АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 5

УДК 534.2:517.9

© 1993 г. В. А. Буров, О. Д. Румянцева

# РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ. II. ОБЛАСТЬ ЭФФЕКТИВНОГО ПРИМЕНЕНИЯ

В статье анализируются особенности практической реализации алгоритма, позволяющего реконструировать пространственную структуру двумерного рассеивателя средней силы в монохроматическом режиме зондирования. Алгоритм применим как для рассеивателей без поглощения, так и для поглощающих рассеивателей. Оценивается диапазон частот зондирующих волн, в котором результаты реконструкции являются наиболее достоверными. Исследуется роль избыточности данных рассеяния: при учете перерассеяний коэффициент избыточности определяется квадратом (для двумерной задачи) учитываемой кратности рассеяния. Обсуждается простая процедура стабилизации решения по отношению к помехам, имеющим двоякую природу: естественный шумовой фон и принципиальную инфинитность пространственного спектра рассеивателя конечных размеров. Оцененная среднеквадратичная относительная ошибка реконструкции рассеивателя уменьшается при учете перерассеяний по сравнению с борновским приближением благодаря сильной избыточности в данных.

Решение обратных задач потенциального рассеяния и обратных волновых задач представляет из себя многогранную проблему как математической, так и прикладной физики. В последние годы наблюдалось стремление получить функциональные соотношения и разработать подходы, пригодные для решения обратных задач рассеяния различной физической природы, в том числе для решения изоэнергетических (монохроматических) обратных задач [1, 2]. Исследования такого рода базируются на использовании методов современного функционального анализа и теории функций многих комплексных переменных, отличаясь высокой математической строгостью и общностью полученных результатов. Вместе с тем анализ возможности применения на практике всего этого круга новых идей для решения конкретных волновых задач, судя по существующей литературе, пока еще не начат. Поэтому на настоящем этапе актуальна детальная проработка общих идей и методов функционально-аналитических подходов, развивавшихся в чисто математическом плане, с целью применения их к конкретным волновым, и в частности акустическим обратным задачам рассеяния.

В настоящей работе суммируются результаты анализа физического смысла, перспективности практической реализуемости и пределов применимости алгоритма восстановления двумерных акустических рассеивателей. С одной стороны, этот алгоритм оперирует с монохроматическими данными рассеяния, а потому он может быть также использован для решения обратных задач потенциального рассеяния определенного класса. С другой стороны, алгоритм отражает принципиально важные особенности решения обратных двумерных задач акустического рассеяния томографического типа и удобен для последующего внедрения. Постановка рассматриваемой в работе задачи заключается в следующем. В безграничном однородном пространстве имеется финитная область, содержащая рассеиватель, который описывается скалярной функцией $v(\mathbf{x})$. Рассеиватель последовательно зондируется со всех направлений плоской монохроматической волной $\exp(i\mathbf{kx})$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор падающего поля.

Требуется восстановить пространственную структуру рассеивающей неоднородности на основе измерения рассеянного во всех направлениях поля, которое в дальней зоне однозначным образом связано с амплитудой рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, где $\mathbf{l}$ — волновой вектор рассеянного поля в дальней зоне. С математической точки зрения, решение задачи связано с восстановлением функционального коэффициента $v(\mathbf{x})$ в уравнении для полного акустического поля $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) : \Delta\psi + \mathbf{k}^2\psi = v(\mathbf{x})\,\psi$. В [1, 2] разработан алгоритм реконструкции $v(\mathbf{x})$ в двумерном случае. Основополагающие моменты создания алгоритма и физический смысл всех фигурирующих в алгоритме функциональных величин подробно обсуждены в [3]. Центральная идея состоит в следующем. В условиях реального эксперимента, если затуханием волн в фоновой среде можно пренебречь, волновые векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ считаются действительными величинами. В то же время математически можно осуществить переход от действительных $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ к фиктивным комплексным волновым векторам. При этом, поскольку речь идет о монохроматической задаче, квадрат волнового вектора должен оставаться неизменной величиной:

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{l}^2 = k_0^2, \quad \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^2, \tag{1}$$

где $k_0$ — волновое число зондирующего поля в фоновой среде. Далее устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных волновых векторов и точками так называемой $\lambda$ — плоскости, что облегчает аргументацию и вывод алгоритма. Именно в терминах $\lambda$-плоскости рассматриваются в [3] волновые векторы — аргументы функциональных величин, фигурирующих в алгоритме. В настоящей же работе целесообразно привести основные соотношения алгоритма, используя в качестве аргументов функций более привычные для физиков переменные: $\varphi$ — угол падения зондирующей волны; $\varphi'$ — угол, характеризующий направление приема рассеянного поля; $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv f(\varphi, \varphi')$; вектор $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ в декартовой системе координат.

На основе экспериментально определяемой амплитуды рассеяния $f(\varphi, \varphi')$ находятся функции $h^{\pm}(\varphi, \varphi')$:

$$h^{\pm}(\varphi, \varphi') - \pi i \int_0^{2\pi} h^{\pm}(\varphi, \varphi'')\,\theta\,[\pm \sin(\varphi'' - \varphi)]\, f(\varphi'', \varphi')\, d\varphi'' = f(\varphi, \varphi') \tag{2}$$

($\theta$ — функция Хевисайда) и строится функция $f_1(\varphi, \varphi')$:

$$f_1(\varphi, \varphi') = \theta\,[-\sin(\varphi' - \varphi)]\, h^{+}(\varphi, \varphi') - \theta\,[\sin(\varphi' - \varphi)]\, h^{-}(\varphi, \varphi'). \tag{3}$$

Далее вычисляются функция $\rho(\varphi, \varphi')$ и функция $K(\mathbf{x}, k) = K(\mathbf{x}, \varphi)$, являющаяся характеристикой поля внутри рассеивателя:

$$\rho(\varphi, \varphi') + \pi i \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi'')\,\theta\,[-\sin(\varphi'' - \varphi')]\, f_1(\varphi'', \varphi')\, d\varphi'' = -\pi i f_1(\varphi, \varphi'), \tag{4}$$

$$K(\mathbf{x}, \varphi) = \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') \exp\left[i k_0 \{x_1(\cos\varphi' - \cos\varphi) + x_2(\sin\varphi' - \sin\varphi)\}\right] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(\mathbf{x}, \varphi'')}{1 - e^{i(\varphi' - \varphi'')}(1 + 0)}\, d\varphi''\right] d\varphi'. \tag{5}$$

Наконец, восстанавливается $v(\mathbf{x})$ в любой отдельно взятой точке $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{In}(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} K(\mathbf{x}, \varphi)\, e^{i\varphi}\, d\varphi, \quad v(\mathbf{x}) = -\frac{k_0}{2\pi}\left(i\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \mathrm{In}(\mathbf{x}). \tag{6}$$

Алгоритм (2)—(6) не требует обязательного применения итераций для разрешения интегральных уравнений. Алгоритм нелинеен относительно $f\,\varphi, \varphi')$ ($f(\varphi, \varphi')$ входит как в ядро интегральных операторов, так и в правую часть уравнений (2),

