АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 5

УДК 534.2

© 1993 г. И. А. Кайбичев, В. Г. Шавров

ТРАНСФОРМАЦИЯ СПЕКТРА ВОЛН ЛЯВА ПРИ ЖЕСТКОМ СЛОЕ И МЯГКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Предсказано изменение спектра волн Лява при наличии жесткого слоя и мягкого полупространства. В данном случае при низких частотах существует только первая слабонеоднородная мода волн Лява с фазовой скоростью, несколько меньшей скорости поперечного звука в полупространстве, и квадратичной дисперсией. При повышении частоты происходит трансформация спектра, и при частотах выше критической распространяются поперечные нормальные моды. Фазовая скорость таких волн в длинно- и коротковолновой областях несколько превышает скорость поперечного звука в слое. При этом изменяется закон дисперсии. В длинноволновой области имеем обратно пропорциональную дисперсию, а для коротких волн в законе дисперсии появляются члены, пропорциональные обратной величине частоты в первой, второй и третьей степенях. Возможна классификация волн по категориям квазисимметричных или квазиантисимметричных мод. Видоизмененные поперечные нормальные моды сильнонеоднородны в длинно- и коротковолновой областях.

Волны Лява впервые теоретически предсказаны Бромвичем в длинноволновой области [1], а их детальное исследование в более широком диапазоне частот было проведено Лявом [2]. Их часто называют поверхностными акустическими волнами (ПАВ) горизонтальной поляризации, так как механические смещения в них параллельны свободной поверхности полупространства и перпендикулярны направлению распространения волны [3]. Возможность существования еще одного варианта волн данного типа в системе твердые полупространство — слой со свободной внешней границей показана в [4, 5]. Дисперсионное соотношение ПАВ горизонтальной поляризации в такой системе хорошо известно [2, 3, 6]. В случае жесткого полупространства и мягкого слоя оно имеет единственное решение — волны Лява [1, 2, 3, 6]. В ситуации мягкого полупространства и жесткого слоя существует еще одно решение — видоизмененные поперечные нормальные моды [4, 5]. Наличие новых корней ранее известного дисперсионного соотношения противоречит доказательству единственности решений в виде волн Лява [6]. Выход из данного противоречия — в изменении законов дисперсии при отсутствии каких-либо новых корней ранее известного дисперсионного соотношения.

Дисперсионное соотношение ПАВ горизонтальной поляризации в системе твердые полупространство — слой. Дисперсионное соотношение ПАВ горизонтальной поляризации (распространяется в направлении оси X, имеет единственную компоненту вектора механического смещения u_y) в системе твердые полупространство ($z \geq h$) — слой (толщиной $2h$) хорошо известно [2, 3, 6]:

$$\mathrm{tg}(2\varkappa_1 h) = \alpha\varkappa_2/\varkappa_1,\ \alpha = \mu_2/\mu_1. \tag{1}$$

Здесь μ_1 и μ_2 — упругие модули сдвига слоя и полупространства, $\varkappa_1 = k_{t1}[1 - v_{t1}^2/v^2]^{1/2}$ и $\varkappa_2 = k_{t2}[v_{t2}^2/v^2 - 1]^{1/2}$ — параметры осцилляции механических смещений в слое и их затухания в полупространстве, $k_{tj} = \omega/v_{tj}$ — волновые числа поперечных волн ($j = 1, 2$ соответственно в слое и полупространстве), v — фазовая скорость ПАВ, а v_{tj} — скорость поперечного звука. Соотношение (1) можно представить в виде

$$2\varkappa_1 h = \mathrm{arc\,tg}\,(\alpha\varkappa_2/\varkappa_1) + n\pi,\ n = 0, 1, 2,..., \tag{2}$$

из которого следует наличие совокупности ветвей спектра, отвечающих различным n. Соотношения (1), (2) имеют решения только при скорости поперечного звука в слое v_{t1}, меньшей ее значения v_{t2} в полупространстве. Фазовые скорости ПАВ горизонтальной поляризации всегда больше скорости поперечного звука в слое, но меньше, чем в полупространстве. Единственность решения уравнений (1), (2) вытекает из наличия только одной точки пересечения функции $2\varkappa_1 h$ с каждой ветвью арктангенса в области его периодичности [6]. Поэтому наличие новых корней невозможно. Однако волны Лява [2, 3, 6] и видоизмененные поперечные нормальные моды [4, 5] — решения уравнений (1), (2). Рассмотрим ситуацию детальнее.

