Несмотря на относительно большой разброс измеряемых значений скорости ультразвука c_i, возможна реализация обратной задачи – определение плотности пенополиуретана данной марки по результатам измерения скорости ультразвука. В этом случае с помощью механизированной у.з. установки с катящимися преобразователями [7] средняя плотность пеноблока или его отдельной части определяется следующим образом. Путем измерений значений скорости ультразвука c_i в N отдельных точках ППУ вычисляется среднее значение скорости для ППУ:

$$c_{\text{ср.}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} c_i. \tag{3}$$

И затем по вычисленному значению $c_{\text{ср.}}$ определяется значение плотности ППУ в соответствии с зависимостью $\rho = f(c_{\text{ср.}})$ (рис. 1). Число измеряемых точек N выбирается большим (50–100), чтобы исключить влияние разброса измеряемых значений скорости на отдельных участках ППУ-блока. По измерению c_i в отдельной i-й точке из-за большого разброса можно получить ошибочное значение плотности, не соответствующее действительному.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оренбах З.М., Шушков Г.А.* Экспериментальное определение скорости и коэффициента затухания акустического возмущения в газожидкостной пене // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 2. С. 403–405.
2. *Вафина Ф.И., Гольдфарб И.И., Шрейбер И.Р.* Модель распространения нелинейного звука в пене // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 2. С. 251–258.
3. *Замащиков В.В., Какуткина Н.А.* Экспериментальные исследования акустических свойств пены // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 3. С. 484–489.
4. *Тихомиров В.К.* Пены. Теория и практика их получения и разрушения. М.: Химия, 1983. 264 с.
5. *Горлов Ю.П.* Технология теплоизоляционных и акустических материалов и изделий. М.: Высшая школа, 1989. 384 с.
6. *Карапетян О.О., Гнюбкин В.П., Дронов Ю.В.* Контроль качества конструкций с заполнителем из пенопласта. Л.: Стройиздат, 1986. 199 с.
7. *Крюков И.И., Агузумцян В.Г., Дронов Ю.В., Карапетян О.О.* Ультразвуковая дефектоскопия пенопластов // Дефектоскопия. 1989. № 6. С. 79–83.
8. Ультразвук. Маленькая энциклопедия // Под ред. Голяминой И.П. М.: Советская энциклопедия, 1979. 400 с.

Санкт-Петербургский технологический институт им. Ленсовета

Поступило в реакцию 07.05.92

УДК 534.642:536.641

В.М. Крячко, Н.П. Тихомиров

ИЗМЕРЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ИМПЕДАНСОВ НАГРУЗКИ СТЕРЖНЕВОГО ПЬЕЗОРЕЗОНАТОРА

Высокодобротные пьезорезонаторы с успехом применяются в измерительной технике, в том числе при точных измерениях [1], для определения величины механических параметров среды или для контроля ее состояния. В основу измерения закладывается обычно связь между электропроводностью резонатора и действующими на него механическими нагрузками. Имеющиеся многочисленные работы по пьезоэлектрикам [2, 3], как правило, нельзя использовать для решения обратной задачи: нахождения компонент механических импедансов нагрузок по измеренной комплексной электропроводности резонатора. В них анализ ведется либо на основе эквивалентных схем, либо решаются уравнения колебаний резонатора, не учитывающие такую важную характеристику как собственные потери. Как показывает практика, учет собственных потерь в большинстве случаев необходим.

Поскольку в каждом конкретном случае связь между электропроводностью и механическими импедансами нагрузок зависит от таких факторов как форма резонатора, способ крепления его в конструкции, тип колебаний, место и способ приложения нагрузки, то представляется целесообразным получить точное решение для ряда типовых задач при условиях, легко реализуемых на практике.

В данной работе рассматривается задача о колебаниях пьезоэлектрического стержня с нагрузкой, приложенной к его торцу, либо распределенной вдоль какой-либо грани. Рассматриваются продольные колебания стержня.

