АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 3

УДК 534.2

© 1993 г. П. В. Саков

К ЗАДАЧЕ О РАССЕЯНИИ ЗВУКА ВИХРЕВОЙ НИТЬЮ

В рамках борновского приближения получена равномерная по углу асимптотика звукового поля для больших расстояний при рассеянии плоской гармонической звуковой волны на прямолинейной вихревой нити. Полученное выражение описывает как рассеянное звуковое поле, так и снос падающей волны в поле скорости вихревой нити.

Задача о рассеянии звука прямолинейной вихревой нитью, или двумерным точечным вихрем, является одной из эталонных задач теории рассеяния звука гидродинамическими течениями. Она неоднократно рассматривалась в литературе, как правило,— в рамках борновского приближения. В работе Питаевского [1] была вычислена амплитуда рассеяния вихревой нитью плоской звуковой волны. На основе полученного выражения была выполнена оценка фононной части силы взаимного трения в жидком гелии. В работе О'Ши [2] исследовалась двумерная задача о рассеянии на вихревой нити поля точечного источника. В ней было показано, что рассеянное звуковое поле можно представить в виде суммы двух составляющих, одна из которых описывает снос падающей волны в поле скорости вихревой нити [1], вторая — «собственно» рассеянное поле (в дальнейшем, говоря о «рассеянном» поле, будем иметь в виду именно эту составляющую). Такая интерпретация составляющих звукового поля возможна на основе анализа направления их распространения, а также характера убывания с расстоянием. Результат, аналогичный полученному Питаевским, был получен Ферзиджером [4] при рассмотрении задачи о нахождении низкочастотной асимптотики при рассеянии звука на вихре Озеена [2].

Тем не менее полученные этими и другими [5, 6] авторами асимптотические выражения для рассеянного поля обладают существенным недостатком — они сингулярны в направлении вперед. Это является следствием использования при интегрировании по источникам вторичного поля асимптотического представления для функции Грина в дальней зоне. Однако само понятие «дальней зоны» при решении данной задачи не имеет смысла из-за дальнодействующего характера рассеивающего поля. Как следствие, автоматически суживаются размеры рассеивающей области (хотя само интегрирование и проводится в бесконечных пределах).

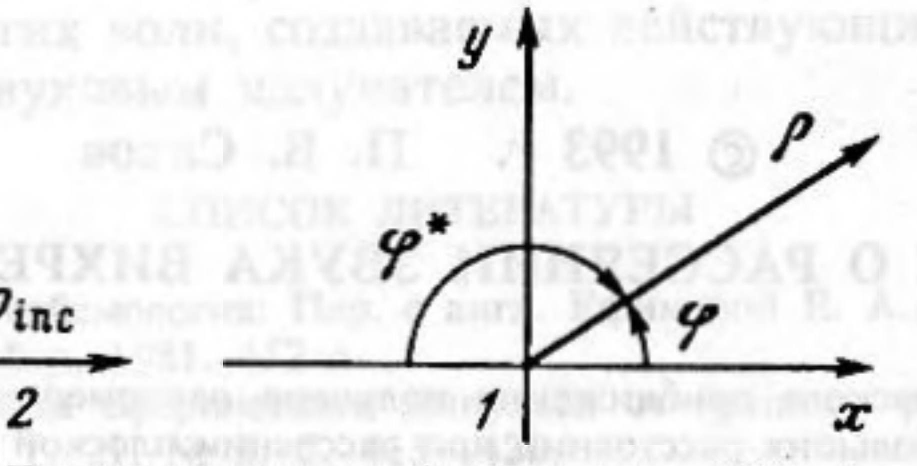
Насколько существенны «потери» при таком подходе? Во-первых, «теряется» основной по величине член асимптотики звукового поля на больших расстояниях, соответствующий «сносу» падающей волны в потенциальном поле скорости вихревой нити (не учитываются фазовые искажения ее фронта, не приводящие в данном случае к изменению направления распространения — такое возможно из-за анизотропии рассеивающей системы). Во-вторых (и вследствие этого),

[1] Сам автор говорит о рефракции звуковых волн, однако, как известно ([3], с. 373), в потенциальном поле скорости рефракция звуковых волн отсутствует.

[2] Можно показать, что при отсутствии критического слоя решение задачи о рассеянии звука на точечном вихре может использоваться в качестве низкочастотной асимптотики звукового поля при рассеянии звука на произвольном локализованном двумерном вихре.

дается неверная интерпретация получаемой в выражении для рассеянного поля особенности как возникающей из-за медленности спадания поля скорости вихря с расстоянием. При этом само ее существование относится на счет модельного характера системы. Однако, как будет показано ниже, даже в модельной постановке особенностей на бесконечности у рассеянного поля не возникает [3, 4].

