является вследствие малости вклада в обратное рассеяние той части волны, которая отражается от границы $x = 0$. Лишь во второй зоне, где время установления параметрического резонанса велико [1], влияние задней границы может наблюдаться при небольших толщинах слоя.

Ограниченность неоднородной среды прослеживается и при падении на нее импульсов $\tilde{\Phi}(\tau)$ конечной деятельности. Так, если M, Δ выбраны в зонах прозрачности или вблизи их границ, и импульс $\tilde{\Phi}(\tau)$ имеет длительность $\tau_i < 2l$, то в «хвосте» [1] его обратно рассеянного поля после завершения процесса релаксации могут наблюдаться осцилляции, обусловленные влиянием задней границы слоя. Если при тех же M, Δ длительность $\tau_i > 2l$ и достаточно велика, то возможно сначала при $\tau_i < 2l$ установление режима обратного рассеяния, обусловленного неоднородностями $0 < x \le l$, затем при $2l < \tau < \tau_i$ — режима рассеяния, связанного с влиянием границы $x = 0$. Наконец, когда $\tau \to \infty$ поле $\tilde{R}(\tau)$ стремится к окончательному состоянию $\tilde{R}(\tau)|_{\tau\to\infty} = 0$, переход к которому не всегда носит ярко выраженный релаксационный характер. Подчеркнем, что, как и ранее, в зонах параметрического резонанса влияние границы $x = 0$ незначительно.

В заключение укажем, что представленные численные результаты для $\tilde{R}(\tau)$ получены с точностью не хуже 0,15—1%, а для функции Грина $\Psi_l(\tau)$ — не хуже 0,05—0,1% (относительная ошибка).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гулин О. Э., Темченко В. В.* Рассеяние импульсов на периодически неоднородных средах. Результаты численного моделирования//Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 450—455.
2. *Гулин О. Э., Темченко В. В.* О некоторых аналитических решениях одномерной задачи рассеяния временных импульсов на слое неоднородной среды//Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 4. С. 644—648.
3. *Кляцкин В. И., Кошель К. В.* Численное моделирование распространения волн в периодических средах//ЖЭТФ. 1983. Т. 84. № 6. С. 2092—2098.
4. *Гулин О. Э., Темченко В. В.* К вопросу о распространении волн в одномерной среде с пространственно-временными периодическими неоднородностями//Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 1. Деп. в ВИНИТИ. № 9039, В88.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВО Российской академии наук

Поступило в редакцию 30.12.92

УДК 534.001.24:536—36

© 1993 г. Д. А. Денисов

СКОРОСТЬ ЗВУКА В РАСТВОРАХ, СОДЕРЖАЩИХ НЕСКОЛЬКО РАСТВОРЕННЫХ КОМПОНЕНТОВ: РАСЧЕТ ПО ДАННЫМ О РАСТВОРАХ, СОДЕРЖАЩИХ ПО ОДНОМУ РАСТВОРЕННОМУ КОМПОНЕНТУ

Задача расчета скорости звука в растворе, содержащем несколько растворенных компонентов, называемом в дальнейшем смешанным раствором (таким раствором, очевидно является и морская вода), по данным о бинарных подсистемах, содержащих растворитель и один из растворенных компонентов, привлекала внимание многих исследователей (см., например, [1, 2]).

Известное соотношение, связывающее значение скорости звука с термодинамическими величинами: плотностью ρ и адиабатным коэффициентом сжимаемости β_S [1, 2]

$$a = (\beta_S \rho)^{-1/2}, \tag{1}$$

указывает на возможность расчета a с помощью методов физической химии и химической термодинамики, используемых для нахождения свойств растворов. Так, уже в течение многих лет значение скорости звука в смешанных растворах электролитов рассчитывают по данным о бинарных подсистемах, подобно многим другим свойствам, с помощью правила ионной силы [1—3]. Однако, как отмечалось автором [4], применение указанного правила является обоснованным лишь при описании очень разбавленных растворов, поскольку является следствием первого приближения теории Дебая — Хюккеля [5]. Другие же приближения, применимые для более концентрированных растворов, в частности второе приближение теории Дебая — Хюккеля, при описании смешанных растворов электролитов уже не могут ограничиться лишь одной переменной — ионной силой [6].