(4)) из-за многократного рассеяния волн. В то же время алгоритм линеен относительно $v(\mathbf{x})$, входящей только в (6), что свидетельствует об имеющей, в конечном счете, место компенсации эффектов многократного рассеяния. Подобная компенсация справедлива для рассеивателей $v(\mathbf{x})$, чей пространственный спектр $\tilde{v}(\xi)$ локализован строго внутри круга радиуса $2k_0/m$, где $m$ — число учитываемых актов рассеяния волны [3]. Для рассеивателя же с финитным носителем алгоритм (2)—(6) становится приближенным: пространственные составляющие $\tilde{v}(\xi)$ заведомо инфинитного пространственного спектра такого рассеивателя при $|\xi| \geq 2k_0/m$ нарушают, в большей или меньшей мере, механизм компенсации, порождая одновременно рассеянное назад поле неоднородных волн [4]. Для слабых $v(\mathbf{x})$ с финитным носителем алгоритм (2)—(6) позволяет точно воспроизвести $\tilde{v}(\xi)$ при $|\xi| < 2k_0$ и «отбрасывает» $\tilde{v}(\xi)$ при $|\xi| \geq 2k_0$. Для $v(\mathbf{x})$ средней силы с финитным носителем будут определенные искажения в воспроизведении и низкочастотной части $\tilde{v}(\xi)$. Тем не менее если интенсивность рассеянных назад неоднородных волн не будет превосходить интенсивность рассеянных назад неоднородных волн в случае борновского рассеивателя для всех ракурсов облучения, то такие искажения незначительны, и восстановление по (2)—(6) остается эффективным.

Механизм компенсации, а следовательно, и сам алгоритм справедливы для рассеивателей с поглощением, если поглощение в фоновой среде пренебрежимо мало. Действительно, в этом случае основное требование (1) не видоизменяется, так как оно относится к фоновой среде. При этом во всех используемых при выводе алгоритма уравнениях типа Липпмана—Швингера фигурировали функции Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ для фоновой среды [3], т. е. для $\mathbf{k}$, удовлетворяющих (1), что обеспечивает механизм компенсации процессов многократного рассеяния волн. Единственное условие накладывалось лишь на $\tilde{v}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^2$:

$$\tilde{v}(\xi) = (2\pi)^{-2} \int v(\mathbf{x})\, e^{-i\xi\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} = 0 \text{ при } |\xi| \geq 2k_0/m, \tag{7}$$

(7) может достаточно точно выполняться как для действительных, так и комплексных $v(\mathbf{x})$. Более того, за счет поглощения в рассеивателе энергия волнового поля внутри него меньше, чем при отсутствии поглощения. Поэтому $\operatorname{supp} \tilde{v}(\xi)$ для поглощающего рассеивателя, который предполагается восстанавливать из (2)—(6), в ряде случаев может быть даже шире, чем для непоглощающего. В то же время для активного рассеивателя, увеличивающего полную энергию волнового поля, $m$ может быть настолько велико (вплоть до $m \to \infty$), что (7) не будет удовлетворяться.

Наиболее сложной является ситуация, когда сама фоновая среда заметно поглощает или усиливает волновые поля на расстояниях порядка линейного размера рассеивателя. В этом случае необходимо пересмотреть (2)—(6), так как, во-первых, (1) будет уже неправомерно, и, во-вторых, требуется пересмотреть понятие амплитуды рассеяния, поскольку волновые векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ реальных полей в фоновой среде приобретают мнимые добавки. Более подробное исследование этого вопроса выходит за рамки настоящей работы.

**Диапазон приемлемых частот зондирования.** Ниже проведена оценка диапазона $\omega_{\text{доп}}$ допустимых значений частот $\omega$ зондирующих плоских монохроматических волн, в котором результаты реконструкции наиболее эффективны. Диапазон ограничен сверху условием (7), так как «сила» $m$ акустического рассеивателя пропорциональна $\omega^2$, а снизу — требованием томографического эксперимента: длина волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 2\pi c_0/\omega$ в фоновой среде должна быть много меньше линейных размеров рассеивателя $L_{\text{лин}}$. Таким образом, если $\Delta x_{\text{хар}}$ — минимальный линейный размер характерных деталей рассеивателя и $\Delta c$ — амплитуда флуктуаций фазовой скорости внутри рассеивателя, то из условий $2\pi/\Delta x_{\text{хар}} \lesssim 2k_0/m$, $m = A\omega^2$ ($A = \text{const}$); $\lambda_0 \ll L_{\text{лин}}$ и критерия справедливости

борновского приближения $(\Delta c/c_0)(L_{лин}/\lambda_{борн}) << 1$ $(m = 1, A = \omega_{борн}^{-2}, \lambda_{борн} = 2\pi c_0/\omega_{борн})$ имеем:

$$2\pi c_0 L_{лин}^{-1} << \omega_{доп} << 4\pi c_0^3 \Delta x_{хар} L_{лин}^{-2} (\Delta c)^{-2}. \tag{8}$$

Для медицинских приложений диапазон приемлемых с этой точки зрения частот зондирования лежит в пределах от десятков кГц до нескольких МГц. При учете формы $\tilde{v}(\xi)$ можно получить более точные границы для $\omega_{доп}$. Действительно, в $m$-м порядке пространственный спектр $\tilde{F}(\xi, \mathbf{k})$ $(k \in \mathbb{C}^2)$ вторичных источников, создающих рассеянное поле неоднородных волн, описывается $m$-кратной сверткой функций $\tilde{v}(\xi)$ [4, 5]. Свертка расширяет $\operatorname{supp}_{\xi \in \mathbb{R}^2} \tilde{F}(\xi, \mathbf{k})$ в $m$ раз по сравнению с $\operatorname{supp} \tilde{v}(\xi)$ и перераспределяет энергию, концентрируя ее в области малых $|\xi|$. Поэтому при $m > 1$ $\tilde{v}(\xi)$ может быть шире, чем это допускается условием (7), и диапазон $\omega_{доп}$ будет шире, чем (8), за счет повышения верхней границы.

**Вопросы дискретизации и избыточности данных рассеяния.** При съеме данных рассеяния $f(\varphi, \varphi')$ необходимо знать максимально допустимые шаги дискретизации $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi'$ углов $\varphi$ и $\varphi'$. Рассмотрим сначала идеализированную ситуацию, когда отсутствуют естественные шумовые помехи, и можно считать, что $\tilde{v}(\xi) \approx 0$ при $|\xi| \geq s$. По физическому смыслу $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ при каждом фиксированном $\mathbf{k}$ представляет собой излучающую часть пространственного спектра $\tilde{F}(\xi, \mathbf{k})$ вторичных источников $F(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = v(\mathbf{x})\, U(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, $k \in \mathbb{R}^2$:

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = (2\pi)^{-2} \int_{x \in R} v(\mathbf{x})\, U(\mathbf{x}, \mathbf{k})\, e^{-i\mathbf{l}\mathbf{x}}\, d\mathbf{x}. \tag{9}$$

Здесь R — область рассеяния, $U(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ — полное поле внутри R в классическом случае $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющее уравнению Липпмана — Швингера

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \int_{x' \in R} G^{кл}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', k_0)\, v(\mathbf{x}')\, U(\mathbf{x}', \mathbf{k})\, d\mathbf{x}', \tag{10}$$

где $G^{кл}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', k_0)$ — классическая функция Грина для фоновой однородной среды. Представление (10) в виде ряда Борна—Неймана и подстановка в (9) дают ($\tilde{G}^{кл}(\mathbf{q}, k_0)$ — пространственный спектр функции $G^{кл}(\mathbf{x}, k_0)$):