Цель настоящей работы — получение равномерной по углу асимптотики звукового поля для больших расстояний при рассеянии плоской звуковой волны прямолинейной вихревой нитью.



Геометрия задачи (в плоскости XY): 1 — центр вихря; 2 — падающая волна

Итак, пусть имеется примолинейная вихревая нить, совпадающая с осью z декартовой системы координат (см. рисунок). Запишем скорость жидкости в поле вихревой нити $\mathbf{V}$ через волновое число k падающей на нить плоской звуковой волны p_{inc}:

$$\mathbf{V} = -\frac{\varepsilon c_0}{k\rho}\,\mathbf{i}_\varphi, \tag{1}$$

$$p_{inc} = \exp\,(ik_x x + ik_z z - i\omega t), \tag{2}$$

где c_0 — скорость звука, ε — малый параметр, ω — частота, $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\mathbf{i}_\varphi = (-y/\rho,\, x/\rho)$, p_{inc} — давление в падающей на нить волне.

В качестве исходного воспользуемся уравнением Лайтхилла [9]:

$$\Box p = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\,(V_i V_j), \tag{3}$$

где ρ_0 — плотность жидкости, $\mathbf{V}$ — скорость жидкости.

Для нахождения полного звукового поля будем использовать борновское приближение. При этом могут возникнуть вопросы, касающиеся корректности его применения к данной задаче в связи с дальнодействующим характером источников в правой части (3) (убывающих с расстоянием как ρ^{-1}) и наличием особенности при $\rho = 0$. Их подробное исследование не входит в цели настоящей работы. Отметим лишь, что в первом случае для корректности подхода достаточно малости возмущения звукового поля по сравнению с падающим полем. Корректность пренебрежения особенностью в нуле может быть доказана исследованием поведения решения дифференциального уравнения для нулевой гармоники. Физически, используя борновское приближение, мы пренебрегаем рассеянием на «дырке» давления в центре вихря, а также рассеянием на градиенте плотности

[3] Отметим существование альтернативного подхода к решению задач о расстоянии звука на локализованных вихрях, заключающегося в разложении плоской волны по цилиндрическим (или сферическим) гармоникам и решении задачи отдельно для каждой парциальной моды (см., например, [7, 8]). В силу приведенных выше причин при таком подходе при наличии потенциального течения вокруг локализованного вихревого ядра для вычисления сноса падающей волны необходимо учитывать рассеяние не только низших, но и высших (вообще говоря, всех) гармоник, что обычно не делается.

[4] Автор не ставит под сомнение обоснованность в целом того или иного подхода к решению подобного рода задач. Речь идет лишь об уточнении полученных результатов и их интерпретации.

жидкости, обусловленном наличием градиента давления и сжимаемостью жидкости.

В рамках борновского приближения для функции источников в правой части (3), с учетом вида падающей волны (2) и двумерного характера движения жидкости, нетрудно получить

$$Q = Q_{\perp} + Q_{\parallel}, \tag{4}$$

$$Q = -\frac{2i}{\omega}\left[k^2 \frac{\partial}{\partial x}(p_{\text{inc}} V_x)\right] = -2i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\exp(ik_x x)\right]\exp(ik_z z - i\omega t), \tag{5}$$

$$Q_{\parallel} = \frac{2i}{\omega}\left[k_z^2 p_{\text{inc}} \frac{\partial V_x}{\partial x}\right] = -2i\varepsilon \sin^2(\theta_{\text{inc}})\frac{2xy}{x^2+y^2}\exp(ik_x x)\exp(ik_z z - i\omega t), \tag{6}$$

где V_x — x-компонента скорости $\mathbf{V}$, $\sin^2(\theta_{\text{inc}}) = k_z^2/k^2$. Соответственно для возмущения звукового поля p_s имеем

$$p_s = p_{\perp} + p_{\parallel}, \tag{7}$$

$$p_{\perp,\parallel} = -\frac{i}{4}\iint dx'dy' Q_{\perp,\parallel}(x', y')\, H_0^{(1)}(k_x\,|\rho' - \rho|), \tag{8}$$

где $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля, $\rho = (x, y)$. Вычислим последовательно $p_{\perp}$ и $p_{\parallel}$. Для этого воспользуемся интегральным представлением

$$H_0^{(1)}(k_x\,|\rho' - \rho|) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i\xi(y'-y) + i(k_x^2-\xi^2)^{1/2}\,|x'-x|]}{(k_x^2-\xi^2)^{1/2}}\,d\xi. \tag{9}$$

