АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 3

УДК 539.3

© 1993 г. Н. А. Арцыкова, А. К. Перцев

ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ НА КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

В линейной постановке исследуется дифракция сферической ударной волны на круговом цилиндре. Получено точное решение задачи в интегральной форме. Разработан численный алгоритм расчета дифракционного давления. Приведены результаты расчета давления при воздействии ступенчатой волны. Получены предельные значения давления, устанавливающегося на цилиндре при воздействии ступенчатой волны, а также импульс давления при воздействии на цилиндр волны с произвольным законом спада давления за фронтом. Рекомендованы приближенные формулы для расчета дифракционного давления при воздействии на цилиндр произвольной нестационарной сферической волны.

В статье исследуется дифракция сферической ударной волны, распространяющейся в акустической среде, на жестком круговом цилиндре. Эта задача рассматривалась ранее в ряде работ [1—4], но достаточно точных и при этом пригодных для практических целей результатов не было получено. Ниже предложен новый вариант решения, существенно упрощающий алгоритм расчета, и выполнен анализ дифракционных эффектов.

Пусть бесконечно длинный круговой цилиндр помещен в безграничную акустическую среду. Введем цилиндрическую систему координат (x, r, θ), совместив $0X$ с осью цилиндра. В точке $M_0(0, R_0, 0)$ поместим источник сферической ударной волны, которую зададим с помощью потенциала скорости жидкости

$$\varphi_0(R, \tau) = AR^{-1}f(c_0\tau - R)\,H(c_0\tau - R), \tag{1}$$

где R — расстояние от источника до рассматриваемой точки, c_0 — скорость звука в жидкости, A — константа, τ — время, отсчитываемое от момента включения источника, $f(z)$ — произвольная функция, описывающая изменение потенциала во времени, $H(z)$ — функция Хевисайда.

Движение жидкости, возникающее при воздействии ударной волны на цилиндр, будем описывать волновым уравнением для потенциала скорости φ при равенстве нулю нормальной составляющей $\partial\varphi_0/\partial r + \partial\varphi/\partial r$ скорости жидкости на поверхности цилиндра [2]. Время t отсчитывается с момента прихода ударной волны к цилиндру. Поэтому начальные условия для потенциала φ следует принять нулевыми.

Полное давление в жидкости будет равно сумме давления в ударной волне и дополнительного движения, соответствующего потенциалу φ.

В дальнейшем, используя величины c_0, r_0 (радиус цилиндра) и ρ_0 (плотность жидкости), обезразмерим переменные задачи.

В [1—4] для нахождения давления на поверхности цилиндра

$$p_\Sigma(x, \theta, t) = -\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_0 \perp \varphi)\,|_{r=1} \tag{2}$$

используются косинус-преобразование Фурье по координате x, преобразование Лапласа по времени и разложение в тригонометрический ряд по координате θ.

Изображение давления представлено в виде

$$p_\Sigma^{FL}(\omega, s, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{FL}(\omega, s) + q_n^{FL}(\omega, s))\cos n\theta, \tag{3}$$

где F, ω — символ и параметр преобразования Фурье, L, s — символ и параметр преобразования Лапласа, $a_n^{FL}(\omega, s)$ — изображение известных коэффициентов разложения в ряд давления в ударной волне $p_0 = -\partial\varphi_0/\partial t|_{r=1}$,

$$q_n^{FL}(\omega, s) = As\Delta_n f^L(s) e^{(R_0-1)s} \times \frac{I_n'(\beta) K_n(R_0\beta) K_n(\beta)}{K_n'(\beta)} \tag{4}$$

— изображение коэффициентов разложения в ряд дополнительного давления $p_1 = -\partial\varphi/\partial t|_{r=1}$,

$$\beta = \sqrt{s^2 + \omega^2}, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_n = 2, \quad n \neq 0,$$

$I_n(z)$, $K_n(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Представим изображение неизвестных коэффициентов в виде

$$q_n^{FL} = -sb_n^{FL}\psi_n^{FL}, \tag{5}$$

где

$$b_n^{FL} = \Delta_n A f^L(s) e^{(R_0-1)s} \beta I_n'(\beta) K_n(R_0\beta),$$

$$\psi_n^{FL} = -\frac{K_n(\beta)}{\beta K_n'(\beta)}. \tag{6}$$

Нетрудно показать, что b_n^{FL} являются изображением функции

$$b_n(x, t) = \frac{\Delta_n}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\Big|_{r=1} \cos n\theta d\theta,$$

зависящей только от потенциала φ_0. Функции ψ_n^{FL}, напротив, от этого потенциала не зависят. Их оригиналы найдем следующим образом. Применяя к (6) теорему Эфроса, получим

$$\psi_n^F(\omega, t) = \Phi_n(t) - \omega \int_0^t \Phi_n(\sqrt{t^2 - \tau^2}) J_1(\omega\tau) d\tau, \tag{7}$$

где $\Phi_n(t)$ — оригинал выражения $\Phi_n^L = -K_n(s)/sK_n'(s)$, $J_1(Z)$ — функция Бесселя 1-го рода.