Если априори известно, что механическая нагрузка прикладывается к обоим торцам симметрично, то резонатор в конструкции естественно крепить по центральному сечению, т.е. по узловой плоскости. В этом случае импеданс крепления не влияет на колебания резонатора, и задача существенно упрощается. Однако на практике такие случаи встречаются редко. Чаще исследуемая нагрузка прикладывается только к одному торцу. Тогда местоположение узловой плоскости неизвестно, т.к. оно зависит от приложенной нагрузки. Крепление целесообразно осуществлять на противоположном конце стержня, а импеданс крепления приходится учитывать в расчетах.

Математически задача сводится к решению дифференциального уравнения для продольных колебаний тонкого стержня [4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\tilde{c}_0^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - r\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

совместно с системой граничных условий, вытекающих из уравнений пьезоэффекта

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i\omega}{ES}\, Z_1 u + d_{31}E_3 \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{i\omega}{ES}\, Z_2 u + d_{31}E_3 \quad \text{при } x = 2l\,. \tag{3}$$

Здесь использованы следующие обозначения: u – смещение, c_0 и E – скорость звука и модуль Юнга материала стержня, Z_1 и Z_2 – импедансы нагрузок на концах, d_{31} – пьезомодуль, E_3 – напряженность возбуждающего электрического поля круговой частоты ω, r – параметр потерь в материале стержня, $2l$ – длина, $S = b \cdot h$ – площадь поперечного сечения стержня, h – размер в направлении поля E_3, D_3 – электрическая индукция.

Для нахождения проводимости стержня Y в направлении возбуждающего поля E_3 применяется формула [2]

$$Y = \frac{i\omega b}{h \cdot E_3} \int\limits_0^{2l} D_3(x)\,dx \tag{4}$$

и уравнение пьезоэффекта в виде

$$D_3(x) = Ed_{31}\,\frac{\partial u}{\partial x} + (\epsilon_{33}^{\mathrm{T}} - Ed_{31}^2)\,E_3\,. \tag{5}$$

Подстановка решения краевой задачи (1) – (3) в (5), (4) и несложные математические преобразования приводят к явному виду зависимости электропроводности от частоты и параметров образца:

$$Y = \frac{i\omega b}{h}\, Ed_{31}^2 \,\{ (e^{2\Gamma l} - 1)(2\Gamma + \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2) + (e^{-2\Gamma l} - 1)(2\Gamma - \tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2)\}\, \{(\Gamma + \tilde{Z}_1)(\Gamma + \tilde{Z}_2)\, e^{2\Gamma l} - (\Gamma - \tilde{Z}_1)(\Gamma - \tilde{Z}_2)\, e^{-2\Gamma l}\}^{-1} + \frac{2i\omega bl}{h}\,(\epsilon_{33}^{\mathrm{T}} - Ed_{31}^2)\,. \tag{6}$$

В формуле (6) введены обозначения: $\Gamma = ik + \delta$ – постоянная распространения, $\tilde{Z}_1 = \dfrac{i\omega}{ES}\, Z_1$; $\tilde{Z}_2 = \dfrac{i\omega}{ES}\, Z_2$.

К сожалению, формула (6) не годится для однозначного решения обратной задачи: нахождения импеданса нагрузки и других параметров по экспериментальной зависимости $Y_э(\omega)$ – проводимости образца от частоты – поскольку она, в частности, не меняется при перестановке $Z_1 \longleftrightarrow Z_2$. Имея в виду разную степень влияния разных параметров задачи на невязку $|\,Y(\omega) - Y_э(\omega)\,|$ и исходя из стремления достичь максимальной точности в определении неизвестных параметров, можно предложить схему их поэтапного нахождения.