Подставив (5) и (9) в (8) и проинтегрировав по частям по x', получим

$$p_{\perp} = \frac{i\varepsilon}{2\pi}\iiint d\xi dx' dy' \frac{y'\,\mathrm{sgn}(x'-x)}{x'^2+y'^2}\exp[ik_x x' + i\xi(y'-y) + $$

$$+ i(k_x^2-\xi^2)^{1/2}\,|x'-x|] \tag{10}$$

(здесь и далее опущен множитель $\exp(ik_z z - i\omega t)$). Выполнив последовательно интегрирование по y' и по x' (полагая при этом $\mathrm{Im}(k_x) = 0$), получим

$$p_{\perp} = I_1 + I_2 + I_3, \tag{11}$$

$$I_1 = -\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{sgn}(x)\exp(ik_x x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi}\exp(-i\xi y - |\xi x|)\,d\xi = \varepsilon\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \tag{12}$$

$$I_2 = -\frac{i\varepsilon}{2k}\exp(ik_x x)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(\xi)\exp(-i\xi y - |\xi x|)\,d\xi = -\frac{\varepsilon\sin(\varphi)}{k_x\rho}\exp(ik_x x), \tag{13}$$

$$I_3 = -\frac{\varepsilon}{2k_x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_x\,\mathrm{sgn}(x) + (k_x^2-\xi^2)^{1/2}}{\xi}\exp[i\xi y + i(k_x^2-\xi^2)^{1/2}\,|x|]\,d\xi, \tag{14}$$

где φ — полярный угол (см. рисунок). Получить точное выражение для последнего интеграла не удается, поэтому приходится ограничиться вычислением его асимптотики при $(k_x\rho) \to \infty$. Значение его в этом случае определяется наличием седловой точки $\xi_s = k_x\sin(\varphi)$ и полюса $\xi_p = 0$ при $x > 0$. Стандартными методами (см., например, [10]) можно получить асимптотическое разложение интеграла (14) в ряд по степеням $(k_x\rho)^{-1/2}$. Мы ограничимся здесь обычной для задач с цилиндрической геометрией точностью до $O[(k_x\rho)^{-1}]$ (используя при этом существенным образом соотношение $\mathrm{Im}(k_x) = 0$):

$$I_3 = -i\pi\varepsilon\theta(x)\,\mathrm{sgn}(y)\exp(ik_x x)\,\mathrm{erf}\,[\exp(-i\pi/4)(k_x\rho - k_x x)^{1/2}] -$$

$$-\varepsilon\left(\frac{\pi}{2k_x\rho}\right)^{1/2}\exp(ik_x x - i\pi/4)\,\frac{\cos(\varphi)\cos(\varphi/2) - \theta(x)}{\sin(\varphi/2)} + O\,[(k_x\rho)^{-1}]. \tag{15}$$

Здесь $\mathrm{erf}(x)$ — интеграл вероятностей, $\theta(x)$ — тэта-функция.

Для вычисления $p_{\|}$ воспользуемся разложением $H_0^{(1)}(k_x|\rho' - \rho|)$, аналогичным (9):

$$H_0^{(1)}(k_x|\rho' - \rho|) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i\xi(x' - x) + i(k_x^2 - \xi^2)^{1/2}|y' - y|]}{(k_x^2 - \xi^2)^{1/2}}\,d\xi. \tag{16}$$

Подставив (16) и (6) в (8), после интегрирования по частям y' получим:

$$p_{\|} = -\frac{i\varepsilon\sin^2(\theta_{\mathrm{inc}})}{2\pi}\iiint d\xi dy' dx'\,\frac{x'\,\mathrm{sgn}(y' - y)}{x'^2 + y'^2}\times$$

$$\times\exp[ik_x x' + i\xi(x' - x) + i(k_x^2 - \xi^2)|y' - y|]. \tag{17}$$

Выполнив интегрирование по x', а затем — по y', получим:

$$p_{\|} = I_4 + I_5,$$

$$I_4 = \frac{\varepsilon\sin^2(\theta_{\mathrm{inc}})}{2k_x}\,\mathrm{sgn}(y)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-|\xi + k_x|\,|y| - i\xi x)\,d\xi =$$

$$= \frac{\varepsilon\sin^2(\theta_{\mathrm{inc}})\sin(\varphi)}{k_x\rho}\exp(ik_x x), \tag{19}$$

$$I_5 = -\frac{\varepsilon\sin^2(\theta_{\mathrm{inc}})}{2k_x}\,\mathrm{sgn}(y)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[i(k_x^2 - \xi^2)^{1/2}|y| - i\xi x]\,d\xi =$$

$$= -\frac{\varepsilon\pi\sin^2(\theta_{\mathrm{inc}})}{2k_x}\,\frac{\partial}{\partial y}H_0^{(1)}(k_x\rho). \tag{20}$$