Волны Лява. В длинноволновой области $\lambda >> 2h$ (λ — длины волны) в уравнении (1) можно использовать приближение $\mathrm{tg}(2\varkappa_1 h) \approx 2\varkappa_1 h$. Тогда из (1) следует, что существует только первая мода волн Лява ($n = 0$) с фазовой скоростью

$$v = v_{t2}[1 - 2(k_{t2}h)^2(\rho_1/\rho_2)^2 p^2]. \tag{3}$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 — плотность слоя и полупространства, а $p = 1 - v_{t1}^2/v_{t2}^2$. Фазовая скорость волны Лява (3) несколько меньше значения скорости поперечного звука в полупространстве и обладает квадратичной дисперсией, т. е. $v \sim \omega^2$. Формула (2) получена в предположении малости дисперсионного члена, т. е. при $\omega < v_{t2}/[2h(\rho_1/\rho_2)p]$.

Для коротковолнового диапазона $\lambda << 2h$ величина $\mathrm{arc\ tg}(\alpha\varkappa_2/\varkappa_1)$ в уравнении (2) стремится к $\pi/2$. Тогда существует совокупность ветвей спектра волн Лява, отвечающих разным n, с фазовыми скоростями

$$v = v_{t1}\left[1 + \frac{1}{2}\left\{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)/2k_{t1}h\right\}^2\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

несколько большими скорости поперечного звука в слое и обладающими обратной квадратичной дисперсией ($v \sim \omega^{-2}$).

Механические смещения в волнах Лява распределены по закону

$$u_{y1} = u_0 \cos[\varkappa_1(h + z)]/\cos(2\varkappa_1 h), \tag{5}$$

$$u_{y2} = u_0 \exp[-\varkappa_2(z - h)],$$

зависимость от $\exp(ikx - i\omega t)$ опущена для сокращения записи. Глубина проникновения механических смещений в полупространство (вдоль оси Z) имеет вид

$$H = \varkappa_2^{-1} = \begin{cases} k_{t2}^{-1}(2k_{t2}h)^{-1}(\rho_2/\rho_1)p^{-1}, & \lambda >> 2h, \\ k_{t1}^{-1}p^{-1/2}\left[1 + \dfrac{1}{2p}\left\{\dfrac{\pi(n + 1/2)}{2k_{t1}h}\right\}^2\right], & \lambda << 2h. \end{cases} \tag{6}$$

В длинноволновой области ПАВ проникает далеко в глубь материала ($H/2h >> 1$) и является слабонеоднородной ($H/\lambda >> 1$). Для коротковолновой области ПАВ сильнонеоднородна ($H/\lambda \sim 1$) и локализована вблизи поверхности ($H/2h << 1$).

Таким образом, волны Лява — решение исходного дисперсионного уравнения. В длинноволновой области существует только первая ветвь таких волн с фазовой скоростью, несколько меньшей значения скорости поперечного звука в полупространстве, и квадратичной дисперсией. Волна Лява в этом случае слабонеоднородна. Для коротковолнового диапазона существует совокупность ветвей спектра волн Лява с фазовыми скоростями, несколько большими скорости поперечного звука в слое, и обратной квадратичной дисперсией. Ветви спектра волн Лява в данном случае сильнонеоднородны.

Поперечные нормальные моды. Поперечные нормальные моды — решение уравнений (1), (2) при $\alpha = 0$. Их фазовые скорости равны [3, 7]:

$$v = v_N = v_{\text{п}} \, [1 - (\pi N / k_{\text{п}} h)^2]^{-1/2}, \quad N = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \tag{7}$$

Волна распространяется при условии $\omega > \pi N v_{\text{п}} / h$.

В длинноволновой области $\lambda >> 2h$ существует только мода с $N = 0$, фазовой скоростью $v_0 = v_{\text{п}}$, т. е. такая же поперечная волна, что и в неограниченном твердом теле.

Для коротковолнового диапазона $\lambda << 2h$ имеем совокупность ветвей поперечных нормальных мод, отвечающих различным N, их фазовая скорость несколько превышает скорость поперечного звука в слое и обладает дисперсией $\sim\omega^{-2}$.

По характеру распределения механических смещений в слое такие волны делятся на симметричные:

$$u_{y1} = u_0 \cos(\varkappa_1 z), \quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{8а}$$

и антисимметричные:

$$u_{y2} = u_0 \sin(\varkappa_1 z), \quad N = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \tag{8б}$$

где $\varkappa_1 = \pi N / h$ — параметр, определяющий характер осцилляции механических смещений в слое.