1. Измеряется зависимость модуля и аргумента комплексной электропроводности $Y_э(\omega)$ в условиях, когда концы резонатора свободны $(Z_1 = Z_2 = 0)$, а резонатор закреплен по центральной узловой плоскости. Подставляя $Y_э(\omega)$ в формулу (6), получим два уравнения для отыскания двух неизвестных компонент k и δ параметра Γ в исследуемом диапазоне.

2. Стержень закрепляется в конструкции одним концом, другой конец и середина свободны. Поэтому $Z_1 \neq 0$, $Z_2 = 0$. Измеряется зависимость $Y_э(\omega)$. Поскольку величины k и δ уже известны, то по $Y_э(\omega)$ из формулы (6) однозначно определяются компоненты импеданса Z_1 и их зависимость от частоты.

3. Резонатор нагружается на измеряемую нагрузку одним концом, другой остается зажатым в конструкции, т.е. $Z_1 \neq 0$, $Z_2 \neq 0$. По измеренной вновь зависимости $Y_э(\omega)$ и формуле (6) однозначно определяются компоненты импеданса Z_2, поскольку параметры Γ и Z_1 уже известны.

Во многих практических случаях мнимые компоненты параметров Γ, Z_1, Z_2 простым образом зависят от частоты по закону прямой или обратной пропорциональности. Например, при отсутствии частотной дисперсии волновое число $k = \omega/c_0$. В таких случаях отыскание k, $B_1 = \mathrm{Im} Z_1$ и $B_2 = \mathrm{Im} Z_2$ может быть существенно упрощено, так как эти параметры входят в уравнения для частот резонанса ω_p и антирезонанса ω_a:

$$[G_1(\omega_p) G_2(\omega_p) - k^2(\omega_p)] \sin\beta(\omega_p) - k(\omega_p) [G_1(\omega_p) + G_2(\omega_p)] \cos\beta(\omega_p) = 0, \quad (7)$$

$$\{G_1(\omega_a) + G_2(\omega_a) + a_1 [k^2(\omega_a) - G_1(\omega_a) G_2(\omega_a)]\} \sin\beta(\omega_a) - k(\omega_a) \{2 - a_1 [G_1(\omega_a) + G_2(\omega_a)]\} \cos\beta(\omega_a) + 2k(\omega_a) = 0, \quad (8)$$

где $a_1 \equiv \dfrac{2l}{Ed_{31}^2} (\epsilon_{33}^{\mathrm{T}} - Ed_{31}^2)$, $\beta \equiv 2kl$, $G_i \equiv \dfrac{\omega}{ES} B_i$, $i = 1, 2$.

Следует подчеркнуть, что k, B_1 и B_2 находятся из формул (7), (8) по измеренным ω_p и ω_a в каждом из указанных выше опытов. Вещественные компоненты Г, Z_1 и Z_2 вычисляются по общей схеме.

Полученные формулы для смещения и электропроводности стержневого пьезорезонатора с небольшими дополнениями могут быть использованы и в другой имеющей практическое значение задаче. Пусть одна из боковых граней стержня по всей длине соприкасается с вязкой жидкостью. При продольных колебаниях стержня в жидкости будут возбуждаться вязкие волны, а со стороны жидкости на него будет действовать тормозящая сила вязкого трения. Она может быть учтена введением в уравнение движения (1) еще одного члена.

Пусть ось y направлена перпендикулярно данной грани. В общем случае считаем, что вязкость η является функцией координаты y.

Частицы жидкости, как и частицы стержня, колеблются вдоль оси x со скоростью $v_x(y)$.

Обозначим через Z_0 удельный импеданс, определенный как отношение вязкого тангенциального напряжения, действующего на слой жидкости, к скорости жидкости. Тангенциальное напряжение известным образом связано с вязкостью η и градиентом скорости v_x [5]. В результате для Z_0 можно написать выражение

$$Z_0(y) = \eta(y) \frac{1}{v_x(y)} \frac{\partial v_x(y)}{\partial y}. \quad (9)$$

Легко показать, что с учетом новой силы уравнение движения (1) примет такой вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[r + \frac{Z_0(0)\, b_1}{ES}\right] \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

где $Z_0(0)$ – значение импеданса Z_0 на поверхности стержня при $y = 0$, а b_1 – ширина соответствующей грани ($b_1 = b$ или h).