Иная возможность расчета свойств смешанных растворов по данным о бинарных подсистемах не связана со статистическим описанием систем заряженных частиц, а основана на модели идеальных растворов или на модели идеальных изопиестических растворов [7—9]. В последней, в отличие от модели идеальных растворов, не пренебрегается взаимодействиями между растворителем и растворенным компонентом. Однако предполагается, что растворенные компоненты смешанного раствора могут рассматриваться как идеальная смесь растворенных компонентов бинарных подсистем, имеющих

то же значение химического потенциала растворителя μ_W, что и смешанный раствор. Иначе говоря, смешанный раствор может рассматриваться как идеальная смесь бинарных подсистем, находящихся в изопиестическом равновесии со смешанным раствором, т. е. имеющих то же самое значение μ_W.

Использование модели идеальных изопиестических растворов позволяет без каких-либо дополнительных предположений рассчитывать свойства смешанных растворов лишь на основании данных о бинарных подсистемах. Очевидно, указанная модель является менее грубым приближением, чем модель идеальных растворов.

Многие смешанные растворы с большой точностью описываются моделью идеальных изопиестических растворов. Для других смешанных растворов эта модель позволяет найти оценки значений свойств. В отличие от значений, найденных с помощью правила ионной силы, отклонение рассчитанных с использованием обсуждаемой модели значений от экспериментальных позволяет судить о взаимодействиях между растворенными компонентами [4].

Может показаться, что во всех случаях модель идеальных изопиестических растворов, как и правило ионной силы, приводит к значениям, согласующимся с экспериментальными для разбавленных растворов. Однако применяемая в настоящей работе модель удачно проявляет себя при описании растворов средних концентраций. Так, известно, что раствор, содержащий смесь электролитов разного валентного типа, в области малых концентраций, отвечающих первому приближению теории Дебая — Хюккеля, описывается соотношениями, не согласующимися с моделью идеальных изопиестических растворов [10]. Однако учет собственных размеров ионов, необходимый при описании растворов, отклоняющихся от первого приближения Дебая, приводит к уменьшению отклонений между значениями свойств, вычисляемых в соответствии с моделью идеальных изопиестических растворов и на основе первого приближения [11].

Наконец, в отличие от правила ионной силы модель идеальных изопиестических растворов применима и к растворам, содержащим смесь неэлектролитов.

Ранее было получено выражение для расчета скорости звука в растворе, содержащем два растворенных компонента. Представляется интересным получить аналогичное выражение и для случая, когда раствор содержит произвольное число растворенных компонентов, например для морской воды.

Как и в [12], будем исходить из соотношения, отвечающего модели идеальных изопиестических растворов и связывающего моляльности в смешанном и бинарных m_i^* изопиестичских растворах [4, 13]

$$m_1 (m_1^*)^{-1} + m_2 (m_2^*)^{-1} + \ldots + m_n (m_n^*)^{-1} = 1, \tag{2}$$

где n — число растворенных компонентов.

Учитывая сохранение суммарного объема при смешении изопиестических бинарных растворов [13]

$$V_{см} = V_1^* + V_2^* + \ldots + V_n^*, \tag{3}$$

где $V_{см}$, V_i^* — объемы смешанного и бинарного растворов i-го растворенного компонента, находящихся в изопиестическом равновесии, выражения [8, 9, 13]

$$V_{см} = L_{см}\rho_{см}^{-1} [1 + 10^{-3} (m_1M_1 + m_2M_2 + \ldots + m_nM_n)], \tag{4}$$

$$V_i^* = L_i^*\rho_i^{*-1} (1 + 10^{-3}m_i^*M_i), \tag{5}$$

где M_i — масса моля i-го растворенного компонента, $\rho_{см}$, ρ_i^* — плотности смешанного раствора и изопиестического бинарного раствора i-го растворенного компонента, $L_{см}$, L_i^* — массы растворителя в смешанном и бинарном изопиестических растворах, а также сохранение массы растворителя при смешении бинарных изопиестических растворов при условии (2)

$$L_{см} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n \tag{6}$$

для нелетучих растворенных компонентов, для которых имеет место равенство [3, 12]

$$m_iL_{см} = m_i^*L_i^*, \tag{7}$$

найдем

$$\frac{V_i^*}{V_{см}} = \frac{m_i}{m_i^*}\frac{\rho_{см}}{\rho_i^*}(1 + 10^{-3}m_i^*M_i)\left(1 + 10^{-3}\sum_{j=1}^{n} m_jM_j\right)^{-1}. \tag{8}$$

