АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 4

УДК 550.34

© 1993 г. Г. А. Максимов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОРОТКИХ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В НЕОДНОРОДНЫХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ СРЕДАХ

В работе развивается подход к описанию распространения плоских акустических импульсов в неоднородных релаксационных средах. Основное внимание уделено изучению закономерностей распространения коротких импульсов в средах с плавным изменением скоростных, плотностных и температурных полей. Установлены общие закономерности изменения амплитуды и формы импульса, распространяющегося в таких средах. Особое внимание уделено влиянию на форму импульса температурной неоднородности, приводящей к существенному изменению спектра времен релаксации вдоль трассы. В частности, показано, что при определенных условиях даже небольшие локальные понижения температуры могут приводить к заметному уширению импульса по сравнению со случаем, когда их нет. Это открывает возможности для диагностики температурных неоднородностей среды импульсными акустическими методами.

Исследование закономерностей распространения акустических полей в различных средах является, с одной стороны, важным (а иногда и единственным, как это имеет место в сейсмологии) источником информации о свойствах этих сред, а с другой стороны, позволяет более точно учитывать искажения, вносимые средой, при расшифровке информации об источнике излучения.

Линейная теория распространения акустических волн в идеально-упругих средах в настоящее время детально разработана [1, 2].

С ее помощью удается достаточно точно описывать кинематические и динамические характеристики волновых полей от различных источников в неоднородных идеально-упругих средах [12].

Однако, как хорошо известно [3], реальные среды в той или иной мере обладают неидеальными свойствами, которые в ряде случаев могут оказывать сильное влияние на динамические характеристики акустических полей.

При изучении акустических волн малой амплитуды наиболее существенными из неидеальных свойств оказываются диссипативно-дисперсионные свойства среды, связанные в конечном счете с их внутренней микроструктурой. Эти свойства могут быть описаны в терминах релаксационных процессов, которые возникают в поле акустической волны при ее распространении по среде [3].

Основное влияние диссипативно-дисперсионные свойства среды оказывают на динамические характеристики волн, приводя к искажениям формы и затуханию амплитуды [4]. Поэтому одним из перспективных методов дистанционного неразрушающего контроля среды является импульсная акустодиагностика [5], когда по закономерностям изменения динамических характеристик акустических импульсов получают информацию о диссипативно-дисперсионных свойствах среды и о тех релаксационных механизмах, которые приводят к таким свойствам.

Исследование влияния диссипативно-дисперсионных свойств среды на эволюцию профиля импульса при его распространении имеет длительную историю (см., например обзор [6]). На этом пути исследовались различные модели сред и асимптотики их решений. В том числе получен ряд точных решений, описывающих динамику одномерного импульса при его распространении в средах, диссипативно-дисперсионные свойства которых отражают некоторые модельные представления о протекающих в средах релаксационных процессах [7—15].

В работе [16] на основе известных решений и анализе асимптотического поведения решения в окрестности определенных точек профиля импульса получено аналитическое выражение, описывающее эволюцию профиля импульса в среде с произвольным набором релаксационных процессов, которые одновременно могут протекать в среде. При этом показано, как по измерениям амплитуды отдельных частей импульса можно получить информацию о трех первых моментах спектра времен релаксации. В определенной мере этот результат решает задачу об импульсной акустодиагностике однородных релаксационных сред.

Однако во многих, если не в большинстве, встречающихся на практике случаях приближение пространственной однородности среды может нарушаться. Поэтому требуется разработка методов, которые бы наряду с диссипативно-дисперсионными свойствами среды учитывали крупномасштабную в сравнении с характерной длиной волны неоднородность среды. Напомним, что влияние мелкомасштабной неоднородности при макроскопическом описании должно учитываться в самом определении диссипативно-дисперсионных свойств среды, а влияние неоднородностей, сравнимых с длиной волны, следует рассматривать в рамках теории рассеяния [17].

Существует ряд работ [18—20], в которых делается попытка описать динамику импульса при его распространении в неоднородной диссипативно-дисперсионной среде. Так, в работах [18, 19] ищется коротковолновая асимптотика для импульсов, распространяющихся в неоднородных средах с *E*- и *Ei*-памятью, которые, как можно показать [15], соответствуют в случае малой дисперсии фазовой скорости наличию в среде либо одного релаксационного механизма, либо их непрерывному набору с плотностью времен релаксации $1/\tau$. Зависящими от координаты считаются плотность и упругие модули, а соответствующий этим моделям спектр времен релаксации (СВР) не меняется вдоль трассы распространения.

В реальной ситуации зависящими от пространственной координаты оказываются как плотность и упругие модули среды, так и параметры СВР. Такие ситуации обычны при температурной неоднородности трассы распространения, поскольку времена релаксационных процессов, согласно закону Аррениуса [3], экспоненциально зависят от обратной температуры. Кроме того, неоднородность среды может быть вызвана сменой релаксационных механизмов вдоль трассы распространения или изменением дисперсии фазовой скорости, которая пропорциональна относительной доли вклада неупругих деформаций в полное смещение.

