АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 2

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.3

© 1993 г. М.В. Белубекян, В.В. Овсепян

ЗАДАЧА ТИПА ЛЯВА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Исследована задача для упругих волн типа Лява на поверхности цилиндрической полости с цилиндрическим слоем. Получено дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости поверхностной волны. При малой толщине слоя получено необходимое и достаточное условие для существования и единственности поверхностной волны, распространяющейся по образующей полости.

Исследованию волн типа Рэлея на цилиндрических поверхностях посвящены ряд работ [1–4, и др.]. В данной работе изучается задача для волн типа Лява на поверхности цилиндрической полости с цилиндрическим слоем, когда распространение волны направлено по образующей полости.

Пусть в цилиндрической системе координат ось z направлена по образующей, а $r = a$ и $r = b$ – соответственно внешний и внутренний радиусы слоя $(a > b)$.

В задаче $u_{ri} = 0$, $u_{zi} = 0$ и $u_{\theta i} = U_{\theta i}(r, z)\exp(i\omega t)$, $(i = 1, 2)$. Здесь и в дальнейшем $i = 1$ относится к слою, а $i = 2$ – к пространству.

Уравнения движения имеют вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U_{\theta i} = -\frac{\rho_i \omega^2}{\mu_i} U_{\theta i}. \tag{1}$$

Имеем следующие граничные условия:

$$\Sigma_{r\theta 1} = 0,\ r = b,$$
$$U_{\theta 1} = U_{\theta 2},\ \Sigma_{r\theta 1} = \Sigma_{r\theta 2},\ r = a. \tag{2}$$

Применяя интегральное преобразование Фурье по z к уравнениям (1) и граничным условиям (2), получим

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} + \alpha^2(\eta_1 - 1)\right]\overline{U}_{\theta 1} = 0,\ b < r < a, \tag{3}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \alpha^2(1 - \eta_2)\right]\overline{U}_{\theta 2} = 0,\ r > a, \tag{4}$$

$$\mu_1\left(\frac{d\overline{U}_{\theta 1}}{dr} - \frac{\overline{U}_{\theta 1}}{r}\right) = 0,\ r = b, \tag{5}$$

$$\overline{U}_{\theta 1} = \overline{U}_{\theta 2},$$
$$\mu_1\left(\frac{d\overline{U}_{\theta 1}}{dr} - \frac{\overline{U}_{\theta 1}}{r}\right) = \mu_2\left(\frac{d\overline{U}_{\theta 2}}{dr} - \frac{\overline{U}_{\theta 2}}{r}\right),\ r = a, \tag{6}$$

где $\eta_i = \omega^2/\alpha^2 C_{ti}^2 = C^2/C_{ti}^2$, $C_{ti} = (\mu_i/\rho_i)^{1/2}$, α – параметр интегрирования, C – скорость поверхностной волны, C_{ti} – скорость поперечной волны, $C_{t1} < C$, $C_{t2} > C$, $C_{t2} > C_{t1}$.

Решение в областях $b < r < a$ и $r > a$ представляется соответственно в виде

$$\overline{U}_{\theta 1} = BJ_1(\sigma_1 r) + DY_1(\sigma_1 r), \tag{7}$$

$$\overline{U}_{\theta 2} = AK_1(\sigma_2 r). \tag{8}$$

Здесь $\sigma_1 = \alpha\sqrt{\eta_1 - 1}$, $\sigma_2 = \alpha\sqrt{1-\eta_2}$, $J_1(z)$, $Y_1(z)$ – бесселевые функции первого и второго рода соответственно, $K_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя.

Выбор бесселевых функций в решениях (7) и (8) обоснован тем, что решение (8) должно удовлетворять условиям Зоммерфельда; если же вместо (7) взять функцию

$$\overline{U}_{\theta 1} = BI_1(\sigma_1 r) + DK_1(\sigma_1 r),\ \sigma_1 = \alpha\sqrt{1-\eta_1}\ (C_{t1} > C),$$

то при предельном переходе $\alpha a \to \infty$ полученное волновое уравнение не имело бы затухающего решения.

