение же собственных частот ($\tilde{\lambda}_{pq}$) иное [2]:

$$\tilde{\lambda}_{pq} = (\mu_1 \kappa_{pq} \text{th}(\kappa_{pq}h_2) \mu(V_0 + \kappa_{pq}^2))^{1/2}$$

В таблице в реальном времени для случая $l = 0,1$ М, $V_0 = 0,0$, $\epsilon = 0,0025$, $h_1 = 1,25$ л, $h_2 = 2,0$ л показано, как, в зависимости от частоты воздействия в системе "вода-воздух" с $\alpha = \pi/2$ меняются значения первых собственных частот. Значения частот выбраны в диапазонах устойчивости капиллярно-звуковых равновесных форм, $\lambda_{pq}^2 > 0 \forall pq$, случай нулевой частоты воздействия соответствует капиллярной форме. Видно, что наибольшее влияние акустическое поле оказывает на первые моды колебания (в смысле возрастания чисел κ_{pq}) H_{11} , H_{21} , H_{01} и т.д., значительно меньше — на последующие моды.

В случае отсутствия акустического поля всегда выполнено условие $\lambda_{11}^2 < \lambda_{21}^2 \ll \lambda_{01}^2 < \dots$, т.е. наиболее опасными являются неосесимметричные возмущения по форме 11. На рис. 2 для устойчивой плоской капиллярно-звуковой равновесной формы указан диапазон волновых чисел ($V_0 = 0,0$; $h_1 = 1,25$; $\epsilon = 0,0025$) (k_1, k_2) , в котором $0 < \lambda_{11}^2 < \lambda_{21}^2 < \lambda_{01}^2 < \dots$, т.е. также наиболее опасными являются неосесимметричные

возбуждения, но $\lambda_{pq}^2 < \tilde{\lambda}_{pq}^2$. Таким образом, акустическое воздействие может привести к уменьшению собственных частот.

Из таблицы также видно, что иерархия частот, существовавшая для $\tilde{\lambda}_{pq}^2$ может нарушаться для λ_{pq}^2 . Так, на рис. 2 выделен диапазон (k_3, k_1) , в котором выполнено $0 < \lambda_{01}^2 < \lambda_{pq}^2, pq \neq 01$. Это обозначает, что наиболее опасными становятся осесимметричные возбуждения.

Штриховой линией на осях pq обозначены области $0 < \lambda_{pq}^2$, т.е. области неустойчивости капиллярно-звуковой равновесной формы по возмущениям h_{pq} . В то же время плоская капиллярная форма равновесия, совпадающая с капиллярно-звуковой, при данном значении Vo устойчива по всем возмущениям.

Таким образом, акустическое воздействие на свободную поверхность ограниченного объема жидкости со стороны дополняющего сосуд газа может выразиться в существенном изменении спектральных свойств системы. Это воздействие может привести как к уменьшению всех собственных частот, так и к увеличению собственных частот по отдельным взятым формам колебания, а также к потере устойчивости по отдельным формам колебания или к стабилизации положения равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
2. Гидромеханика невесомости / Под ред. Мышкиса А.Д. М.: Наука, 1978. 504 с.
3. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Об акустическом воздействии на свободную поверхность ограниченного объема жидкости // Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 1. С. 144–149.
4. Луковский И.А., Тимоха А.Н. Об одном классе краевых задач в теории поверхностных волн // Укр. математ. журн. 1991. Т. 43. № 3. С. 359–365.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Изд. 3-е. М.: Физматгиз, 1963. 325 с.
6. Лимарченко О.С. Применение прямых методов к исследованию прикладных нелинейных задач нелинейной динамики тел, частично заполненных жидкостью; Препринт № 8. Киев: Ин-т математики, 1987. 60 с.

Институт математики
Академии наук Украины

Поступила в редакцию
21.05.92

A.N. Timokha

ON SOUND EFFECT ON CHARACTER OF INHERENT OSCILLATIONS OF LIQUID – GAS INTERFACE SURFACE IN A LIMITED VOLUME

It is demonstrated that the acoustic effect on the free surface of a limited volume of a liquid from the gas supplementing the vessel can manifest itself as an essential change of the system spectral properties. This effect can lead both to the decrease of all inherent frequencies and to the decrease of inherent frequencies in single oscillation types as well as to the loss of stability with respect to single oscillation types or to the stabilization of equilibrium state.