Использование вытекающего из (4), (5) соотношения [14]

$$\rho_{см} = \left(1 + 10^{-3}\sum_{i=1}^{n} m_iM_i\right)\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{m_j^*}\frac{1 + 10^{-3}m_j^*M_j}{\rho_j^*}\right]^{-1} \tag{9}$$

приводит к выражению

$$\frac{V_i^*}{V_{см}} = \frac{m_i}{m_i^*}(1 + 10^{-3}m_i^*M_i)\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{m_j^*}\frac{1 + 10^{-3}m_j^*M_j}{\rho_j^*}\right]^{-1}\frac{1}{\rho_i^*}. \tag{10}$$

Подстановка последнего в легко доказываемые соотношения для изотермического коэффициента сжимаемости смешанного раствора $\beta_{T\text{см}}$ и коэффициента расширения смешанного раствора $\alpha_{\text{см}}$

$$\beta_{T\,\text{см}} = V_{\text{см}}^{-1}\,(V_1^*\beta_{T1}^* + V_2^*\beta_{T2}^* + \ldots + V_n^*\beta_n^*), \tag{11}$$

$$\alpha_{\text{см}} = V_{\text{см}}^{-1}\,(V_1^*\alpha_1^* + V_2^*\alpha_2^* + \ldots + V_n^*\alpha_n^*), \tag{12}$$

где β_{Ti}^*, α_i^* — изотермический коэффициент сжимаемости и коэффициент расширения изопиестического бинарного раствора i-го растворенного компонента, приводит к соотношениям [12, 15]:

$$\beta_{T\,\text{см}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m_i^*}\,\frac{1 + 10^{-3}m_i^*M_i}{\rho_i^*}\,\beta_{Ti}^*\Big)\,\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{m_j^*}\,\frac{1 + 10^{-3}m_j^*M_j}{\rho_j^*}\Big)^{-1}, \tag{13}$$

$$\alpha_{\text{см}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m_i^*}\,\frac{1 + 10^{-3}m_i^*M_i}{\rho_i^*}\,\alpha_i^*\Big)\,\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{m_j^*}\,\frac{1 + 10^{-3}m_j^*M_j}{\rho_j^*}\Big)^{-1}. \tag{14}$$

Учитывая связь между адиабатным коэффициентом сжимаемости β_S и изотермическим коэффициентом сжимаемости β_T [7]

$$\beta_S = \beta_T - \alpha^2 VT\tilde{C}_p^{-1}, \tag{15}$$

где T — температура, V, α, $\tilde{C}_p$ — объем, коэффициент расширения и теплоемкость всей массы рассматриваемой системы, и соотношение, связывающее теплоемкости смешанного раствора и изопиестического бинарного раствора i-го растворенного компонента, приходящиеся на единицу массы растворителя $C_{p\,\text{см}}$ и C_{pi}^* соответственно,

$$C_{p\,\text{см}} = m_1\,(m_1^*)^{-1}\,C_{p1}^* + \ldots + m_n\,(m_n^*)^{-1}\,C_{pn}^*, \tag{16}$$

где значения $C_{p\,\text{см}}$ и C_{pi}^* могут быть выражены через теплоемкости смешанного раствора и изопиестического бинарного раствора i-го растворенного компонента, приходящиеся на единицу массы всего раствора $C_{p\,\text{см}}'$, $C_{pi}^{*\prime}$

$$C_{p\,\text{см}} = C_{p\,\text{см}}'\,[1 + 10^{-3}\,(m_1M_1 + \ldots + m_nM_n)], \tag{17}$$

$$C_{pi}^* = C_{pi}^{*\prime}\,(1 + 10^{-3}m_i^*M_i), \tag{18}$$

найдем выражения для адиабатного коэффициента сжимаемости смешанного раствора $\beta_{S\text{см}}$