Попытка рассмотреть случай переменного вдоль трассы распространения времени релаксации была предпринята в работе [20]. Однако основные усилия этой работы были направлены на доказательство существования решения и построение математически корректной прифронтовой асимптотики, в то время как детали, интересные с точки зрения диагностики среды, остались практически не исследованными.

В практическом отношении результаты, полученные в работах [18—20], являются слишком громоздкими, чтобы являться удобным инструментом для диагностики сред, поскольку на их основе затруднительно получить простые соотношения, связывающие динамику параметров импульса со свойствами среды.

В настоящей работе получены более удобные аналитические выражения, описывающие эволюцию коротких импульсов в неоднородных (в том числе и температурно неоднородных) средах, на основе которых можно определять параметры среды по динамике распространяющегося импульса.

Влияние диссипативно-дисперсионных свойств среды на распространение акустических импульсов может быть исследовано в рамках линейной наследственной теории упругости [8]. Свойства среды в таком подходе определяются видом релаксационных ядер в локальном уравнении состояния наследственного типа, связывающего тензор напряжений с тензором деформаций $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int dt' \, [M(\mathbf{r}, t - t') \, \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t') + \delta_{ij} L(\mathbf{r}, t - t') \, \varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t')]$.

Существуют различные подходы к определению вида ядер $M(\mathbf{r}, t)$ и $L(\mathbf{r}, t)$

[3, 8, 21—23]. Мы воспользуемся наиболее общим и последовательным, на наш взгляд, термодинамическим подходом [3, 24], с помощью которого удается наиболее полно учесть большинство из наблюдаемых закономерностей по затуханию волн в геосредах (в частности, например, линейную в широкой области частот зависимость коэффициента затухания сейсмических волн от частоты). Согласно термодинамическим представлениям о природе релаксационных процессов, протекающих в среде [3], релаксационные модули $M(\mathbf{r}, t)$ и $L(\mathbf{r}, t)$ в общем случае могут быть описаны в терминах локального спектра времен релаксации (СВР) $g(r, \tau) \geq 0$:

$$M(\mathbf{r}, t) \sim L(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})\, C_\infty^2(\mathbf{r})\, \varkappa(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

$$\varkappa(\mathbf{r}, t) = \left[\delta(t) - \frac{\Delta(\mathbf{r})}{\langle\tau(\mathbf{r})\rangle} \int_a^b g(\mathbf{r}, \tau)\, e^{-t/\tau} d\tau\right],$$

где $\langle\tau(\mathbf{r})\rangle = \int_a^b g(\mathbf{r}, \tau)\, \tau d\tau$ — среднее локальное время релаксации, $\rho(\mathbf{r})$ — плотность среды, $\Delta(\mathbf{r}) = (C_\infty^2(r) - C_0^2(\mathbf{r}))/C_\infty^2(\mathbf{r})$ — локальная дисперсия фазовой скорости, $C_\infty(\mathbf{r})$ и $C_0(\mathbf{r})$ — максимальная и минимальная локальные фазовые скорости в среде. Первое слагаемое в (1) соответствует упругому отклику среды, второе — неупругому.

Поле смещений в случае одной пространственной координаты подчиняется следующему уравнению волнового типа:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t dt' M(x, t - t') \frac{\partial}{\partial x} u(x, t') = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим, как будет распространяться импульс в полупространстве $x > 0$, если на границе $x = 0$ задано граничное условие

$$\int_0^t dt' M(x, t - t') \frac{\partial}{\partial x} u(x, t') \Big|_{x=0} = Q_f(t). \tag{3}$$

Такое граничное условие соответствует заданию силы, приложенной к точке $x = 0$. Можно рассмотреть и другие типы граничных условий, например $u(x = 0, t) = Q_u(t)$, если задано смещение.

Переходя к лапласовскому представлению по времени $t \to p$ из (2) и (3) получим следующую систему:

$$\rho(x)\, p^2 u(x, p) - \frac{\partial}{\partial x} M(x, p) = 0, \tag{4а}$$

$$M(x, p) \frac{\partial}{\partial x} u(x, p) \Big|_{x=0} = Q_f(p). \tag{4б}$$

В работах [18, 19] исследуется коротковолновая асимптотика непосредственно уравнения (4), что приводит к определенной громоздкости получаемых выражений. Мы поступим иначе. Именно, переходя к новой переменной

$$y = \int_0^x dx \frac{\rho(x)}{\rho(0)} \tag{5}$$

($y(x) \geq 0$ — монотонно растущая функция, поскольку $\rho(x) \geq 0$) и вводя новую функцию

$$\varphi(y, p) = \frac{M(x(y), p)}{M(x = 0, p)} \frac{\rho(x(y))}{\rho(0)} \frac{\partial}{\partial y} u(x(y), p), \tag{6а}$$

уравнение (4) можно свести к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(y, p) - K^2(y, p)\,\varphi(y, p) = 0, \tag{7а}$$