Подставляя (7) и (8) в граничные условия (5) и (6), получим следующее дисперсионное уравнение:

$$L(\eta_2) \equiv [\sigma_1 J_0(\sigma_1 b) - 2b^{-1} J_1(\sigma_1 b)]\ \{\mu_2 Y_1(\sigma_1 a)[\sigma_2 K_0(\sigma_2 a) + 2a^{-1}K_1(\sigma_2 a)] + \mu_1 K_1(\sigma_2 a)[\sigma_1 Y_0(\sigma_1 a) - 2a^{-1}Y_1(\sigma_1 a)]\} - [\sigma_1 Y_0(\sigma_1 b) - 2b^{-1} Y_1(\sigma_1 b)]\ \{\mu_1 K_1(\sigma_2 a)[\sigma_1 J_0(\sigma_1 a) - 2a^{-1} J_1(\sigma_1 a)] + \mu_2 J_1(\sigma_1 a)[\sigma_2 K_0(\sigma_2 a) + 2a^{-1} K_1(\sigma_2 a)]\} = 0. \qquad (9)$$

В случае $\alpha a \to \infty$ уравнение (9) переходит в уравнение Лява для полупространства [5]:

$$\mu_1 \sigma_1 \operatorname{tg}\sigma_1 h = \mu_2 \sigma_2,\ h = a - b. \qquad (10)$$

Рассмотрим случай $\alpha h < 1\ (\alpha^2 h^2 \ll 1)$. Из уравнения (9) получим:

$$L(\eta_2) \equiv -\frac{\mu_2}{\mu_1}\left(1 + \frac{2h}{b}\right)\left[\sigma_2 \frac{K_0(\sigma_2 a)}{K_1(\sigma_2 a)} + \frac{2}{a}\right] + \sigma_1^2 h = 0. \qquad (11)$$

При $\alpha a \to \infty$ и $\alpha h < 1\ (\alpha^2 h^2 \ll 1)$ уравнение (10) дает то же самое уравнение, что и (11).

Для получения уравнения Лява в случае тонкого цилиндрического слоя используем другой подход [6].

Уравнение (3) интегрируется в пределах от b до a в предположении, что функция $\overline{U}_{\theta 1}$ вследствие малости толщины слоя, не изменяется по координате r. Тогда, имея решение (8), с учетом (5) и (6), получим следующее уравнение:

$$-\frac{\mu_2}{\mu_1}\left[\sigma_2 \frac{K_0(\sigma_2 a)}{K_1(\sigma_1 a)} + \frac{2}{a}\right] - \frac{2h}{ab} + \sigma_1^2 h = 0. \qquad (12)$$

Видно, что уравнение (12) не совпадает с уравнением (11). Дело в том, что используя данный подход для цилиндрических областей, из-за наличия кривизны нельзя предполагать, что $\overline{U}_{\theta 1}$ не меняет свое значение в слое по координате r. Эту несогласованность можно устранить, если разложить функцию $\overline{U}_{\theta 1}$ в интервале $0 < \eta_2 < 1$ в ряд Тейлора, сохранив при этом только два члена ряда.

Исследуем вопрос существования и единственности волны типа Лява в интервале $0 < \eta_2 < 1$ для уравнения (11). Для этого воспользуемся подходом, примененным в работе [7].

Вычисляя $L(0)$, получим

$$L(0) = -\frac{\mu_2}{\mu_1}\left(1 + \frac{2h}{b}\right)\left[\alpha \frac{K_0(\alpha a)}{K_1(\alpha a)} + \frac{2}{a}\right] - \alpha^2 h < 0. \qquad (13)$$

Для существования хотя бы одного решения уравнения (11) в интервале $0 < \eta_2 < 1$, достаточно потребовать $L(1) > 0$, т.е.

$$L(1) = -\frac{\mu_2}{\mu_1}\left(1 + \frac{2h}{b}\right)\frac{2}{a} + \alpha^2 h\left(\frac{C_{t2}^2}{C_{t1}^2} - 1\right) > 0. \qquad (14)$$