Проинтегрировав (7) по частям и применяя к полученному результату обратное преобразование Фурье с последующей переменной порядка интегрирования и заменой переменной, приходим к окончательному выражению

$$\psi_n(x, t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dot{\Phi}_n\left(\sqrt{\frac{t^2 - x^2}{2}}(1 - \sin Z)\right) dz\right] H(t - |x|). \tag{8}$$

Функции $\Phi_n(t)$ можно вычислить по точным формулам [3]. Однако при больших n они громоздки. Поэтому применялось численное обращение изображения $\Phi_n^L(s)$ по методу [5] и функции $\Phi_n(t)$ задавались таблично. После этого интеграл (8) находился численно.

Вернемся к формуле (5). Учитывая, что $(b_n^F)^L = sb_n^{FL}$, и применив к (5) теоремы свертывания, получим

$$q_n(x, t) = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_0^\infty b_n(z, \tau)\,[\psi_n(|x - z|, t - \tau) + \psi_n(|x + z|, t - \tau)]\, d\tau.$$

Эти несобственные сходящиеся интегралы найдены численно. Дифракционное давление на поверхности цилиндра в соответствии с (2) — (4) можно определить по формуле

$$p_\Sigma(x, \theta, t) = p_0(x, \theta, t) + \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x, t) \cos n\theta, \tag{9}$$

где $p_0(x, \theta, t)$ — известное давление в ударной волне.

Однако ряд (9) плохо сходится, так как описывает функцию, имеющую разрыв 1-го рода. Для устранения этого недостатка преобразуем формулу (9). При $t < \sqrt{R_0^2 - 1 + x^2} - R_0 + 1$, когда фронт ударной волны находится на освещенной стороне цилиндра, целесообразно представить формулу (9) в виде

$$p_\Sigma(x, \theta, t) = 2p_0(x, \theta, t) - \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - q_n) \cos n\theta,$$

где

$$a_n(x, t) = \frac{\Delta_n}{\pi} \int_0^{\pi} p_0(x, \theta, t) \cos n\theta d\theta.$$

В этой формуле разрыв функции $p_\Sigma(x, \theta, t)$ содержится в первом слагаемом, а ряд описывает непрерывную функцию и сходится быстро.

При $t > \sqrt{R_0^2 - 1 + x^2} - R_0 + 1$ функция $p_\Sigma(x, \theta, t)$ разрыва не имеет, поэтому следует использовать зависимость

$$p_\Sigma(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + q_n) \cos n\theta.$$

Этот ряд сходится также достаточно быстро.

Анализ дифракционного процесса целесообразно начать со случая ступенчатой волны, для которой в выражении (1)

$$f(t) = -tH(t), \quad f^L(s) = -s^{-2}, \quad A = R_0 - 1.$$

Тогда

$$p_0(x, \theta, t) = \frac{R_0 - 1}{R_1} H(t - R_1 + R_0 - 1), \tag{10}$$

где $R_1 = \sqrt{R_0^2 + 1 + x^2 - 2R_0 \cos\theta}$ и давление в ударной волне в точке встречи с цилиндром равно единице. Расчет дифракционного давления при воздействии ступенчатой волны выполнен для $R_0 = 1{,}1 \div 10$. Из расчетов следует, что давление на освещенной стороне цилиндра в момент прихода ударной волны удваивается, а затем довольно быстро спадает, стремясь к некоторому пределу. На теневой стороне давление на первом этапе процесса плавно возрастает, а затем также стремится к конечному пределу. Отметим, что предельное давление тем сильнее отличается от единицы, чем меньше R_0.