где волновое число $K(y, p)$ определяется выражением

$$K^2(y, p) = \frac{p^2\rho(0)}{M(x(y), p)}\,\frac{\rho(0)}{\rho(x(y))}, \tag{8а}$$

при этом граничное условие (4б) переходит соответственно в условие

$$\varphi(y = 0, p) = Q(p)/M(x = 0, p). \tag{9}$$

Отметим, что к уравнению Гельмгольца можно прийти и другим способом, если, как это сделано в [1], ввести функцию

$$\psi(x, p) = \rho^{-1/2}(x)\,M(x, p)\,\frac{\partial}{\partial x}u(x, p) = -\rho^{-1/2}(x)\,P(x, p), \tag{6б}$$

где $P(x, p)$ — давление. Тогда в уравнении Гельмгольца для $\psi(x, p)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, p) - K^2(x, p)\,\psi(x, p) = 0, \tag{7б}$$

волновое число $K^2(x, p)$ будет иметь вид

$$K^2(x, p) = \frac{p^2\rho(x)}{M(x, p)} - \sqrt{\rho(x)}\,\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}. \tag{8б}$$

Однако, несмотря на то, что в результате решения уравнения (7б) может быть непосредственно получена физически измеримая величина — давление, более компактная форма волнового числа (8а) по сравнению с (8б) имеет ряд преимуществ, которые будут нами использованы.

В том случае, когда спектр времен релаксации не меняется вдоль пути распространения импульса, т. е. $g(\mathbf{r}, \tau) \equiv g(\tau)$, не будет зависеть от координаты $\mathbf{r}$ также и величина $\langle\tau(\mathbf{r})\rangle \equiv \langle\tau\rangle$. Если к тому же остается постоянной и дисперсия фазовой скорости $\Delta(\mathbf{r}) \equiv \Delta$, пропорциональная доле неупругих процессов в полном смещении, то, как нетрудно видеть, волновое число $K(y(x), p)$ представляется в виде произведения волнового числа однородной среды $K(p)$ с параметрами, соответствующими точке $x = 0$, и отношения акустических импедансов в точках $x = 0$ и x

$$K(x, p) = \frac{C_\infty(0)\,\rho(0)}{C_\infty(x)\,\rho(x)}\,K(p), \tag{10}$$

$$K(p) = \frac{p}{C_\infty(0)}\left[1 - \frac{\Delta}{\langle\tau\rangle}\int_a^b \frac{g(\tau)}{(p + 1/\tau)}\,d\tau\right]^{-1/2}. \tag{11}$$

В соответствии с таким представлением (11) решение краевой задачи (7)—(9) во временном представлении ($p \to t$) может быть записано на основании теоремы Эфроса об обобщенной свертке [25] в виде

$$\varphi(y, t) = \int_0^t dt' Q_1(t - t') \int_0^\infty d\zeta G_\varphi(y, \zeta)\,I(t', \zeta),$$

где $G_\varphi(y, t)$ — функция Грина соответствующей упругой задачи (7а)—(9), когда $K(p) = p/C_\infty(0)$; $I(t, x)$ — является фундаментальным решением уравнения (7а)

при не зависящих от координаты x коэффициентах, а эффективная функция источника дается выражением:

$$Q_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp e^{pt}\frac{Q_f(p)}{\varkappa(x=0,p)},\ \gamma = (-i\infty, i\infty). \tag{12}$$

На основании соотношения (6а) поле смещений выражается через функцию $\varphi(y, t)$ следующим образом:

$$u(x(y), p) = -\int_y^\infty dy'\left(\frac{K(x(y'), p)}{K(y'=0, p)}\right)^2 \varphi(y', p), \tag{13}$$

где верхний предел выбран исходя из условия $u(x \to \infty, p) = 0$.

Возвращаясь к переменным x и t для поля смещений, будем иметь выражение

$$u(x, t) = \int_0^t dt' Q_1(t-t')\int_0^\infty d\zeta \tilde{G}(x, \zeta) I(t', \zeta), \tag{14а}$$

где

$$\tilde{G}(x, t) = -\int_x^\infty dx' \frac{C_\infty^2(0)\rho(0)}{C_\infty^2(x')\rho(x')} G_\varphi(y(x'), t)$$

есть функция Грина соответствующей задачи для поля смещений в среде без релаксации.

Если интересоваться не смещением среды, а полем давления, то, учитывая соотношение

$$P(x, p) = -M(x=0, p)\varphi(y(x), p),$$

нетрудно получить

$$P(x, t) = \int_0^t dt' Q_f(t-t')\int_0^\infty d\zeta G_\varphi(y(x), \zeta) I(t', \zeta). \tag{14б}$$

Таким образом, в случае, когда СВР и дисперсия фазовой скорости постоянны вдоль трассы распространения, а переменными являются только плотность среды и скорость распространения звука в ней, полные поля смещений и давлений представляются соответственно в виде (14а) и (14б), в которых разделены факторы, ответственные за чисто геометрические характеристики неоднородной упругой среды (в функции Грина упругой задачи $\tilde{G}(x, t)$), и факторы, ответственные за диссипативно-дисперсионные свойства среды (в фундаментальном решении уравнения (7) для однородной среды $I(t, x)$). Удобство представления (14) заключается в том, что оно позволяет анализировать по отдельности $\tilde{G}(x, t)$ и $I(t, x)$ и лишь потом вычислять результат совместного влияния неоднородности и диссипативно-дисперсионных свойств среды.