Имея в виду, что производная функции

$$\varphi(\eta_2) = K_0(\alpha a\sqrt{1-\eta_2}) / K_1(\alpha a\sqrt{1-\eta_2})$$

по η_2 отрицательна [1], получим

$$L'(\eta_2) = \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(1 + \frac{2h}{b}\right)\frac{\alpha}{\sqrt{1-\eta_2}}\,\varphi(\eta_2) - \alpha\sqrt{1-\eta_2}\,\frac{\mu_2}{\mu_1}\left(1 + \frac{2h}{b}\right)\varphi'(\eta_2) + \frac{C_{t2}^2}{C_{t1}^2}\alpha^2 h > 0. \qquad (15)$$

Из (13) и (15) следует, что условие $L(1) > 0$ является необходимым и достаточным условием для существования и единственности решения уравнения (11) в интервале $0 < \eta_2 < 1$.

Таблица 1

Определение значения безразмерной величины длины волны $\lambda/2a$ для существования поверхностной волны при $\theta = 1,2$

β	κ			
	0,9	1,2	1,5	1,8
0,001	0,0331	0,0286	0,0256	0,0234
0,01	0,1037	0,0898	0,0803	0,0733
0,1	0,2997	0,2594	0,2320	0,2118
0,3	0,4209	0,3645	0,3260	0,2976
$-1+\sqrt{2}$	0,4338	0,3756	0,3360	0,3076
0,6	0,4056	0,3512	0,3142	0,2868
0,9	0,2279	0,1974	0,1765	0,1612

Таблица 2

Определение значения безразмерной величины длины волны $\lambda/2a$ для существования поверхностной волны при отношении модулей сдвига $\kappa = 1,2$

β	θ			
	1,001	1,01	1,4	1,8
0,001	0,0020	0,0064	0,0405	0,0573
0,01	0,0063	0,0200	0,1270	0,1796
0,1	0,0183	0,0580	0,3669	0,3290
0,3	0,0258	0,0815	0,5155	0,7291
$-1+\sqrt{2}$	0,0266	0,0840	0,5312	0,7513
0,6	0,0248	0,0785	0,4967	0,7025
0,9	0,0139	0,0441	0,2791	0,3948

Условие (14) запишем в виде

$$\alpha a > \sqrt{\frac{2\kappa}{\theta - 1}}\ \sqrt{\frac{1+\beta}{\beta(1-\beta)}}, \tag{16}$$

где $\kappa = \mu_2/\mu_1$, $\theta = C_{t2}^2/C_{t1}^2$, $\beta = h/a$.

В таблицах 1 и 2 приведены результаты численного расчета значения отношения $\lambda/2a$ формулы (16) при различных значениях параметров κ, β и θ (λ – длина волны, $\lambda/2a = \pi/\alpha a$).

Аналитическое исследование условия (16) показывает, что максимальное значение $\lambda/2a$ получается при $\beta = -1 + \sqrt{2}$, что наглядно видно из табл. 1, 2. Из табл. 1 также видно, что при фиксированном значении β по мере увеличения κ значения $\lambda/2a$ уменьшаются, в то время как в табл. 2 по мере увеличения θ значения $\lambda/2a$ увеличиваются.

Отметим, что для фиксированных значений κ, θ и β при выполнении условия $\alpha a > 2\pi a/\lambda$ существует единственная поверхностная волна, распространяющаяся по образующей полости.

Из (16) можно получить условие существования волн в виде

$$C_{t2} > C_{t1}\sqrt{1 + A_1}, \tag{17}$$

где $A_1 = 2\kappa(1+\beta)(\alpha a)^{-2}\beta^{-1}(1-\beta)^{-1}$.

Условие (17), учитывающее кривизну цилиндрической поверхности, отличается от известного условия $C_{t2} > C_{t1}$ для полупространства [5], получаемого из (17) предельным переходом $\alpha a \to \infty$.