В реальных условиях ударные волны всегда имеют спад давления за фронтом. Дифракцию таких волн можно исследовать с помощью интеграла Дюамеля

$$p_\Sigma(x, \theta, t) = \frac{A}{R_0 - 1} \left[p_H(x, \theta, t) + \int_0^t p_H(x, \theta, \tau) \dot{g}(t - \tau) d\tau\right],$$

где $g(t) = -\dot{f}(t)$ — закон спада давления за фронтом исследуемой волны, причем за счет выбора в (1) постоянной A должно выполняться условие $g(0) = 1$; $p_H(x, \theta, t)$ — дифракционное давление при падении на цилиндр ступенчатой волны.

Так, например, в случае экспоненциальной ударной волны $g(t) = e^{-t/\lambda}$. Параметр λ зависит от расстояния R_0 и мощности источника ударной волны. Ориентировочно можно принять $\lambda \sim 0{,}1\ (R_0 - 1)$. На рис. 1 приведены графики дифракционного давления p_H и p_Σ. Видно, что при воздействии экспоненциальной ударной волны

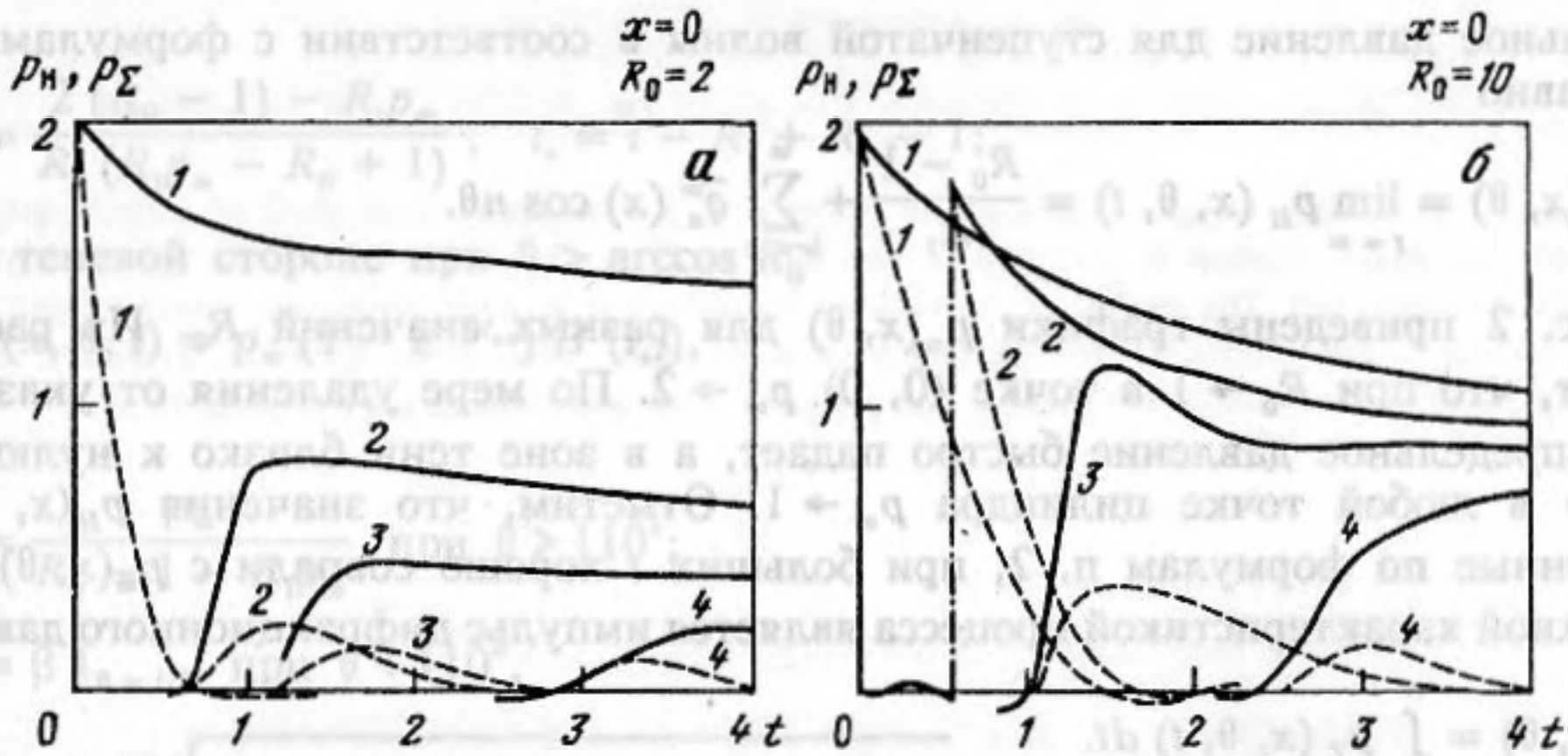

Рис. 1. Дифракционное давление на поверхности цилиндра в сечении $x = 0$: *а* — $R_0 = 2$, *б* — $R_0 = 10$, сплошная линия — ступенчатая волна, штриховая линия — экспоненциальная волна. *1* — $\theta = 0$, *2* — $\theta = 60°$, *3* — $\theta = 90°$, *4* — $\theta = 180°$