Отметим, что в случае блочно-однородной среды, когда волновое число также можно представить в форме (10), представление, аналогичное (14), было использовано в работах [26, 27].

Точные решения для $G_\varphi(y)\rho(x)$ при определенных законах изменения величины $C_\infty(x)\rho(x)$ известны. Сводка точно решаемых задач для уравнения Гельмгольца приведена, например, в монографии [1]. Поэтому для определения поля смещений $u(x, t)$ требуется знание фундаментального решения $I(t, x)$, которое определяется интегралом Меллина

$$I(t, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp \exp(pt - xK(p)),\ \gamma = (-i\infty, i\infty). \tag{15}$$

Детальное исследование поведения фактора $I(t, x)$ в случае произвольного

вида спектра времен релаксации (СВР) и малой дисперсии фазовой скорости $\Delta << 1$ проведено в работе [16]. Отметим также, что для некоторых конкретных видов СВР точные решения для фактора $I(t, x)$ содержатся в работах [10—15]. Таким образом, в тех случаях, когда имеются точные решения для $\tilde{G}(x, t)$ и $I(t, x)$, дальнейший анализ на основе соотношения (14) не вызывает логических затруднений.

Однако аналитические выражения для $G_\varphi(y, t)$ и соответственно $\tilde{G}(x, t)$ известны лишь для небольшого числа законов изменения функций $\rho(x)$ и $C(x)$, поэтому возникает необходимость в использовании приближенных методов. Так, в частности, если длина волны, соответствующая волновому числу $K(x, p = i\omega)$, оказывается малой по сравнению с характерными масштабами изменения параметров среды в рассматриваемой задаче, то может быть использовано приближение геометрической оптики (ВКБ-приближение), применимое при условии [1]

$$\left| K^{-2}(y, p) \frac{\partial}{\partial y} K(y, p) \right| << 1. \tag{16}$$

В частности, если имеет место представление (10) и дисперсия фазовой скорости мала $\Delta << 1$, то условие применимости метода ВКБ будет иметь вид ($p = i\omega$)

$$\omega >> \left| \rho^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x} C_\infty(x) \rho(x) \right| \tag{16а}$$

или, если ввести локальную длину волны $\lambda(x) = 2\pi C_\infty(x)/\omega$, то это условие будет означать малость длины волны по сравнению с масштабом изменения акустического импеданса среды

$$\lambda(x) \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln (C_\infty(x) \rho(x) \right| << 1. \tag{16б}$$

При выполнении условия (16) для функции $\varphi(y, p)$ из (7а) получается выражение [1]

$$\varphi(y, p) = \frac{Q_f(p)}{M(0, p)} \left(\frac{K(y = 0, p)}{K(y, p)} \right)^{1/2} \exp\left\{ - \int_0^y dy' K(y', p) \right\}. \tag{17а}$$

Здесь нормировочный коэффициент выбран так, чтобы удовлетворять граничному условию при $y = 0$ (9).

Если имеет место представление (10), то из (17а) следует

$$\varphi(y(x), p) = \frac{Q_f(p)}{M(0, p)} \left(\frac{C_\infty(0) \rho(0)}{C_\infty(x) \rho(x)} \right)^{-1/2} \exp\left\{ - K(p) \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x)} \right\}. \tag{17б}$$

Пространственно-временное представление поля смещений, получаемое на основе (17б) и (13), может быть записано в виде (14а), где приближенное выражение для функции Грина $\tilde{G}(x, t)$ имеет вид

$$\tilde{G}(x, t) = - \int_x^\infty dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')} \left(\frac{C_\infty(0) \rho(0)}{C_\infty(x') \rho(x')} \right)^{1/2} \delta \left(t - \frac{1}{C_\infty(0)} \int_0^{x'} dx'' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x'')} \right). \tag{18}$$

С учетом появившейся в (18) дельта-функции выражение (14а) запишется в более простом виде

$$u(x, t) = - \int_0^t dt' Q_i(t - t') \int_x^\infty dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')} \times$$

$$\times \left(\frac{C_\infty(0) \rho(0)}{C_\infty(x') \rho(x')} \right)^{1/2} I \left(t', \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')} \right). \tag{19}$$