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \tilde{v}(\mathbf{l} - \mathbf{k}) + (2\pi)^2 \int_{\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^2} \tilde{G}^{кл}(\mathbf{q}_1, k_0)\, \tilde{v}(\mathbf{l} - \mathbf{q}_1)\, \tilde{v}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{k})\, d\mathbf{q}_1 + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{m=3}^{\infty} \Big[ (2\pi)^{2(m-1)} \int_{\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_1 \int_{\mathbf{q}_2 \in \mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_2 \ldots \int_{\mathbf{q}_{m-1} \in \mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_{m-1}\, \tilde{G}^{кл}(\mathbf{q}_1, k_0) \Big\{ \prod_{p=2}^{m-1} \tilde{G}^{кл}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \ldots$$

$$\ldots - \mathbf{q}_p, k_0) \Big\} \tilde{v}(\mathbf{l} - \mathbf{q}_1)\, \tilde{v}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \ldots - \mathbf{q}_{m-1} - \mathbf{k}) \Big\{ \prod_{p'=2}^{m=1} \tilde{v}(\mathbf{q}_{p'}) \Big\} \Big]. \tag{11}$$

В случае борновского рассеивателя $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \tilde{v}(\mathbf{l} - \mathbf{k})$ и измерение $f(\varphi, \varphi')$ для всех $\varphi$ и $\varphi'$ позволяет восстановить $\tilde{v}(\xi)$ для $|\xi| \leq 2k_0$ (считаем, что $s \leq 2k_0$). Поскольку $L_{лин} < \infty$, то, по теореме отсчетов, максимально допустимый шаг дискретизации $\Delta\xi$ функции $\tilde{v}(\xi = \mathbf{l} - \mathbf{k})$ по каждой из декартовых осей $\xi_1, \xi_2$ составляет $\Delta\xi = 2\pi/L_{лин}$. Фиксирование $\varphi$ $(\mathbf{k} = \mathbf{k}_1)$ и перебор всех $\varphi'$ дает значения $\xi = \mathbf{l} - \mathbf{k}_1$, лежащие на окружности $S_{\mathbf{k}_1}$ радиуса $k_0$ с центром в точке $-\mathbf{k}_1$ (рис. 1); при дискретизации точек на $S_{\mathbf{k}_1}$, приращение $|\Delta\xi|$, вызванное изменением $\varphi'$ на $\Delta\varphi'$, составляет $|\Delta\xi| = |\Delta(\mathbf{l} - \mathbf{k}_1)| = |\Delta\mathbf{l}| = k_0\Delta\varphi'$ и не должно превосходить $\Delta\xi$:

$$\Delta\varphi' \leq \Delta\varphi'_{max} \simeq 2\pi/(k_0 L_{лин}). \tag{12}$$

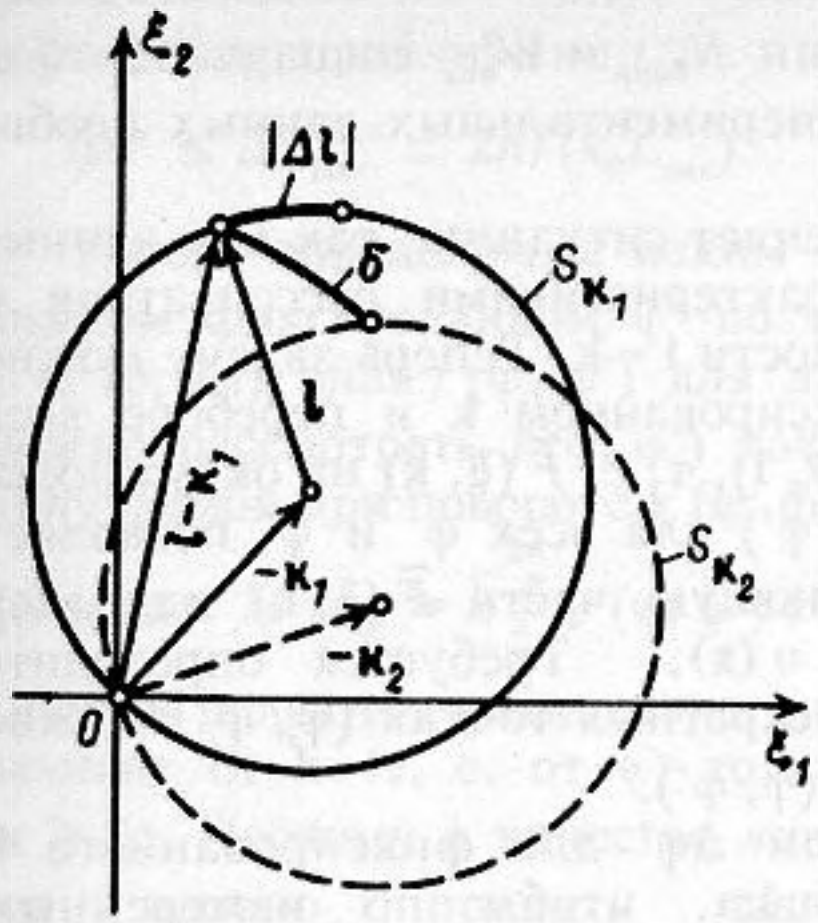


Рис. 1

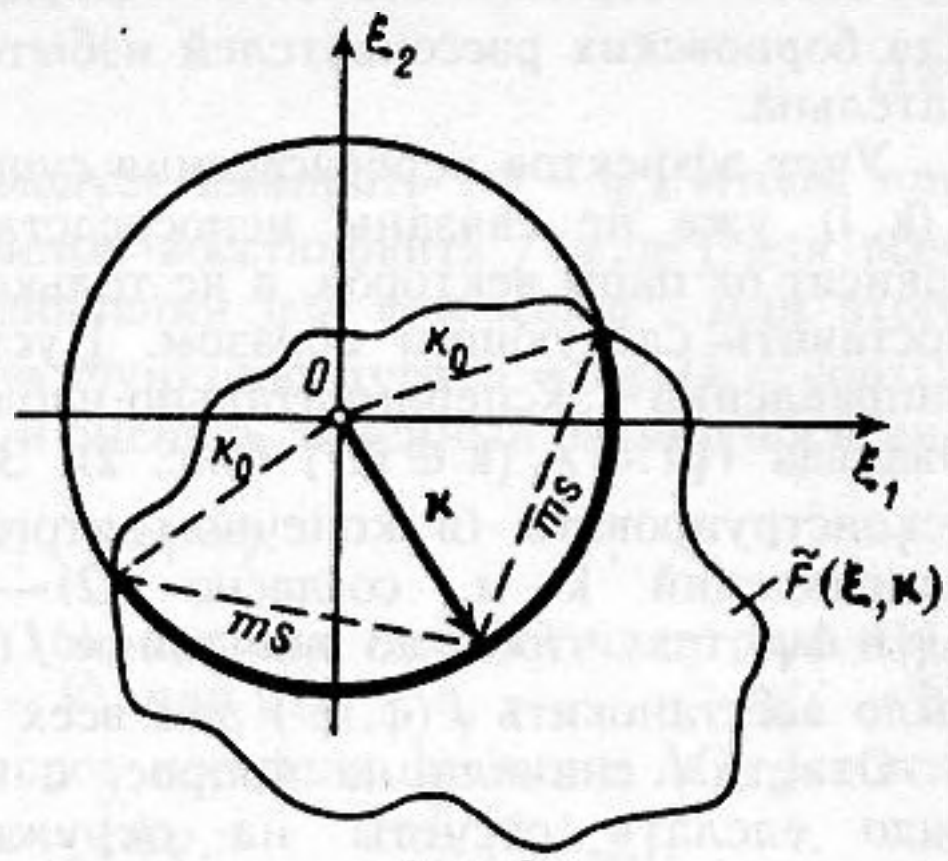


Рис. 2

Рис. 1. Дискретизация борновского рассеивателя. Декартовы оси: $\xi_1 = (1-\mathbf{k})_1$, $\xi_2 = (1-\mathbf{k})_2$. Величина $|\Delta l| = k_0\Delta\varphi'$ при фиксированном $\mathbf{k}$ определяет шаг дискретизации по углу $\varphi'$, величина $\delta \simeq |1-\mathbf{k}|\,\Delta\varphi$ при фиксированной длине $|1-\mathbf{k}| < s \le 2k_0$ — по углу $\varphi$

Рис. 2. При фиксированном $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^2$ пространственный спектр $\tilde{F}(\xi, \mathbf{k})$ полных вторичных источников измеряется на окружности Эвальда $|\xi| = k_0$. В приближении $m$-кратного рассеяния волн $\tilde{F}(\xi, \mathbf{k}) \approx 0$ при $|\xi - \mathbf{k}| \ge ms$, так как $\tilde{v}(\xi) \approx 0$ при $|\xi| \ge s$

При изменении $\varphi$ на $\Delta\varphi$ получается новый фиксированный вектор $\mathbf{k} = \mathbf{k}_2$, которому соответствует окружность $S_{\mathbf{k}_2}$. Дискретные значения вектора $\xi = 1 - \mathbf{k}_2$, принадлежащего $S_{\mathbf{k}_2}$, также выбираются согласно (12). С другой стороны, расстояние $\delta$ между дискретными точками на $S_{\mathbf{k}_1}$ и ближайшими к ним дискретными точками на $S_{\mathbf{k}_2}$ опять же не должно превосходить $\Delta\xi$; $\delta$ можно оценить как приращение $|\Delta(1-\mathbf{k})|$ пр повороте вектора $1-\mathbf{k}$ фиксированной длины $|1-\mathbf{k}|$ на $\Delta\varphi$ (рис. 1): $\delta \simeq |1-\mathbf{k}|\,\Delta\varphi$.

Поскольку априори

$$\tilde{v}(1-\mathbf{k}) \approx 0 \text{ при } |1-\mathbf{k}| \ge s, \tag{13}$$

то

$$\Delta\varphi \le \Delta\varphi_{max} \simeq 2\pi/(sL_{лин}), \tag{14}$$

так как достаточно рассмотреть только $|1-\mathbf{k}| < s \le 2k_0$. Таким образом, для восстановления $\tilde{v}(\xi)$ при $|\xi| < s \le 2k_0$ $f(\varphi, \varphi')$ дискретизуется в соответствии с (12), (14). При этом $\varphi \in [0, 2\pi)$, а $\varphi'$ изменяется в пределах угла порядка $2\pi s/(2k_0)$ при каждом фиксированном $\varphi$:

$$\varphi' \in [\varphi - 2\arcsin(s/2k_0);\ \varphi + 2\arcsin(s/2k_0)]$$

(так как в силу (13) при остальных $\varphi'$ $f(\varphi, \varphi') \approx 0$). Следовательно, с учетом теоремы взаимности имеем $N_{борн} \simeq N_\varphi N_{\varphi'}/2 \simeq (sL_{лин})^2/4$ независимых данных рассеяния, где $N_\varphi \simeq 2\pi/\Delta\varphi_{max}$, $N_{\varphi'} \simeq (2\pi s/2k_0)/\Delta\varphi'_{max}$.

Количество же независимых дискретных отсчетов в пространстве координат (и в сопряженном с ним пространстве волновых векторов), характеризующих собственно двумерный рассеиватель, составляет $W^2_{нез}$, где

$$W_{нез} = 2s/\Delta\xi = sL_{лин}/\pi, \tag{15}$$

согласно теореме отсчетов. Порядки величин $N_{\text{борн}}$ и $W^2_{\text{нез}}$ совпадают, т. е. для борновских рассеивателей избыточность экспериментальных данных необязательна.

Учет эффектов перерассеяния существенно меняет ситуацию, так как данные $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ уже не связаны непосредственно с характеристиками рассеивателя и зависят от пары векторов, а не только от их разности $\mathbf{l} - \mathbf{k}$. Теперь задачу можно поставить следующим образом. Пусть при фиксированном $\mathbf{k}$ и переборе всех направлений $\mathbf{l}$ экспериментально наблюдается $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, т. е. $\widetilde{F}(\xi, \mathbf{k})$ на окружности Эвальда $|\xi| = k_0$ ($\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$) (рис. 2). Знание $f(\varphi, \varphi')$ для всех $\varphi$ и $\varphi'$ позволяет реконструировать (в конечном итоге) неизлучающую часть $\widetilde{F}(\xi, \mathbf{k})$ для всех направлений $\mathbf{k}$ и, согласно (2)—(6),— сам $v(\mathbf{x})$. Требуется определить $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi'$ так, чтобы по значениям $f(\varphi_i, \varphi_j')$ в дискретных точках $(\varphi_i, \varphi_j')$ можно было восстановить $f(\varphi, \varphi')$ для всех остальных $(\varphi, \varphi')$.

Ответим сначала на вопрос, с каким шагом $\Delta\varphi'$ для фиксированного $\mathbf{k}$ надо сделать отсчеты на окружности Эвальда, чтобы по измеренным $f(\varphi, \varphi_j')$ для фиксированного $\varphi = \varphi_i$ и дискретных значений $\{\varphi' = \varphi_j'\}$ восстановить по теореме отсчетов $f(\varphi = \varphi_i, \varphi')$ для любого $\varphi'$? Для этого рассмотрим $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ как одномерную функцию длины дуги $a' = k'\varphi'$ ($k' = \text{const}$; $\mathbf{k}$ фиксирован). Переходя в одномерное пространство переменной $r_l$, сопряженной переменной $a'$, оценим линейный размер носителя фурье-образа $I(r_l)$ функции $f(\varphi, \varphi')$ как переменной $a'$,:

$$I(r_l) = k' \int_0^{2\pi} f(\varphi, \varphi')\, e^{ik'r_l\varphi'}\, d\varphi', \; r_l \in (-\infty, \infty). \tag{16}$$

Предполагается, что $ms \le 2k_0$ и $f(\varphi, \varphi')$ существенно отлична от нуля лишь при

$$\varphi' \in [\varphi - 2\arcsin(ms/2k_0);\; \varphi + 2\arcsin(ms/2k_0)] \tag{17}$$