$$\beta_{S\,\text{см}} = \Big(\sum_{t=1}^{n} \frac{m_t}{m_t^*}\,\frac{1 + 10^{-3}m_t^*M_t}{\rho_t^*}\Big)^{-1}\Big\{\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{m_j^*}\times$$
$$\times\,\frac{1 + 10^{-3}m_j^*M_j}{\rho_j^*}\,\beta_{Sj}^* + T\Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{m_k^*}\Big(\frac{1 + 10^{-3}m_k^*M_k}{\rho_k^*}\Big)^2\times$$
$$\times\,\frac{\alpha_k^{*2}}{C_{pk}^*} - \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m_i^*}\,\frac{1 + 10^{-3}m_i^*M_i}{\rho_i^*}\,\alpha_i^*\Big)^2\Big(\sum_{u=1}^{n} \frac{m_uC_{pu}^*}{m_u^*}\Big)^{-1}\Big]\Big\}, \tag{19}$$

где β_{Si}^* — адиабатный коэффициент сжимаемости изопиестического бинарного раствора i-го растворенного компонента.

Чтобы облегчить дальнейшие преобразования, рассмотрим выражение

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{m_k^*}\Big(\frac{1 + 10^{-3}m_k^*M_k}{\rho_k^*}\Big)^2\frac{\alpha_k^{*2}}{C_{pk}^*} - \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{m_j^*}\times$$
$$\times\,\frac{1 + 10^{-3}m_j^*M_j}{\rho_j^*}\,\alpha_j^*\Big)^2\Big(\sum_{t=1}^{n} \frac{m_t}{m_t^*}\,C_{pt}^*\Big)^{-1}. \tag{20}$$

Его нетрудно привести к виду

$$\Big\{\sum_{t\neq l}\sum \frac{m_tm_l}{m_t^*m_l^*}\Big(\frac{1 + 10^{-3}m_t^*M_t}{\rho_t^*}\Big)^2\frac{\alpha_t^{*2}}{C_{pt}^*}\,C_{pl}^* - 2\sum_{j\neq k}\sum \frac{m_jm_k}{m_j^*m_k^*}\times$$
$$\times\,\frac{1 + 10^{-3}m_j^*M_j}{\rho_j^*}\,\frac{1 + 10^{-3}m_k^*M_k}{\rho_k^*}\,\alpha_j^*\alpha_k^*\Big\}\Big(\sum_{u=1}^{n} \frac{m_u}{m_u^*}\,C_{pu}^*\Big)^{-1} \tag{21}$$

и затем преобразовать к виду

$$\sum_{t\neq l}\sum \frac{m_t}{m_t^*}\frac{m_l}{m_l^*}C_{pt}^*C_{pl}^*\Big[\Big(\frac{1+10^{-3}m_t^*M_t}{\rho_t^*}\Big)^2\frac{\alpha_t^{*2}}{C_{pt}^{*2}}+$$

$$+\Big(\frac{1+10^{-3}m_l^*M_l}{\rho_l^*}\Big)^2\frac{\alpha_l^{*2}}{C_{pl}^{*2}}-2\frac{1+10^{-3}m_t^*M_t}{\rho_t^*C_{pt}^*}\times$$

$$\times\frac{1+10^{-3}m_l^*M_l}{\rho_l^*C_{pl}^*}\alpha_t^*\alpha_l^*\Big]\Big(\sum_{u=1}^{n}\frac{m_u}{m_u^*}C_{pu}^*\Big)^{-1}. \qquad (22)$$

Теперь соотношение* (19) примет вид:

$$\beta_{S\,\text{см}}=\Big(\sum_{t=1}^{n}\frac{m_t}{m_t^*}\frac{1+10^{-3}m_t^*M_t}{\rho_t^*}\Big)^{-1}\Big\{\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{m_j^*}\times$$

$$\times\frac{1+10^{-3}m_j^*M_j}{\rho_j^*}\beta_{Sj}^*+T\sum_{u\neq l}\sum\frac{m_um_l}{m_u^*m_l^*}C_{pu}^*C_{pl}^*\times$$

$$\times\Big(\frac{1+10^{-3}m_u^*M_u}{\rho_u^*C_{pu}^*}\alpha_u^*-\frac{1+10^{-3}m_l^*M_l}{\rho_l^*C_{pl}}\alpha_l^*\Big)^2\Big\}\Big(\sum_{g=1}^{n}\frac{m_g}{m_g^*}C_{pg}^*\Big)^{-1}. \qquad (23)$$