Однако выражение (19) не является достаточно удобным для анализа, поскольку содержит интеграл по x'. Чтобы продвинуться в его анализе дальше, заметим, что при условии (16) вместо (19) можно получить более простое выражение, подставив в (13) асимптотику (17а) и проинтегрировав полученное выражение по частям, используя наличие экспоненциального множителя в (17а). Удерживая ведущее слагаемое по параметру (16), для лапласовского изображения поля смещений получим выражение

$$u(x, p) = \frac{Q_f(p)}{p^2 \rho(0)} K(y(x), p) \left(\frac{K(x=0, p)}{K(y(x), p)} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left\{ - \int_0^x dx' \frac{\rho(x')}{\rho(0)} K(y(x'), p) \right\} \Big|_x^\infty. \tag{20}$$

Так, в частности, если имеет место представление (10), то вместо (20) будем иметь

$$u(x, p) = \frac{Q_f(p)}{p^2 \rho(0)} K(p) \left(\frac{C_\infty(0)\, \rho(0)}{C_\infty(x)\, \rho(x)} \right)^{1/2} \exp\left\{ - K(p) \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')} \right\} \Big|_x^\infty. \tag{21}$$

Заметим, что формально при достаточно быстром возрастании скорости звука $C_\infty(x)$ вдоль трассы распространения может оказаться, что величина

$$Z = \int_0^\infty dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')}$$

будет конечной, и у поля смещений, казалось бы, возникнет не зависящая от координаты x составляющая, соответствующая верхнему пределу интегрирования в выражениях (20), (21). Однако при конечном Z поле достигает бесконечно удаленной точки за конечное время (физически это, конечно же, невозможно), так что только этот интервал времен и следует рассматривать, если не учитывать отражение от бесконечности. Внутри же этого интервала, как можно показать, вклад указанного слагаемого тождественно равен нулю.

Пространственно-временная структура поля смещений опять может быть представлена в виде (14а), где приближенное выражение для функции Грина упругой задачи $\tilde{G}(x, t)$ имеет вид

$$\tilde{G}(x, t) = \frac{1}{\rho(0)} \left(\frac{C_\infty(0)\, \rho(0)}{C_\infty(x)\, \rho(x)} \right)^{1/2} \delta\left(t - \frac{1}{C_\infty(0)} \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')} \right).$$

Отсюда для поля скорости смещения $v(x, t) = (\partial/\partial t) u(x, t)$ нетрудно получить выражение

$$v(x, t) = \frac{1}{C_\infty(0)\, \rho(0)} \left(\frac{C_\infty(0)\, \rho(0)}{C_\infty(x')\, \rho(x')} \right)^{1/2} \int_0^t dt' Q_2(t - t')\, I \times$$

$$\times \left(t', \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')} \right), \tag{22}$$

где $Q_2(t)$ отличается от $Q_1(t)$ лишь степенью $\varkappa(p)$ в выражении (12)

$$Q_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp e^{pt} - \frac{Q_f(p)}{\varkappa(x=0, p)}, \quad \gamma = (-i\infty, i\infty). \tag{23}$$

Так что в том случае, когда $Q_2(t) \approx Q_0 \delta(t)$ близка к дельта-функции, профиль импульса скорости, распространяющегося в среде, имеет вид

$$v(x, t) = \frac{Q_0}{C_\infty(0)\, \rho(0)} \left(\frac{C_\infty(0)\, \rho(0)}{C_\infty(x)\, \rho(x)} \right)^{1/2} I\left(t, \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')} \right). \tag{24}$$

Отметим, что в случае однородной релаксационной среды (24) совпадает с точным выражением.

Таким образом, в квазиклассическом приближении распространение импульса в неоднородной среде происходит почти так же, как и в однородной среде, за исключением того, что изменение амплитуды импульса массовой скорости определяется также дополнительным множителем $(C_\infty(0)\rho(0)/C_\infty(x)\rho(x))^{1/2}$, а скорость распространения его фронта определяется выражением $v_{fr}(x) = \frac{1}{t}\int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')}$. Если рассматривать распространение импульса в сжатых координатах $X = \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')}$, то все отличие от однородной среды будет связано только с законом изменения амплитуды $\left(\frac{C_\infty(0)\rho(0)}{C_\infty(x(X))\rho(x(X))}\right)^{1/2}$.

Если бы мы интересовались не полем скоростей, а полем давлений, то, используя непосредственно представление (14б) с $G_\varphi = (y, p)$, из (17а) нетрудно получить

$$P(x, t) = \left(\frac{C_\infty(x')\rho(x')}{C_\infty(0)\rho(0)}\right)^{1/2} \int_0^t dt' Q_f(t - t') I\left(t', \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')}\right), \tag{25}$$

что при $Q_f(t) \approx Q_0\delta(t)$ дает

$$P(x, t) = Q_0 \left(\frac{C_\infty(x')\rho(x')}{C_\infty(0)\rho(0)}\right)^{1/2} I\left(t, \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')}\right). \tag{26}$$

В этой связи отметим, что произведение $P(x, t)v(x, t)$, характеризующее локальную плотность потока энергии в импульсе, определяется в квазиклассическом пределе выражением

$$P(x, t)\, v(x, t) = \frac{Q_0^2}{C_\infty(0)\rho(0)} I^2\left(t, \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')}\right).$$