(жирная дуга на рис. 2). Так как $\widetilde{G}^{\text{кл}}(\mathbf{q}, k_0)$ зависит только от $|\mathbf{k}| = k_0$, то каждый член ряда (11) зависит от $\mathbf{l}$ (т. е. от $\varphi'$) только как $\widetilde{v}(\mathbf{l} - \mathbf{k})$ или $\widetilde{v}(\mathbf{l} - \mathbf{q}_1)$. Тогда $\operatorname{supp} I(r_l) = \operatorname{supp} I_1(r_l)$, где

$$I_1(r_l) = k' \int_0^{2\pi} \widetilde{v}(\mathbf{l} - \mathbf{d})\, e^{ik'r_l\varphi'}\, d\varphi' = \int_{\mathbf{x}\in R} v(\mathbf{x})\, e^{i\mathbf{d}\mathbf{x}} I_2(\mathbf{x}, r_l)\, d\mathbf{x},$$

$$I_2(\mathbf{x}, r_l) = \frac{k'}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} e^{-i\mathbf{d}\mathbf{x} + ik'r_l\varphi'}\, d\varphi', \quad \mathbf{d} = \mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^2.$$

Переходя в полярную систему координат $\mathbf{x} = \{|\mathbf{x}|, \varphi_x\}$,

$$|\mathbf{x}| \in [-L_{\text{лин}}/2;\; L_{\text{лин}}/2], \quad \mathbf{l} = \{k_0, \varphi'\},$$

можно оценить $I_2(\mathbf{x}, r_l)$ (при $k'r_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $I_2(\mathbf{x}, r_l) \sim J_{k'r_l}(k_0|\mathbf{x}|)$ — функция Бесселя порядка $k'r_l$,) и оценить $I_1(r_l)$ как

$$|I_1(r_l)| \le v_{\max} \int_{\mathbf{x}\in R} |I_2(\mathbf{x}, r_l)|\, d\mathbf{x}; \quad v_{\max} = \max_{\mathbf{x}\in R} |v(\mathbf{x})|.$$

При этом оказывается, что, строго говоря, $\operatorname{supp} I_1(r_l)$ инфинитен. Однако так как $k_0 L_{\text{лин}} \gg 1$ ($k_0 L_{\text{лин}} \simeq 10^2 \div 10^3$), то $I_1(r_l)$ существенно отлично от нуля лишь в области $k'|r_l| < k_0 L_{\text{лин}}/2$ и очень быстро спадает при $k'|r_l| > k_0 L_{\text{лин}}/2$: $I_1(r_l = k_0 L_{\text{лин}}/2k') / I_1(r_l = k_0 L_{\text{лин}}/2k' + \Delta) \gg 1$ уже при $\Delta \simeq t/k_0$, $t$ порядка нескольких единиц. Поэтому для практических целей с большой точностью можно полагать, что $\operatorname{supp} I_1(r_l)$ и $\operatorname{supp} I(r_l)$ имеют линейный размер $(k_0/k')\, L_{\text{лин}}$. Чем больше $k_0 L_{\text{лин}}$, тем точнее это приближение. Следовательно, максимальный шаг

дискретизации $\Delta a' = k'\Delta\varphi'$ вдоль дуги равен $2\pi/[(k_0/k')\,L_{лин}]$, т. е., как и в борновском приближении,

$$\Delta\varphi' \le \Delta\varphi_{max}' \simeq 2\pi/(k_0 L_{лин}). \tag{18}$$

Теперь определим, с каким шагом $\Delta\varphi$ следует выбирать $\{\varphi - \varphi_i\}$, чтобы при каждом фиксированном $\varphi'$ по теореме отсчетов восстановить $f(\varphi, \varphi')$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$, зная $f(\varphi_i, \varphi')$ для дискретных значений $\varphi = \varphi_i$ и всех $\varphi'$. Для этого можно рассмотреть $f(\varphi, \varphi')$ как одномерную функцию дуги $a = \tilde{k}\varphi$ ($\tilde{k} = \text{const}$), получаемой при повороте $\mathbf{k}$ ($\varphi'$ фиксирован), и оценить линейный размер носителя функции $M(r_k) = \tilde{k}\int_0^{2\pi} f(\varphi, \varphi')\, e^{i\tilde{k}r_k\varphi}\, d\varphi, \quad r_k \in (-\infty, \infty)$.

Оценки делаются аналогично оценкам для (16), так как каждый член ряда (11) зависит от $\mathbf{k}$ (т. е. от $\varphi$) только как $\tilde{v}(\mathbf{l} - \mathbf{k})$ или $\tilde{v}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \ldots - \mathbf{q}_{m-1} - \mathbf{k})$ $m \ge 2$). Поэтому в качестве линейных размеров носителя функции $M(r_k)$ опять же можно принять $(k_0/\tilde{k})\,L_{лин}$, и $\Delta a = \tilde{k}\Delta\varphi \le 2\pi\tilde{k}/(k_0 L_{лин})$, т. е. $\Delta\varphi \le \Delta\varphi_{max} \simeq 2\pi/(k_0 L_{лин})$. Однако такой подход целесообразен, когда $ms \simeq 2k$. Если же $ms$ заметно меньше, чем $2k_0$, то $\Delta\varphi_{max}$ можно сделать крупнее, чем $\simeq 2\pi/(k_0 L_{лин})$, восстанавливая функцию $f(\varphi, \varphi' = \varphi + \varphi_0)$ как непрерывную по $\varphi$ величину, если известны $f(\varphi = \varphi_i, \varphi' = \varphi_i + \varphi_0)$ для дискретных $\{\varphi_i\}$ ($\varphi_0$ — произвольный фиксированный угол). Тем самым, перебирая все $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, будем знать $f(\varphi, \varphi')$ для всех $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi)$. Для оценки шага $\Delta\varphi$ при таком варианте восстановления надо оценить линейные размеры носителя функции

$$T(r_k) = \tilde{k}\int_0^{2\pi} f(\varphi, \varphi + \varphi_0)\, e^{i\tilde{k}r_k\varphi}\, d\varphi, \quad r_k \in (-\infty, \infty),$$

учитывая, что изменение $f(\varphi, \varphi' = \varphi + \varphi_0)$ как функции $\varphi$ вызывается одновременным поворотом $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ при фиксированном угле $\varphi_0$ между ними: $\mathbf{k} = \{k_0; \varphi\}$, $\mathbf{l} = \{k_0; \varphi + \varphi_0\}$ в полярной системе координат. Анализ фурье-образа первого члена ряда (11), $\tilde{v}(\mathbf{l} - \mathbf{k})$, аналогичен анализу интеграла (16) и сводится к оценке интеграла типа $I_2(\mathbf{x}, r_l)$ (но вместо $r_l$, $\varphi'$ и $\mathbf{l}$ будут соответственно $r_k$, $\varphi$ и $\mathbf{l} - \mathbf{k} = \{|\mathbf{l} - \mathbf{k}|; \varphi + (\pi + \varphi_0)/2\}$. Остальные члены в (11) зависят от $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ как $\tilde{v}(\mathbf{l} - \mathbf{q}_1)\,\tilde{v}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \ldots - \mathbf{q}_{m-1} - k)$ ($m \ge 2$), поэтому анализ соответствующего члена ряда для $T(r_k)$, по теореме о свертке сводится к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(r_k'; \mathbf{d}_1 = -\mathbf{q}_1; \mathbf{d}_2 = \mathbf{l})\, B(r_k - r_k'; \mathbf{d}_1 = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \ldots - \mathbf{q}_{m-1}; \mathbf{d}_2 = -\mathbf{k})\, dr_k',$$