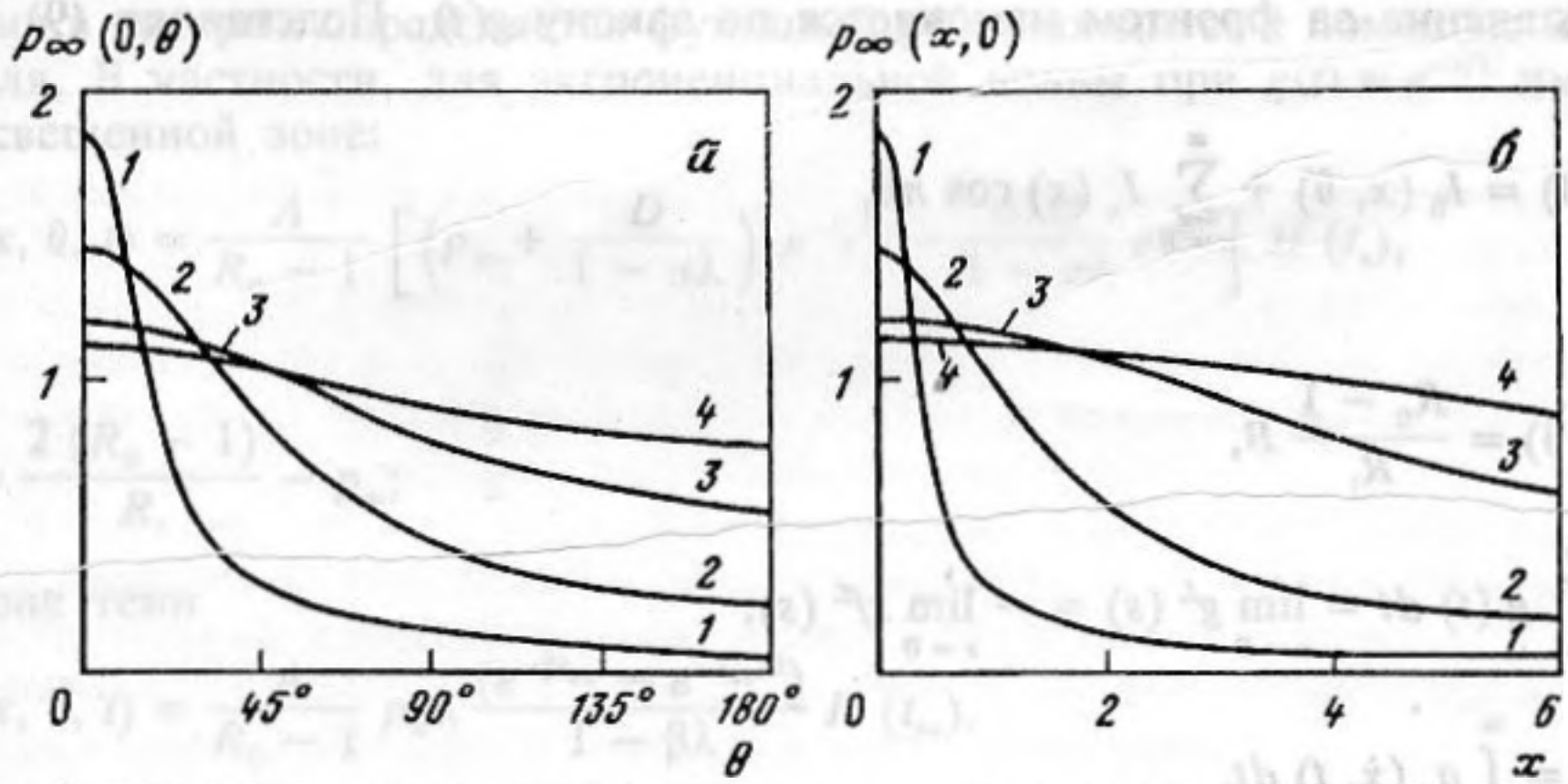

Рис. 2. Предельное давление на поверхности цилиндра при воздействии ступенчатой волны в сечениях: *а* — $x = 0$, *б* — $\theta = 0$. *1* — $R_0 = 1{,}1$, *2* — $R_0 = 2$, *3* — $R_0 = 5$, *4* — $R_0 = 10$

нагрузка на цилиндр кратковременна и носит импульсный характер, особенно при малых R_0.