Рассмотрим теперь те изменения в квазиклассическом распространении импульса, к которым приводит неоднородность в пространстве спектра времен релаксации. В этом случае необходимо использовать выражение (20). Воспользовавшись, как и прежде, малостью локальной дисперсии фазовой скорости $\Delta(x(y)) \ll 1$, для поля скорости смещения получим следующее выражение:

$$v(x, t) = \frac{1}{C_\infty(0)\rho(0)} \left(\frac{C_\infty(0)\rho(0)}{C_\infty(x')\rho(x')}\right)^{1/2} \int_0^t dt' Q_3(t - t')\, \mathcal{T}(t', x), \tag{27}$$

где функции $\mathcal{T}(t, x)$ и $Q_3(t, x)$ определяются выражениями

$$\mathcal{T}(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp \exp\left\{pt - \int_0^x dx' K(x', p)\right\}, \tag{28}$$

$$K(x, p) = \frac{p}{C_\infty(x)} \left[1 - \frac{\Delta(x)}{\langle\tau(x)\rangle} \int_a^b \frac{g(\tau, x)}{(p + 1/\tau)} d\tau\right]^{-1/2},$$

$$Q_3(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp e^{pt} \frac{Q(p)}{\sqrt{\varkappa(0, p)\,\varkappa(x, p)}}. \tag{29}$$

Заметим, что в случае, когда СВР постоянен вдоль трассы распространения, выражение (27) полностью совпадает с (24), как этого и следовало ожидать.

За исключением небольших поправок, приводящих к зависимости эффективной

функции источника $Q_3(t, x)$ от координаты x, основное проявление неоднородности СВР вдоль трассы распространения сказывается на функции $\tilde{I}(t, x)$.

Рассмотрим детальнее отличие $\tilde{I}(t, x)$ от $I(x, t)$, к которому приводит неоднородность СВР. Как и в случае с однородным СВР, используя малость дисперсии $\Delta(x) \ll 1$, локальное волновое число $K(x, p)$ в (28) можно разложить по этому параметру. После этого для $\tilde{I}(t, x)$ имеем

$$\tilde{I}(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp \exp\left\{pt'(x) - \tilde{\beta}(x) + \int_a^b \frac{\tilde{g}(\tau, x)/\tau}{(p + 1/\tau)} d\tau\right\}, \tag{30}$$

где

$$t'(x) = t - \frac{1}{C_\infty(0)} \int_0^x dx' \frac{C_\infty(0)}{C_\infty(x')}, \quad \beta(x) = \frac{\Delta(x)}{2C_\infty(x)\langle\tau(x)\rangle},$$

$$\tilde{g}(\tau, x) = \int_0^x dx' \beta(x') g(\tau, x'), \quad \tilde{\beta}(x) = \int_0^x dx' \beta(x'). \tag{31}$$

Структурно выражение (30) полностью аналогично выражению для $I(x, t)$, только теперь параметры $\tilde{\beta}(x)$ и $\tilde{g}(\tau, x)$ зависят от координаты x.

Исследование свойств фактора $\tilde{I}(t, x)$ и его аналитическое описание можно провести аналогично тому, как оно дано в работе [16] для однородной среды и произвольного СВР.

Так, прежде всего в окрестности фронта $t'(x) \approx 0$ профиль $\tilde{I}(t, x)$ описывается выражением

$$\tilde{I}(t, x) = \exp\{-\tilde{\beta}(x)\} \left[\delta(t') + \left(\frac{\langle 1/\tilde{\tau}(x)\rangle}{t'(x)}\right)^{1/2} I_1\left(2\sqrt{t'(x)\tilde{\beta}(x)}\right) v(t'(x))\right].$$

В окрестности своего максимума тело импульса имеет асимптотику

$$\tilde{I}(t, x) = \left(\frac{\pi}{\langle\tilde{\tau}^2(x)\rangle}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(t'(x) - \langle\tilde{\tau}(x)\rangle)^2}{4\langle\tilde{\tau}^2(x)\rangle}\right\}.$$

В общем случае, для произвольных x и t для $\tilde{I}(t, x)$ может быть получено выражение, аналогичное формуле (20) работы [16], с той только разницей, что вместо локальных моментов СВР будут входить эффективные моменты СВР, в которых усреднение проводится не только по спектру, но и по пространству

$$\langle\tilde{\tau}^n(x)\rangle = \int_0^x dx' \beta(x') \int_0^b d\tau g(\tau, x') \tau^n \equiv \int_a^b d\tau \tilde{g}(\tau, x') \tau^n, \tag{32}$$

а параметр ξ^{-1} определяется выражением $\xi^{-1}(x) = t'(x)/\tilde{\beta}(x)$. В основе такого подхода лежит аппроксимация зависимости перевальной точки от параметра $\xi^{-1}(x)$. Ввиду громоздкости этого выражения здесь мы его не приводим, отсылая к работе [16].