Используя (1), найдем выражение для скорости звука в смешанном растворе $a_{\text{см}}$:

$$a_{\text{см}}^{-2}=\Big(\sum_{t=1}^{n}\frac{m_t}{m_t^*}\frac{1+10^{-3}m_t^*M_t}{\rho_t^*}\Big)^{-2}\Big(1+10^{-3}\sum_{l=1}^{n}m_lM_l\Big)\times$$

$$\times\Big\{\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{m_k^*}\frac{1+10^{-3}m_k^*M_k}{\rho_k^{*2}}a_k^{*-2}+T\sum_{u\neq l}\sum\frac{m_um_l}{m_u^*m_l^*}C_{pu}^*C_{pl}^*\times$$

$$\times\Big(\frac{1+10^{-3}m_u^*M_u}{\rho_u^*C_{pu}^*}\alpha_u^*-\frac{1+10^{-3}m_l^*M_l}{\rho_l^*C_{pl}^*}\alpha_l^*\Big)^2\Big\}\Big(\sum_{g=1}^{n}\frac{m_gC_{pg}^*}{m_g^*}\Big)^{-1}, \qquad (24)$$

где a_i^* — скорость звука в изопиестическом бинарном растворе i-го растворенного компонента, которое при $n=2$ совпадает с полученным ранее для этого n выражением [12], если в последнем учесть правильное значение показателя степени при первом множителе, равное —2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Satyavati A. V.* Ultrasonic behaviour in simple and complex ternary systems of electrolytes//Acustica. 1967/68. V. 19. № 6. P. 350—354.
2. *Шихеева Л. В., Михайлов И. Г., Савина Л. И.* Исследование температурной зависимости сжимаемости смешанных растворов электролитов//Вестн. ЛГУ. Сер. физика, химия. Вып. 2. 1981. № 10. С. 25—28.
3. *Vilcu R., Simion A.* Acoustic and Volumetric properties of aqueous salt solutions//Rev. Roum. Chim. 1976. V. 21. № 1. P. 3—9.
4. *Киргинцев А. Н.* Очерки о термодинамике водно-солевых систем. Новосибирск: Наука, 1976.
5. *Робинсон Р., Стокс Р.* Растворы электролитов. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 646 с.
6. *Rasaiah J. C.* Computations for higher valence electrolytes in the restricted primitive model//J. Chem. Phys. 1972. V. 56. № 6. P. 3071—3088.
7. *Михайлов И. Н., Соловьев В. А., Сырников Ю. П.* Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964. 514 с.
8. *Фролов Ю. Г., Денисов Д. А.* О возможности использования закона Здановского в термодинамике смешанных растворов электролитов. М.: МХТИ им. Д. И. Менделеева, 1980. Вып. III. С. 102—115.
9. *Денисов Д. А., Фролов Ю. Г.* Смешанный раствор, подчиняющийся правилу Здановского — идеальная смесь изопиестических бинарных растворов//ЖФХ. 1990. Т. 64. № 1. С. 222—224.
10. *Михайлов В. А.* К термодинамике смешанных растворов электролитов//ЖФХ. 1968. Т. 42. № 10. С. 2663—2666.
11. *Денисов Д. А.* Расчет термодинамических функций кулоновских систем, содержащих не менее трех видов заряженных частиц//Физика жидкого состояния. Киев: Наук. думка, 1989. Вып. 17.
12. *Денисов Д. А.* Расчет скорости звука в смешанных растворах, содержащих несколько

растворенных компонентов, по данным о бинарных растворах//Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 772—773.
13. *Здановский А. Б.* Закономерности в изменениях свойств смешанных растворов//Тр. соляной лаборатории АН СССР, 1936. Вып. 6. С. 570.
14. *Денисов Д. А.* Расчет плотности смешанных растворов, подчиняющихся правилу Здановского. М.: МХТИ им. Д. И. Менделеева, 1985. Вып. 136. С. 129—136.
15. *Денисов Д. А.* Расчет коэффициентов расширения смешанных растворов, подчиняющихся правилу Здановского. М.: МХТИ им. Д. И. Менделеева, 1989. Вып. 158. С. 165—174.