где

$$B(r_k'; \mathbf{d}_1; \mathbf{d}_2) = \int_{\mathbf{x}\in R} d\mathbf{x}\, v(\mathbf{x}) \int_0^{2\pi} \exp\left[-i(\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)\,\mathbf{x} + i\tilde{k}r_k'\varphi\right] d\varphi.$$

При этом оказывается, что при фиксированном $\varphi_0$ за линейный размер $\operatorname{supp} T(r_k)$ можно принять $L_T \simeq (|\mathbf{l} - \mathbf{k}|/\tilde{k})\,L_{лин}$. А так как $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \approx 0$ (т. е. и $T(r_k) \approx 0 \forall r_k$) при $|\mathbf{l} - \mathbf{k}| \ge ms$ (см. рис. 2), то $L_T \lesssim L_T^{max} = (ms/\tilde{k})\,L_{лин}$. Тогда $\Delta a = \tilde{k}\Delta\varphi$ не должно превосходить $2\pi/L_T^{max}$, откуда

$$\Delta\varphi \le \Delta\varphi_{max} \simeq 2\pi/(ms L_{лин}). \tag{19}$$

При $m = 1$ (17)—(19) переходят в выражения для борновского приближения.

Итак, при учете процессов перерассеяния $f(\varphi, \varphi')$ следует измерять по $\varphi$ с шагом (19) в пределах $\varphi \in [0, 2\pi)$, т. е. имеем $N_\varphi \simeq 2\pi/\Delta\varphi_{max} \simeq msL_{лин}$ независимых данных по $\varphi$. Угол же $\varphi'$ изменяется с шагом (18) в пределах угла $\simeq 2\pi\,(ms/2k_0)$ (см. (17)), т. е. имеем $N_{\varphi'} \simeq (2\pi ms/2k_0)/\Delta\varphi_{max}' \simeq msL_{лин}/2$ независимых данных. Тогда, в силу теоремы взаимности, общее количество независимых данных $f(\varphi, \varphi')$ будет $N_{общ} = N_\varphi N_{\varphi'}/2$, и по порядку величины $N_{общ} \simeq m^2 W^2_{нез}$ (см. (15)). Отметим, что в случае $s \geq 2k_0/m$ $(m \geq 1)$, т. е. в случае $ms \geq 2k_0$, и $\varphi$ и $\varphi'$ изменяются в пределах $[0, 2\pi)$ с шагом $\Delta\varphi_{max} \simeq \Delta\varphi'_{max} \simeq$ $\simeq 2\pi/(msL_{лин})$; тогда $N_\varphi \simeq N_{\varphi'} \simeq msL_{лин}$ и по-прежнему $N_{общ} = N_\varphi N_{\varphi'}/2 \simeq m^2 W^2_{нез}$.

Таким образом, в отличие от борновского приближения коэффициент избыточности количества независимых экспериментальных данных составляет для двумерной задачи $\simeq m^2$; наличие этих избыточных данных необходимо для реализации алгоритма. С физической точки зрения, необходимость избыточных данных определяется тем, что для реконструкции, в конечном счете, $v(\mathbf{x})$ с шириной пространственного спектра $s$ надо восстанавливать характеристики внутреннего поля ($K(\mathbf{x}, \varphi)$ для (2)—(6)), т. е. в том или ином виде и неизлучающую часть вторичных источников, имеющих для каждого направления $\mathbf{k}$ ширину пространственного спектра $ms$. «Сужение» $\operatorname{supp} K(\xi, \varphi)$ до ширины $\operatorname{supp} \tilde{v}(\xi)$ происходит на этапе вычисления $\operatorname{In}(\mathbf{x})$ с пространственным спектром $\widetilde{\operatorname{In}}(\xi)$, так как $\operatorname{supp} \tilde{v}(\xi) = \operatorname{supp} \widetilde{\operatorname{In}}(\xi)$ (см. 6):

$$\tilde{v}(\xi) = -(k_0/2\pi)\,(-\xi_1 + i\xi_2)\,\widetilde{\operatorname{In}}(\xi). \tag{20}$$

Численная же реализация интегрирования в (6) требует знания $K(\mathbf{x}, \varphi)$ в дискретных отсчетах по $\varphi$ тем чаще, чем больше $ms$.

Избыточность данных ослабляет эффекты неустойчивости, имеющие место, когда $\operatorname{supp} \tilde{F}(\xi, \mathbf{k})$ (при фиксированном $\mathbf{k}$) существенно шире, чем $\operatorname{supp} \tilde{v}(\xi)$. В двумерной монохроматической задаче компенсация эффектов неустойчивости может происходить за счет требования (7), т. е. уменьшения допустимой ширины $\operatorname{supp} \tilde{v}(\xi)$ по мере роста $m$; если же $\tilde{F}(\xi, \mathbf{k})$ выходит за пределы круга $|\xi - \mathbf{k}| < 2k_0$ (т. е. $ms \geq 2k_0$) [5], то повышение устойчивости может обеспечиваться только за счет перехода к многочастотному режиму зондирования. В то же время для трехмерной монохроматической задачи имеется резерв избыточности размерностного типа.

**Стабилизация решения.** При организации процесса численной реконструкции $v(\mathbf{x})$ возникают проблемы как выбора шагов дискретизации, так и осуществления процедуры, стабилизирующей решение. Нелинейность задачи относительно данных рассеяния и необходимость обеспечить в численном варианте алгоритма (2)—(6) действенность механизма компенсации эффектов многократного рассеяния, имеющего место для непрерывных величин, делают эти проблемы не совсем стандартными. Рассмотрим простейшую процедуру стабилизации по отношению к помехам, имеющим в данном случае двоякую пророду: естественный шумовой фон и принципиальную инфинитность пространственного спектра рассеивателя конечных размеров. Предлагаемая процедура стабилизации сводится к уже обсужденному выбору оптимальных угловых шагов съема $f(\varphi, \varphi')$, выбору оптимального шага пространственной дискретизации в области рассеяния и к согласованной с задачей пространственной фильтрации винеровского типа в процессе восстановления рассеивателя. Так, поскольку присутствуют помехи и (2)—(6) позволяет учесть $\tilde{v}(\xi)$ лишь при $|\xi| < 2k_0/m$, то полагаем $ms = 2k_0$. Согласно (17)—(19), $f(\varphi, \varphi')$ промеряется при этом для всех $\varphi$ и $\varphi'$ с шагом $\Delta\varphi \simeq \Delta\varphi' \min\{\lambda_0/(2L_{лин});\ \delta\varphi_{корр}\}$, где $\delta\varphi_{корр}$ — угол корреляции естественных шумовых помех. Тогда из (2)—(4) можно найти $\rho(\varphi, \varphi')$. Для вычисления $K(\mathbf{x}, \varphi)$ из (5) и $\operatorname{In}(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ из (6) надо дополнительно задать шаг дискретизации в пространстве координат. Действительно, (2)—(6) позволяет восстановить $v(\mathbf{x})$ в любой точке $\mathbf{x}$ независимо от других точек. Но из-за помех, вызванных по