По внешнему виду уравнения (1) и (10) одинаковы, только теперь постоянная распространения будет несколько отличаться от ранее найденной:

$$\Gamma = ik_1 + \delta_1;$$

здесь

$$k_1 = \left(k^2 + \frac{\omega}{ES} y_0 b_1\right)^{1/2}, \quad (11)$$

$$\delta_1 = \delta + \frac{1}{2} \frac{\omega}{ES} \frac{1}{k_1} x_0 b_1. \quad (12)$$

В (11), (12) введены компоненты $Z_0(0) \equiv x_0 + iy_0$; k и δ – прежние значения компонент параметра Г.

Таким образом, учет вязкого трения на боковой поверхности стержневого пьезорезонатора выявляет дисперсию в скорости распространения и дополнительное поглощение в стержне.

Компоненты импеданса $Z_0(0)$ могут быть найдены по методике, изложенной выше, если k и δ предварительно определены.

Проблема состоит в установлении связи импеданса $Z_0(0)$ с вязкостью $\eta(y)$ и другими параметрами задачи. При известной зависимости $v_x(y)$ эта связь дается соотношением (9). По аналогии с задачей о колебаниях плоскости $y = 0$, граничащей с вязким полупространством [5], для v_x можно получить уравнение

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\eta(y)} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{i\omega\rho_ж}{\eta(y)} v_x = 0, \quad (13)$$

где $\rho_ж$ – плотность жидкости.

При выводе уравнения (13) опущены нелинейный член и отброшено слагаемое с производной по координате x.

Сложность решения уравнения (13) определяется конкретным видом функции вязкости $\eta(y)$. Однако, поскольку в итоговых формулах (11), (12) содержатся компоненты импеданса Z_0, а не v_x, то целесообразно свести соотношения (9), (13) к одному уравнению для Z_0. Для него получается уравнение

$$\frac{\partial Z_0}{\partial y} + \frac{1}{\eta(y)} Z_0^2 = i\omega\rho_ж. \tag{14}$$

В частном случае, когда η не зависит от координаты y, можно воспользоваться известным решением для v_x [5], а значит, и для Z_0, учтя, что знак у временной зависимости нужно изменить на противоположный. В этом случае для новых значений компонент параметра устанавливается явная связь с вязкостью

$$k_1 = (k^2 + \frac{1}{ES} \frac{b_1}{\delta_0} \eta)^{1/2}, \quad \delta_1 = \delta + \frac{1}{2} \frac{\omega}{ES} \frac{b_1}{k_1 \delta_0} \eta ; \tag{15}$$

здесь δ_0 – толщина вязкого пограничного слоя:

$$\delta_0 \equiv (\frac{2}{\omega\rho_ж} \eta)^{1/2}. \tag{16}$$

Таким образом, при η = const по изложенной методике можно определить k_1 и δ_1 и далее из формул (15), (16) вычислить η.

Разработка оптимального алгоритма нахождения параметров задачи по экспериментальной зависимости $Y_э(\omega)$, в частности, при переменной вязкости составляет предмет отдельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малов В.В.* Пьезорезонансные датчики. М.: Энергоатомиздат, 1989. С. 374.
2. Физическая акустика / Под ред. Мэзон У. Т. 1. Ч. А. М.: Мир, 1966. С. 412.
3. *Кайно Г.* Акустические волны. М.: Мир, 1990. С. 534.
4. *Лепендин Л.Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978. С. 466.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 638.

Санкт-Петербургский университет

Поступило в редакцию
27.06.91
После исправления
17.08.92