Таким образом, приведенный анализ показывает, что в целом распространение коротких импульсов в неоднородных релаксационных средах подобно их распространению в однородных средах. Однако могут быть некоторые отличия. Так, например, если в однородной среде амплитуда предвестника экспоненциально затухает с расстоянием, то в неоднородной среде при условии существования конечного значения $\tilde{\beta}(\infty)$ амплитуда предвестника уменьшается с расстоянием до конечной величины $\exp\{-\tilde{\beta}(\infty)\}$ так, что в соответствующих средах предвестник может быть обнаружен на больших расстояниях от источника. Если существует конечное значение $\langle\tilde{\tau}^2(\infty)\rangle$, то в отличие от однородной среды (где характерная ширина тела импульса растет пропорционально корню из пройденного расстояния) на больших расстояниях профиль тела импульса перестает меняться с пройденным расстоянием. Как нетрудно видеть из (32), (16), (25), такое

поведение должно наблюдаться, например, в среде с экспоненциальным ростом скорости $C_\infty(x)$ вдоль трассы и постоянных в пространстве других параметрах.

Однако наибольший практический интерес может представлять использование температурной неоднородности трассы распространения, которую легко создавать с заранее заданными свойствами. В этом случае используется не скоростная и плотностная неоднородность среды, а пространственная неоднородность спектра времен релаксации $g(\tau, x)$. Рассмотрим этот аспект подробнее на примере единственного релаксационного механизма в среде. В этом случае СВР имеет вид $g(\tau, x) = \delta(\tau - \tau_1(x))$, где зависимость времени релаксации $\tau_1(x)$ от координаты x определяется через температурную неоднородность трассы $T(x)$ согласно закону Аррениуса

$$\tau_1(x) = \tau_0 \exp\{U_0/T(x)\}, \tag{33}$$

где U_0 — энергия активации, τ_0 — время релаксации при температурах, превышающих энергию активации.

Поскольку, как это следует из развитой выше теории, закономерности распространения импульса контролируются эффективными моментами СВР, поэтому для среды с единственным релаксационным механизмом при температурной неоднородности трассы распространения эффективные моменты СВР будут иметь вид

$$\langle \tilde{\tau}^n(x) \rangle = \frac{\Delta(0)}{2C_\infty(0)} \tau_0^{n-1} \int_0^x dx' \exp\{(n-1)\, U_0/T(x)\}. \tag{34}$$

При линейном законе изменения обратной температуры вдоль трассы распространения

$$T_0/T(x) = \alpha + x/x_0 \tag{35}$$

амплитуда предвестника, определяемая нулевым моментом СВР, убывает по экспоненциальному закону с показателем экспоненты, равным

$$\langle \tilde{\tau}^0(x) \rangle = \frac{\Delta(0)\, x_0}{2C_\infty(0)\, \tau_0} \frac{T_0}{U_0} \exp\{-\alpha U_0/T_0\} \left[1 - \exp\left\{\frac{U_0 x}{T_0 x_0}\right\}\right], \tag{36}$$

в то время как характерная ширина тела импульса, контролируемая вторым моментом СВР, растет, а его амплитуда убывает пропорционально корню из второго эффективного момента СВР

$$\langle \tilde{\tau}^2(x) \rangle = \frac{\Delta(0)}{2C_\infty(0)} \tau_0 x_0 \frac{T_0}{U_0} \exp\{\alpha U_0/T_0\} \left[\exp\left\{\frac{U_0 x}{T_0 x_0}\right\} - 1\right]. \tag{37}$$

По поводу выражений (36) и (37) заметим, что при $T_0 \ll \alpha U_0$ на достаточно больших расстояниях $x \gg x_0 T_0/U_0$ предвестник распространяется практически без затухания с амплитудой, близкой к начальной, в то время как характерная ширина тела импульса очень быстро растет, а его амплитуда убывает по экспоненциальному закону. Заметим также, что, если бы обратная температура линейно убывала бы с расстоянием (чего на конечном интервале расстояний $x < \alpha x_0$ можно достичь, оставаясь в рамках (35), при $x_0 < 0$), то закономерности в поведении предвестника и тела импульса поменялись бы местами.

Приведенный выше пример подтверждает следующую закономерность: при возрастании температуры вдоль трассы распространения характерная ширина тела импульса, если и меняется, то незначительно, в то время как при убывании температуры вдоль трассы расплывание импульса может быть чрезвычайно большим.