Заметим, что при $\beta \to 0$ и $\beta \to 1$ условию (17) практически невозможно удовлетворить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миндлин Я.А.* Распространение волн по поверхности бесконечно длинного круглого цилиндра, представляющего собой вырез в бесконечно упругом пространстве // Докл. АН СССР. 1944. Т. XIII. № 4. С. 155–159.
2. *Biot M.A.* Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bare Containing a Fluid // J. App. ph. 1952. V. 23. № 9. P. 997–1005.
3. *Викторов И.А.* Волны типа рэлеевских на цилиндрических поверхностях // Акуст. журн. 1958. Т. 4. Вып. 2. С. 131–136.
4. *Белубекян М.В., Овсепян В.В.* Об условии существования поверхностной волны для упругого пространства с цилиндрической полостью // Докл. АН Армении. 1990. Т. 91. № 4. С. 169–172.
5. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. С. 416.
6. *Белубекян М.В., Геворкян А.В.* О магнитоупругих волнах Лява // Матем. методы и физ.-мех. поля. 1983. № 18. С. 55–57.
7. *Белубекян М.В.* Об условии существования волны Стоунли при скользящем контакте // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990. Т. 43. № 1. С. 52–56.

Институт механики
Академии наук Армении

Поступило в редакцию
18.11.91

После исправления
18.05.92

УДК 534.222.2

 А.А. Карабутов, М.П. Матросов, Н.Б. Подымова

ТЕРМООПТИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР ШИРОКОПОЛОСНЫХ ИМПУЛЬСОВ СДВИГОВЫХ ВОЛН

Термооптические источники звука неоднократно предлагались в качестве генератора "стандартных" акустических импульсов [1–3], которые могут использоваться для калибровки широкополосных акустических приемников и гидрофонов [4, 5], настройки систем неразрушающего контроля и акустической эмиссии [6], в широкополосной акустической спектроскопии [7, 8]. Однако эти работы в основном касались лишь возбуждения продольных волн. В то же время поперечные акустические волны более чувствительны к изменению структуры среды, нежели продольные [9]. Поэтому задача создания "стандартного" генератора импульсов сдвиговых акустических волн представляется актуальной.

При термооптическом возбуждении звука тепловые источники непосредственно вызывают только продольную акустическую волну [10]. Поперечная акустическая волна появляется лишь при отражении продольной волны от нагреваемой границы. Поэтому если диаметр светового пятна велик по сравнению с длиной акустической волны, то эффективность возбуждения сдвиговой волны низка. Соответственно эффективное возбуждение квазиплоской сдвиговой волны непосредственно термооптическими источниками невозможно.

Эффективное возбуждение сдвиговой волны возможно при "точечном" тепловыделении [11]. Однако в этом случае ее направленность низка и амплитуда "предвестника" продольной волны сравнима с амплитудой сдвиговой волны. Использовать такие источники для диагностических и спектроскопических задач неудобно.

Для получения широкополосных импульсов сдвиговых акустических волн в настоящей работе предлагается использовать преобразование продольной акустической волны в сдвиговую при ее наклонном падении на границу твердого тела. Широкополосный импульс продольной волны легко получить при термооптическом возбуждении звука. Если угол падения превышает критический для преломления продольной волны, то в прошедшем акустическом поле будет преобладать сдвиговая компонента.

В нашей работе была реализована следующая схема генератора сдвиговых акустических сигналов (см. рис. 1). Импульс Nd: YAG-лазера с модуляцией добротности (длительность импульса – 12–15 нс, энергия – около 50 мДж) направлялся на оптико-акустический преобразователь (*1*), изготовленный из стекла СЭС-22 [7, 8]. Поскольку поверхность преобразователя была свободной, то возбуждался биполярный акустический импульс, охватывавший полосу частот 1–40 МГц. Этот сигнал через слой дистиллированной воды (*2*) направлялся под углом 18° на поверхность призмы (*3*) из дюралюминия. Критический угол полного внутреннего отражения продольной волны составлял примерно 14°, поперечной – 29°. Призма вырезалась таким образом, чтобы после преломления поперечная акустическая волна падала на выходную поверхность нормально.