крайней мере инфинитностью supp $\tilde{v}(\xi)$, подстановка $f(\varphi, \varphi')$ в (2)—(6) позволяет найти не истинные функции $K(\mathbf{x}, \varphi)$, $\mathrm{In}(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$, а лишь их искаженные помехами оценочные значения $\hat{K}(\mathbf{x}, \varphi)$, $\widehat{\mathrm{In}}(\mathbf{x})$, $\hat{v}(\mathbf{x})$, с пространственными спектрами $\hat{K}(\xi, \varphi)$, $\widehat{\widetilde{\mathrm{In}}}(\xi)$, $\hat{\tilde{v}}(\xi)$, нуждающимися в фильтрации. При этом в приближении $m$-кратного рассеяния волны $\hat{K}(\xi, \varphi)$, $\widehat{\widetilde{\mathrm{In}}}(\xi)$, и $\hat{\tilde{v}}(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \leq 2k_0 m$, т. е. в отличие от «идеального» варианта без помех, supp $\widetilde{\mathrm{In}}(\xi)$ не сужается по сравнению с supp $\hat{K}(\xi, \varphi)$ ($\varphi$ фиксирован) из-за некомпенсирующихся помех. Однако поскольку в $\hat{K}(\xi, \varphi)$, и $\widehat{\widetilde{\mathrm{In}}}(\xi)$, информация о $v(\mathbf{x})$ может содержаться только на пространственных частотах $|\xi| < 2k_0/m$, а более высокие $\xi$ являются заведомо «помеховыми», то при оценке верхней границы в $\widehat{\widetilde{\mathrm{In}}}(\xi, \varphi)$, и $\hat{K}(\xi, \varphi)$, достаточно принять во внимание частоты $|\xi| < 2k_0$, определяющие предельно допустимую ширину спектра вторичных источников. Следовательно, по теореме отсчетов минимальное число дискретных отсчетов по каждой из декартовых осей в пространстве $\xi$ и в сопряженном пространстве $\mathbf{x}$ составляет $W_{\min} = 2k_0 L_{\text{лин}}/\pi$. Меньше и реже отсчеты взять нельзя, так как иначе не удается адекватно восстановить высокие «помеховые» частоты $|\xi| \geq 2k_0/m$ в $\widehat{\widetilde{\mathrm{In}}}(\xi)$, и в $\hat{\tilde{v}}(\xi)$, для их дальнейшей фильтрации, и тем самым будет внесена дополнительная неустранимая погрешность в реконструкцию $\hat{\tilde{v}}(\xi)$, на частотах $|\xi| < 2k_0/m$. Таким образом, учет высокочастотной «лишней» части в $\widehat{\widetilde{\mathrm{In}}}(\xi)$ при выборе шага дискретизации позволяет затем точнее извлечь информацию о $v(\mathbf{x})$, содержащуюся в низкочастотной части: максимальный шаг в координатном пространстве и пространстве спектральных частот составляет соответственно

$$\Delta x = L_{\text{лин}}/W_{\min} = \lambda_0/4; \quad \Delta\xi = 2\pi/L_{\text{лин}}. \tag{21}$$

С этими шагами находятся $\hat{K}(\mathbf{x}, \varphi)$ и $\widehat{\mathrm{In}}(\mathbf{x})$ из (5), (6) и $\hat{\tilde{v}}(\xi)$ из (20). На этом этапе можно «проконтролировать» качество получаемого решения: $\hat{\tilde{v}}(\xi)$ должен быть хорошо сконцентрирован внутри круга радиуса $2k_0/m_{\text{оцен}}$ ($m_{\text{оцен}}$ — нижняя оцененная граница числа $m$) или внутри более узкой области. В противном случае можно утверждать, что реконструкция рассеивателя по алгоритму (2)—(6) была в значительной степени неправомерна. «Контроль» качества реконструкции желателен, поскольку в эксперименте можно проверить лишь несущественность рассеяния назад плоских однородных волн для всех ракурсов облучения, что является необходимым, но недостаточным условием выполнения требования (7).

Оценку числа $m$ можно получить, раскладывая волновое поле в ряд Борна—Неймана. Обозначая через $\alpha^2$ коэффициент ослабления квадрата нормы каждого из членов ряда по сравнению с предыдущим, получаем связь оценок энергии падающего $E_{\text{пад}}$ и рассеянного $E_{\text{расс}}$ полей, запасенной в объеме рассеивателя: $E_{\text{расс}} \simeq E_{\text{пад}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{2n}$. Тогда из оценки относительной точности $\varepsilon$, с которой вычисляется рассеянное поле при учете $m$ слагаемых в ряде Борна—Неймана $\left(1 - \left(\sum_{n=1}^{m} \alpha^n\right) / \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n\right) \simeq \varepsilon\right)$, следует: $m \simeq -2 \ln \varepsilon / \ln (E_{\text{пад}}/E_{\text{расс}} + 1) \geq$ $\geq -2 \ln \varepsilon / \ln (P_{\text{пад}}/P_{\text{расс}} + 1) \simeq m_{\text{оцен}}$. Экспериментально можно измерить мощность $P_{\text{расс}}$ рассеянного поля, излучаемого наружу, и оценить мощность $P_{\text{пад}}$ падающего поля, причем $P_{\text{расс}}/P_{\text{пад}} \leq E_{\text{расс}}/E_{\text{пад}}$.

Наиболее точное (в смысле среднеквадратичной ошибки) восстановление $\tilde{v}(\xi)$ происходит, если априорно в рабочей полосе пространственных частот $\xi$ заданы средние энергетические пространственные спектры «сигнала» $S_v(\xi)$ и статистически независимых от «сигнала» «помех» $N(\xi)$. При этом от-

фильтрованная оценка $\tilde{v}(\xi)$ пространственного спектра рассеивателя выглядит так:

$$\tilde{v}(\xi) = \begin{cases} \hat{\tilde{v}}(\xi)\, S_v(\xi) / [S_v(\xi) + N(\xi)], & |\xi| < 2k_0/m_{\text{оцен}} \\ 0 \quad , & |\xi| \geq 2k_0/m_{\text{оцен}}. \end{cases}$$

В [6] предлагается эффективный для многих томографических задач способ замены истинных, как правило, неизвестных, $S_v(\xi)$ и $N(\xi)$ их оценочными значениями. Так, в качестве оценки величины $S_v(\xi)$ берется средний энергетический спектр того класса рассеивателей, в котором ищем реконструируемый рассеиватель (например, при каждом фиксированном $\xi$ усредняются интенсивности пространственных спектров томограмм одного и того же диагностируемого органа множества пациентов). «Помехи» же в данном случае соответствуют ошибке, получаемой при восстановлении по алгоритму (2)—(6). Сложная природа «помех» не позволяет определить $N(\xi)$ аналитически. Тем не менее величина $|\hat{\tilde{v}}(\xi)|$ может служить оценкой для $S_v(\xi) + N(\xi)$. Подобная оценка оправдана в силу независимости «сигнала», порожденного за счет $\tilde{v}(\xi)$ при $|\xi| < 2k_0/m$ и «помех», порожденных за счет $|\xi| \geq 2k_0/m$ и за счет естественного шумового фона.

После вычисления $\tilde{v}(\xi)$ осуществляется обратный переход в координатное пространство, причем шаги $\Delta x$ можно увеличить по сравнению с (21) до $\Delta x = \lambda_0 m_{\text{оцен}}/4$, поскольку теперь сохранены только $|\xi| < 2k_0/m_{\text{оцен}}$. В итоге восстанавливается функция $v'(\mathbf{x})$, оценивающая реальный рассеиватель $v(\mathbf{x})$.