Из (11)—(15) и (17)—(20) окончательно имеем следующее выражение для возмущения звукового поля в поле скорости вихревой нити:

$$p_s = -i\varepsilon\varphi^{\bullet}\exp(ik_x x) - \varepsilon\left(\frac{\pi}{2k_x\rho}\right)^{1/2}\exp(ik_x\rho - i\pi/4)\cos(\varphi)\,\mathrm{ctg}(\varphi/2) +$$

$$+\varepsilon\theta(x)\Big\{i\pi\,\mathrm{sgn}(y)\exp(ik_x x) + \mathrm{erfc}\,[\exp(-i\pi/4)(k_x\rho - k_x x)^{1/2}] +$$

$$+\left(\frac{\pi}{2k_x\rho}\right)^{1/2}\exp(ik_x\rho - i\pi/4)\,\frac{1}{\sin(\varphi/2}\Big\} - \frac{\varepsilon\pi\sin^2(\theta_{\mathrm{inc}})}{2k_x}\,\frac{\partial}{\partial y}H_0^{(1)}(k_x\rho) +$$

$$+ O\,[(k_x\rho)^{-1}],\quad |\varphi^{\bullet}| < \pi, \tag{21}$$

где $\varphi^{\bullet}$ — полярный угол, отсчитываемый от направления назад (см. рисунок), $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$.

Выражение (21) является основным результатом настоящей работы. В нем первый член описывает геометрический снос звукового поля в поле скорости вихря; его величина (с точностью до постоянного множителя) равна интегралу вдоль луча от источника до точки наблюдения от проекции на луч локальной скорости поля вихревой нити. Из-за характера поля скорости нити величина этого члена не убывает с расстоянием при фиксированном угле φ. Кроме того, он имеет разрыв на оси $\varphi = 0$ ($\varphi^{\bullet} = \pm\pi$), так как величина эффекта имеет разные знаки при отображении относительно оси x.

Второй член в выражении (21) соответствует рассеянному полю и имеет особенность в направлении вперед ($\varphi = 0$). Третий член компенсирует разрыв первой компоненты и особенность второй; с точностью до членов $O[(k_x\rho)^{-1}]$ он мал «почти везде», за исключением узкой угловой области в направлении вперед (имеющей ширину порядка $O[(k_x\rho)^{1/2}]$). Четвертое слагаемое возникает лишь при наклонном падении звуковой волны и, как и второе, относится к рассеянному полю.

Таким образом, особенности отдельных составляющих рассеянного поля взаимно компенсируются. Разрыв первой составляющей и особенность второй лишь отражают тот факт, что эффекты сноса поля и «собственно» рассеяния в направлении вперед неразличимы, поскольку соответствующие компоненты рассеянного поля распространяются в одном направлении.

Полученый результат ставит под сомнение тезис о неприменимости борновского приближении для вычисления звукового поля на малых углах ($\varphi \to 0$) [2, 4—6].

Принятое в настоящей работе допущение $\mathrm{Im}(k_x) = 0$ является существенным при выводе выражения (21). Физически это объясняется дальнодействующим характером источников в уравнении (3): любой сколь угодно малый экспоненциальный рост падающей волны с расстоянием приведет к бесконечной амплитуде возмущения, вычисляемого в борновском приближении.

Автор благодарит А. Т. Скворцова за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Питаевский Л. П.* Вычисление фононной части силы взаимного трения в сверхтекучем гелии//ЖЭТФ. 1958. Т. 35. № 5(11). С. 1271—1275.
2. *O'Shea.* Sound scattering by a potential vortex//J. Sound and Vibr. 1975. V. 43. № 1. P. 109—116.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 732 с.
4. *Ferziger G. H.* Low-frequency acoustic scattering from a trailing vortex//J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 56. № 6. P. 1705—1707.
5. Фабрикант А. Л. К вопросу о рассеянии звука вихрем//Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 5. С. 694—695.
6. *Фабрикант А. Л.* Рассеяние звука вихревыми течениями//Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 262—267.
7. *Големшток Г. М., Фабрикант А. Л.* Рассеяние и усиление звуковых волн цилиндрическим вихрем//Акуст. журн. 1980. № 3. С. 383—390.
8. *Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А.* Излучение и рассеяние звука вихревым кольцом//Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 83—95.
9. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. I: General Theory//Proc. Roy. Soc. 1952. V. A2111. P. 564—587.
10. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 552 с.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Российской академии наук

Поступила в редакцию
10.12.91

P. V. Sakov

ON PROBLEM OF SOUND SCATTERING BY A VORTEX

A uniform with respect to angle asymptotics of a sound field is obtained for large distances within the framework of Born approximation in the case of plane harmonical sound wave scattering by a rectilinear vortex. The obtained expression describes both the scattered sound field and the displacement of an incident wave in the field of vortex velocity.