Выше отмечено, что при воздействии ступенчатой волны давление на поверхности цилиндра стремится к некоторому пределу. Найдем этот предел. Полагая в (4) $f^L(s) = -s^{-2}$, $A = R_0 - 1$, введя обозначения

$$\widetilde{q}_n^{FL}(\omega, s) = -\Delta_n (R_0 - 1)\, s^{-1} e^{(R_0 - 1)s} \frac{I_n'(\beta)\, K_n(R_0\beta)\, K_n(\beta)}{K_n'(\beta)},$$

$$\lim_{t \to \infty} \widetilde{q}_n(x, t) = \widetilde{q}_n^{\infty}(x)$$

и используя предельную теорему операционного исчисления, находим

$$(\widetilde{q}_n^{\infty})^F = \lim_{s \to 0} s\widetilde{q}_n^{FL}(\omega, s) = -\Delta_n (R_0 - 1) \frac{I_n'(\omega)\, K_n(R_0\omega)\, K_n(\omega)}{K_n'(\omega)}. \tag{11}$$

Обращая эту зависимость по Фурье, получим

$$\widetilde{q}_n^{\infty}(x) = -\frac{2\Delta_n (R_0 - 1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_n'(\omega)\, K_n(R_0\omega)\, K_n(\omega)}{K_n'(\omega)} \cos \omega x dx. \tag{12}$$

Предельное давление для ступенчатой волны в соответствии с формулами (9), (10) равно

$$p_\infty(x, \theta) = \lim_{t \to \infty} p_H(x, \theta, t) = \frac{R_0 - 1}{R_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{q}_n^\infty(x) \cos n\theta. \tag{13}$$

На рис. 2 приведены графики $p_\infty(x, \theta)$ для разных значений R_0. Из расчетов следует, что при $R_0 \to 1$ в точке (0, 0) $p_\infty \to 2$. По мере удаления от указанной точки предельное давление быстро падает, а в зоне тени близко к нулю. При $R_0 \to \infty$ в любой точке цилиндра $p_\infty \to 1$. Отметим, что значения $p_H(x, \theta, t)$, полученные по формулам п. 2, при больших t хорошо совпали с $p_\infty(x, \theta)$.

Важной характеристикой процесса является импульс дифракционного давления

$$I(x, \theta) = \int_0^\infty p_\Sigma(x, \theta, t)\, dt. \tag{14}$$

Для ступенчатой ударной волны $I(x, \theta) = \infty$.

Будем полагать, что на цилиндр падает ударная волна, у которой $A = R_0 - 1$, а давление за фронтом изменяется по закону $g(t)$. Подставляя (9) в (14), находим

$$I(x, \theta) = I_0(x, \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} I_n(x) \cos n\theta, \tag{15}$$

где

$$I_0(x, \theta) = \frac{R_0 - 1}{R_1} B,$$

$$B = \int_0^\infty g(t)\, dt = \lim_{s \to 0} g^L(s) = -\lim_{s \to 0} s f^L(s),$$

$$I_n(x) = \int_0^\infty q_n(x, t)\, dt.$$

Для определения $I_n(x)$ воспользуемся теоремами операционного исчисления. Тогда имеем

$$I_n(x) = \lim_{t \to \infty} \int_0^t q_n(x, \tau)\, d\tau = \lim_{s \to 0} q_n^L(x, s) = \lim_{s \to 0} [-s f^L(s)]\, [s \tilde{q}_n^L(x, s)] = B \tilde{q}_n^\infty(x). \tag{16}$$

Отметим, что величина B равна импульсу ударной волны в точке ее встречи с цилиндром. Подставляя (16) в (15) и сравнивая с (13), получим зависимость $I(x, \theta) = B p_\infty(x, \theta)$.

Таким образом, импульс дифракционного давления при воздействии на цилиндр произвольной сферической ударной волны равен произведению импульса ударной волны в точке встречи с цилиндром на предельное давление, устанавливающееся на цилиндре при падении единичной ступенчатой волны.