Подчеркнем еще раз, что переход к более крупному шагу дискретизации возможен только после осуществления фильтрации $\hat{\tilde{v}}(\xi)$ или, в силу линейной связи между $v(\mathbf{x})$ и $K(\mathbf{x}, \varphi)$, аналогичной фильтрации $\tilde{K}(\xi, \varphi)$ при каждом фиксированном $\varphi$. Саму же функцию $\hat{K}(\mathbf{x}, \varphi)$ следует первоначально восстанавливать с шагом (21), восстановить спектр $\tilde{K}(\xi, \varphi)$ и только потом отфильтровать его. Аналогичная ситуация возникает в хорошо известном случае приема и цифровой фильтрации узкополосного сигнала в широкополосном шуме. Для ее успешного осуществления исходную дискретизацию процесса во времени необходимо осуществлять с шагом, диктуемым шириной временного спектра помехи, а не сигнала.

**Влияние ошибок измерения на качество реконструкции.** Представим $f(\varphi, \varphi')$ в виде: $f(\varphi, \varphi') = f_0(\varphi, \varphi') + \Delta f'(\varphi, \varphi') + \Delta f(\varphi, \varphi')$, где $f_0(\varphi, \varphi')$ — часть амплитуды рассеяния, создаваемая за счет $\tilde{v}(\xi)$ при $|\xi| < 2k_0/m$; $\Delta f'(\varphi, \varphi')$ — часть, создаваемая за счет $|\xi| \geq 2k_0/m$ и являющаяся одним из источников ошибок алгоритма (2)—(6); $\Delta f(\varphi, \varphi')$ — случайная погрешность измерения экспериментальных данных. Слагаемое $f_0(\varphi, \varphi')$ позволяет восстановить ту часть реального рассеивателя, пространственный спектр которой локализован внутри круга радиуса $2k_0/m$. Поправка $\Delta f'(\varphi, \varphi')$ внесет относительную ошибку $\varepsilon'$. Влияние же погрешности $\Delta f(\varphi, \varphi')$ будет увеличиваться с ростом $m$ по сравнению с линейным (борновским) по $f(\varphi, \varphi')$ приближением. Если в линейном приближении среднеквадратичная относительная ошибка оценки рассеивателя только за счет $\Delta f$ определяется (по порядку величины) относительной ошибкой измерения данных рассеяния $\varepsilon_f \simeq |\Delta f|/|f|$, то при учете $m$-кратного рассеяния она составляет ((2), (4) и (5) представляются в виде ряда по $f(\varphi, \varphi')$, ограниченного $m$ слагаемыми) $\varepsilon_{(m)} \simeq \left(\sum_{n=1}^{m} (\varepsilon_f)^{2n}\right)^{1/2} \simeq \varepsilon_f (1 + (\varepsilon_f)^2/2)$, а полная среднеквадратичная относительная ошибка $\varepsilon_{\text{полн}}$ в силу взаимной независимости источников ошибок —

$$\varepsilon^2_{\text{полн}} = (\varepsilon_{(m)})^2 + (\varepsilon')^2 + \varepsilon^2, \tag{22}$$

где $\varepsilon$ — относительная ошибка за счет ограничения ряда Борна—Неймана для рассеянного поля $m$ членами. В (22) учтено перерассеяние волн, но не учтена избыточность данных рассеяния при $m > 1$. За счет перерассеяний «ошибки» $\Delta f'(\varphi, \varphi')$ от различных углов коррелированы друг с другом слабо; ошибку $\Delta f(\varphi, \varphi')$ также можно считать слабо коррелированной, а в силу своей природы $f_0$, $\Delta f'$ и $\Delta f$ взаимно независимы. Поэтому благодаря коэффициенту избыточности $m^2$ каждая из ошибок снижается в $m$ раз. Следовательно (считаем $\varepsilon'$ малым и $\varepsilon$ фиксированным), по сравнению с борновским приближением ($m = 1$) полная относительная среднеквадратичная ошибка $\varepsilon_{\text{полн}}/m$ растет за счет перерассеяний, но уменьшается за счет избыточности, причем падение превалирует над ростом. В итоге относительное влияние помех в данных рассеяния на оценку рассеивателя уменьшается, пока алгоритм (2)—(6) вообще справедлив, т. е. $\varepsilon'$ мало. Этот результат в сущности является следствием жестких ограничений со стороны (2)—(6) на ширину пространственного спектра рассеивателя при росте его силы. При этом сохранение помехоустойчивости решения обеспечивается растущей избыточностью данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гриневич П. Г., Манаков С. В.* Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера, $\bar{\partial}$-метод и нелинейные уравнения // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 2. С. 14—24.
2. *Новиков Р. Г.* Построение двумерного оператора Шредингера с данной амплитудой рассеяния при фиксированной энергии // Теорет. и мат. физика. 1986. Т. 66. № 2. С. 234—240.
3. *Буров В. А., Румянцева О. Л.* Решение двумерной обратной задачи акустического рассеяния на основе функционально-аналитических методов // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 413—420.
4. *Burov V. A., Rumiantseva O. D.* The functional-analytical methods for the scalar inverse scattering problems // Proc. SPIE. Anal. Meth. Opt. Tomogr. 1992. V. 1843. P. 194—205.
5. *Burov V. A., Rumiantseva O. D.* The solution stability and restrictions on the space scatterer spectrum in the two-dimensional monochromatic inverse scattering problem // Ill-Posed Problems in Natural Sciences. M.: TVP, 1992. P. 463—471.
6. *Арсенин В. А., Тимонов А. А.* О локальной регуляризации математических задач компьютерной томографии. II Всесоюз. симп. по вычисл. томографии. г. Куйбышев: Куйбыш. авиац. ин-т, 1985. С. 14—15.



Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Физический факультет



Поступила в редакцию
13.03.93 г.



V. A. Burov, O. D. Rumyantseva


## SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM OF ACOUSTIC SCATTERING BASED ON FUNCTIONAL-ANALYTHICAL METHODS. II. EFFICIENT APPLICATION DOMAIN


Peculiarities of practical realization of the algorithm allowing to reconstruct spatial structure of a medium-force two-dimensional scatterer in monochromatic probing regime are analyzed. The algorithm is based on methods of functional analysis. The physical trend of the under taken investigation is connected with the solution of applied inverse acoustic scattering problems of tomographic type The algorithm is valid both for sccatterers without absorption and absorbing scatterers if waves attenuation in the background medium is negligible. The frequency range of probing waves, where the reconstruction results are most reliable, is estimated. The role of scattering data redundancy is studied. Experimental data redundancy is not necessary for the Born scatterers while in the case of taking account of rescattering the redundancy coefficient is determined by the square of considered scattering multiplicity. A simple procedure for solution stabilization is considered with respect to noise of double origin: natural noise background and infinity (of principle) of spatial spectrum of a finite size scatterer. The stabilization procedure is reduced to the selection of optimal angular step for experimental data measurement, the selection of optimal step of spatial discretization in the scattering area and matched to the problem of spatial filtration of the Winner type in the process of scatterer reconstruction. The estimated root-mean-square relative error of scatterer reconstruction is reduced in the case of taking account of rescattering as compared to the Born approximation due to strong redundancy of data.