Московский химико-технологический
институт им. Д. И. Менделеева

Поступило в редакцию
28.12.91

После исправления
30.12.92

УДК 534.21.1

© 1993 г. В. М. Кузькин

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ РЕФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ОБЛАСТИ ПОЛЯРНОЙ ФРОНТАЛЬНОЙ ЗОНЫ БАРЕНЦЕВА МОРЯ

На структуру и динамику водных масс океана, как показывают исследования последних лет, заметное влияние могут оказывать фронтальные зоны (ф. з.) [1]. Одним из проявлений ф. з. является вызванная ими горизонтальная (боковая) рефракция звуковых лучей, которая может быть положена в основу разработки акустического метода диагностики фронтов. В данной работе приводятся оценки угловых отклонений лучей в горизонтальной плоскости и вариации времен распространения, обусловленные океаническими фронтами.

Поскольку влияние ф. з. на условия распространения звука чрезвычайно велико, а информация об их пространственной структуре в настоящее время весьма скудная, целесообразно параметризовать фронтальный раздел, а значит, и вносимые им искажения поля скорости звука, опираясь на такие глобальные его параметры, как ширина, максимальный перепад температуры и глубина проникновения ф. з. В рамках такой малопараметрической модели можно получить ряд полезных результатов, касающихся влияния различных параметров ф. з. на прохождение звука, и оценить по порядку величины изменения фазового фронта и групповые задержки сигнала.

Гидрологическая структура ф. з., как показано в [1, 2], подвержена значительной пространственно-временной изменчивости. Поэтому анализ ее влияния на распространение звука должен привязываться к району проводимых исследований. Для составления представления о возможных оценках горизонтальной рефракции и связанных с ней эффектов можно отвлечься от тонкой структуры и топографической привязки ф. з. и рассмотреть ее влияние на примере простой модели фронтального водораздела, отвечающей линейному изменению температуры с глубиной.

Наибольшими контрастами в свойствах разделяемых водных масс северных морей, как известно, отличается полярная ф. з. Так, например, в западной части Баренцева моря, где полярная ф. з. наиболее стационарна и наблюдается круглый год, характерный горизонтальный градиент температуры оценивается как 0,3 град/км при ширине фронта $L \approx 10$ км, перепад температуры по глубине ($H \approx 300$ м) составляет в среднем $\Delta T \approx 4°$ [2]. Вне расположения ф. з. распределение поля температуры (и солености) можно полагать неизменным в горизонтальной плоскости. Значение температуры и солености на горизонте дна считаются постоянными. Соответствующие такой модели характеристики распределения скорости звука

$$c(z, \mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r})\,[1 - \varkappa(\mathbf{r})\,z], \tag{1}$$

где

$$c_0(\mathbf{r}) = c_* + a\mathbf{r}, \quad \varkappa(\mathbf{r}) = \varkappa_* + b\mathbf{r}, \quad 0 \le |\mathbf{r}| \le L,$$

в направлении $\mathbf{r}$ нормали к линии фронта по порядку величины равны $c_* = 1480$ м/с, $a = 1{,}38$ м/км·с, $\varkappa_* = 4{,}14 \cdot 10^{-5}$ 1/м, $b = 3{,}04 \cdot 10^{-6}$ 1/км·м, при этом $c(r, H) = c(H) = \mathrm{const}$.

В рамках теории возмущений для лучей метод геометрической оптики для угла прихода β_m луча в горизонтальной плоскости, отвечающего m-й моде, дает следующее выражение [3]:

$$\beta_m = \left(\frac{1}{2Rf_{0m}}\right) \left|\int_0^R s\nabla_\perp \tilde{f}_m(s)\,ds\right|. \tag{2}$$

Здесь f_{0m} — невозмущенное значение квадрата собственных чисел; $\nabla_\perp \tilde{f}_m$ — поперечный (по отношению к невозмущенному лучу) градиент возмущения $\tilde{f}_m$; R — продольный размер горизонтальный неоднородности. Ин-