Для инженерных расчетов нужны приближенные формулы для определения дифракционного давления. При их построении будем исходить из следующих предпосылок. Аппроксимируем дифракционное давление при воздействии на цилиндр ступенчатой волны зависимостями:

на освещенной поверхности при $\theta < \arccos R_0^{-1}$

$$p_H(x, \theta, t) = \{[2(R_0 - 1) R_1^{-1} - p_\infty]\, e^{-\alpha t_*} + p_\infty\}\, H(t_*),$$

где

$$\alpha = \frac{2\,(R_0 - 1) - R_1 p_\infty}{R_1\,(R_1 p_\infty - R_0 + 1)}, \quad t_* = t - R_1 + R_0 - 1;$$

на теневой стороне при $\theta > \arccos R_0^{-1}$

$$p_H\,(x, \theta, t) = p_\infty\,(1 - e^{-\beta t_{**}})\,H\,(t_{**}),$$

где

$$\beta = \frac{p_\infty}{R_0 - 1 - R_1 p_\infty} \quad \text{при } \theta > 110°;$$

$$\beta = \beta\,|_{\theta = 110°} \quad \text{при } \theta < 110°,$$

$$t_{**} = t - \sqrt{(\sqrt{R_0^2 - 1} + \theta - \arccos R_0^{-1})^2 + x^2} + R_0 - 1.$$

Дифракционное давление на цилиндре при воздействии ударных волн, спад давления в которых определяется функцией $g(t)$, находится с помощью интеграла Дюамеля. В частности, для экспоненциальной волны при $g(t) = e^{-t/\lambda}$ имеем

в освещенной зоне:

$$p_\lambda\,(x, \theta, t) = \frac{A}{R_0 - 1}\left[\left(p_\infty + \frac{D}{1 - \alpha\lambda}\right) e^{-t_*/\lambda} - \frac{\alpha\lambda D}{1 - \alpha\lambda}\, e^{-\alpha t_*}\right] H\,(t_*), \tag{17}$$

где

$$D = \frac{2\,(R_0 - 1)}{R_1} - p_\infty;$$

в зоне тени

$$p_\lambda\,(x, \theta, t) = \frac{A}{R_0 - 1}\, p_\infty \lambda\, \frac{(e^{-\beta t_{**}} - e^{-t_{**}/\lambda})}{1 - \beta\lambda}\, H\,(t_{**}). \tag{18}$$

Формулы (17), (18) имеют вполне достаточную для инженерных расчетов точность.

В заключение отметим, что линейная теория хорошо описывает дифракционные эффекты в воде при давлениях в ударных волнах до 50 МПа и в воздухе до 0,01 МПа [6]. При более высоких давлениях становятся существенными нелинейные эффекты, которые особенно важны для правильной оценки воздействия воздушных ударных волн на объекты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Huang H., Wang Y.* Transient Interaction of spherical acoustic waves and cylindrical elastic shell//J. Acoust. Soc. Amer. 1970. V. 48. № 1. P. 228—235.
2. *Арцыкова Н. А., Перцев А. К.* Дифракция сферических ударных волн на круговом цилиндре//Тр. ЛКИ. Динамические нагрузки и прочность судовых конструкций. Л.: Изд-во ЛКИ, 1984. С. 11—18.
3. *Перцев А. К., Платонов Э. Г.* Динамика оболочек и пластин. Л.: Судостроение, 1987.
4. *Кубенко В. Д., Саленко С. Д.* Дифракция нестационарной сферической волны на круговом цилиндре в жидкости//Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 6. С. 3—9.
5. *Арцыкова Н. А., Перцев А. К.* Численное обращение преобразования Лапласа в задачах гидроупругости//Тр. ЛКИ. Динамика и прочность судовых конструкций. Л.: Изд-во ЛКИ, 1986. С. 4—13.
6. *Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С.* Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л.: Судостроение, 1967.

Санкт-Петербургский государственный
морской технический
университет

Поступила в редакцию
09.07.90
После исправления
15.08.91

N. A. Artsykova, A. K. Pertsev

SPHERICAL SHOCK WAVE DIFFRACTION BY A CIRCULAR CYLINDER

Transient interactions of spherical acoustic waves and a cylindrical solid shell of infinite length are investigated. An exact solution is obtained in the integral form. A numerical scheme for calculations of pressure field is obtained. The results of calculations for spherical acoustic monotone waves (waves without pressure decrease) are obtained. The existence of a pressure pulse from spherical arbitrary waves is demonstrated. Simple approximate formulae for pressure field calculations are recommended.