В этой связи рассмотрим еще один интересный с практической точки зрения

пример, когда внутри однородной среды с температурой T_0 и единственным релаксационным механизмом имеется локальная область размером Δx с небольшим отклонением температуры $|\Delta T_0| << T_0$. Исследуем влияние этой области на ширину прошедшего через нее импульса. Если бы эта область отсутствовала, то ширина импульса (первоначально близкого к дельта-функции) определялась бы выражением

$$\langle \tilde{\tau}^2 (x) \rangle = \frac{\Delta (0)\, x}{2C_\infty (0)} \tau_0 \exp \{U_0/T_0\}, \tag{38}$$

наличие же локальной области температурной неоднородности приводит к тому, что в выражении (38) вместо x следует писать $x - \Delta x [1 - \exp \{-U_0 \Delta T_0/T_0^2\}]$. Откуда следует, что при небольших размерах области $\Delta x << x$ и малом различии температур $|\Delta T_0/T_0| << T_0/U_0 << 1$ ширина тела импульса изменится незначительно. При более значительной разнице температур $|\Delta T_0/T_0| < T_0/U_0$ такое же поведение будет наблюдаться, если неоднородная область нагрета $\Delta T_0 > 0$. Если же температурная область охлаждена $\Delta T_0 < 0$, то это может привести к весьма существенному увеличению ширины импульса, которая в этом случае пропорциональна $x + \Delta x \exp \{U_0 |\Delta T_0|/T_0^2\}$.

На этой основе может быть реализована методика дистанционного импульсного акустического контроля температуры среды, если, скажем, требуется, чтобы температура среды была не ниже заданной. В этом случае при условии $T_0 << U_0$ даже небольшие локальные понижения температуры легко можно диагностировать по существенному увеличению ширины импульса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по высшей школе Российской Федерации в рамках гранта № 2-112-26-47 и в рамках межвузовской научно-технической программы «ФИЗМАТ».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Теория и методы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1983.
3. *Новик А., Берри Б.* Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975.
4. *Кондратьев О. К.* Сейсмические волны в поглощающих средах. М.: Наука, 1986.
5. *Нигул У. К.* Нелинейная акустодиагностика. Л.: Судостроение, 1981.
6. *Вайнштейн Л. А.* Распространение импульсов//УФН. 1976. Т. 118. № 2. С. 339—367.
7. *Кельберт М. Я., Сазонов И. А.* Распространение импульсов в жидкостях. М.: Наука, 1991.
8. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
9. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982.
10. *Зверев И. К.* Распространение возмущений в вязкоупругом и вязкопластичном стержне//ПММ. 1950. Т. 14. С. 295—302.
11. *Morrison J. A.* Wave propagation in rods of Voigt material and visco-elastic materials with three parameter models//Quart. Appl. Math. 1956. V. 14. № 2. P. 152—169.
12. *Achenbach J. D., Chao C. C.* A three parameter visco-elastic model particulary suited for dynamic problems//J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. P. 245—252.
13. *Дунин С. З.* Распространение волн в слабо диспергирующих средах//ПМТФ. 1986. № 1. С. 138—141.
14. *Нигул У. К.* Аналитическое решение одномерной обратной задачи импульсной акустодиагностики наследственной среды//Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984.
15. *Дунин С. З., Максимов Г. А.* Распространение импульсов в средах с малой дисперсией скоростей и спектром времен релаксации $1/\tau$. Точное решение//ПММ. 1990. Т. 54. №3. С. 480—484.
16. *Дунин С. З., Максимов Г. А.* Распространение импульсов в средах, обладающих спектром времен релаксации//Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 6. С. 1048—1055.
17. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир, 1981.
18. *Равасоо А. А.* Распространение одномерных волн в неоднородной наследственно упругой среде с *E*-памятью//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 147—152.
19. *Нигул У. К., Равасоо А. А.* Нестационарные продольные волны в линейных неоднородных средах с *Ei*-памятью//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 66—74.
20. *Варламов В. В., Нестеров А. В.* Асимптотическое представление решения задачи о распространении

акустических волн в неоднородной сжимаемой релаксирующей среде//ЖВМиМФ. 1990. Т. 30. № 5. С. 705—715.
21. *Nigul U.* The modified theory of viscoelasticity: Preprint Tallinn: Academy of Sciences of Estonian SSR. 1983.
22. *Коган С. Я.* Краткий обзор теорий поглощения сейсмических волн//Изв. АН СССР. Физика Земли 1966. Т. 11. С. 3—16.
23. *Гуревич Г. И.* Деформируемость сред и распространение сейсмических волн. М.: Наука, 1974.
24. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
25. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
26. *Шемякин Е. И.* Задача Лэмба для среды с упругим последействием//Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 2. С. 193—196.
27. *Дунин С. З., Максимов Г. А.* Распространение волн Рэлея в диссипативных средах. Линейный источник//ПМТФ. 1988. № 3. С. 141—149.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию 14.01.93

G. A. Maksimov

SHORT ACOUSTIC PULSES PROPAGATION IN INHOMOGENEOUS RELAXATION MEDIA

A consistent approach to the description of plane pulses propagation in inhomogeneous relaxation media is developed in this paper. The main attention is given to short pulses propagation in relaxation media with smooth variation of its density, velocity and temperature fields along the trace. It is important to note that temperature inhomogeneity leads (according to the Arrhenius law) to spatial inhomogeneity of the relaxation time spectrum. A general pattern of pulse dynamics is established.