Таким образом, поперечные нормальные моды являются решением исходного уравнения в частном случае. В длинноволновой области существует только первая ветвь таких волн с фазовой скоростью, равной скорости поперечного объемного звука в слое, дисперсия отсутствует. Для коротковолновой области существует совокупность ветвей спектра поперечных нормальных мод с фазовыми скоростями, несколько большими скорости поперечного звука в слое, и с обратной квадратичной дисперсией. Волны делятся на симметричные и антисимметричные.

Новый вариант ПАВ горизонтальной поляризации. В случае мягкого полупространства и жесткого слоя ($\alpha << 1$) решением уравнений (1), (2) являются видоизмененные поперечные нормальные моды [4, 5]. Такие волны возможны вследствие контакта жесткого слоя с мягким полупространством. Корни дисперсионных уравнений (1), (2) находим с помощью итераций по малому параметру α. Корень уравнений (1), (2) в линейном приближении по α имеет вид

$$v = v_N \, [1 + \delta_N], \tag{9}$$

где δ_N ($0 < \delta_N < 1$) — малая поправка к фазовой скорости N — моды поперечных нормальных волн

$$\delta_N = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2k_{\text{п}} h} \dfrac{v_N}{v_{\text{п}}} T_N, & N \neq 0, \ N > \sqrt{\alpha \, (k_{\text{п}} h)/2\pi^2}, \\ \dfrac{\alpha}{4k_{\text{п}} h} p^{1/2}, & N = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь $T_N = [1 - v_N^2 / v_{\text{п}}^2]$. Формулы (9), (10) описывают ПАВ, распространяющуюся вдоль границы слоя и полупространства с фазовой скоростью, несколько большей значения скорости поперечных нормальных волн. Отметим существенную дисперсию фазовой v и групповой $v_{\text{гр}} = v_{\text{п}}^2 / v$ скоростей нового варианта ПАВ горизонтальной поляризации. Для длинноволновой и коротковолновой областей из (9), (10) получаем

$$v = v_{\text{п}} \begin{cases} [1 + \alpha \sqrt{p} \, / 4k_{\text{п}} h], & \lambda > 2h, \\ [1 + \alpha \sqrt{p} \, / 2k_{\text{п}} h] \left[1 + \dfrac{1}{2} (\pi N / k_{\text{п}} h)^2 \right], & \lambda << 2h, \ N << k_{\text{п}} h / \pi. \end{cases} \tag{11}$$

Предельные значения фазовой скорости нового варианта ПАВ в данных областях равны скорости поперечного звука в слое. Кроме того, в длинноволновой области вместо квадратичной дисперсии волн Лява имеем дисперсию $\sim\omega^{-1}$, а для коротковолнового диапазона появляются дополнительные дисперсионные члены $\sim\omega^{-1}$ и ω^{-3}. Таким образом, от поперечных нормальных мод новый вариант ПАВ отличается наличием дисперсии $\sim\omega^{-1}$ в длинноволновой области и появлением дополнительных членов с дисперсией $\sim\omega^{-1}$ и $\sim\omega^{-3}$ для коротковолнового диапазона. По характеру распределения механических смещений в слое можно выделить квазисимметричные (симметричные с точностью до α) волны:

$$u_{y1} = u_0 \cos(\varkappa_1 z)/\cos(\varkappa_1 h), \tag{12а}$$

$$u_{y2} = u_0 \exp[-\varkappa_2 (z - h)], \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

и квазиантисимметричные:

$$u_{y1} = u_0 \sin(\varkappa_1 z)/\sin(\varkappa_1 h), \tag{12б}$$

$$u_{y2} = u_0 \exp[-\varkappa_2 (z - h)], \quad N = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots.$$

Смещения в волне локализованы в слое и полупространстве. В слое они с точностью до членов $\sim\alpha$ такие, как в поперечной нормальной волне, так как до параметра $\varkappa_1$, определяющего характер распределения смещений в слое, справедлива формула

$$\varkappa_1 = \frac{\pi N}{h} + \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2\pi N} k_{\text{п}} \dfrac{v_{\text{п}}}{v_N} T_N, & N > \sqrt{\alpha (k_{\text{п}} h)/2\pi^2}, \\ \left(\dfrac{\alpha}{2h} k_{\text{п}} \sqrt{p}\right)^{1/2}, & N = 0. \end{cases} \tag{13}$$

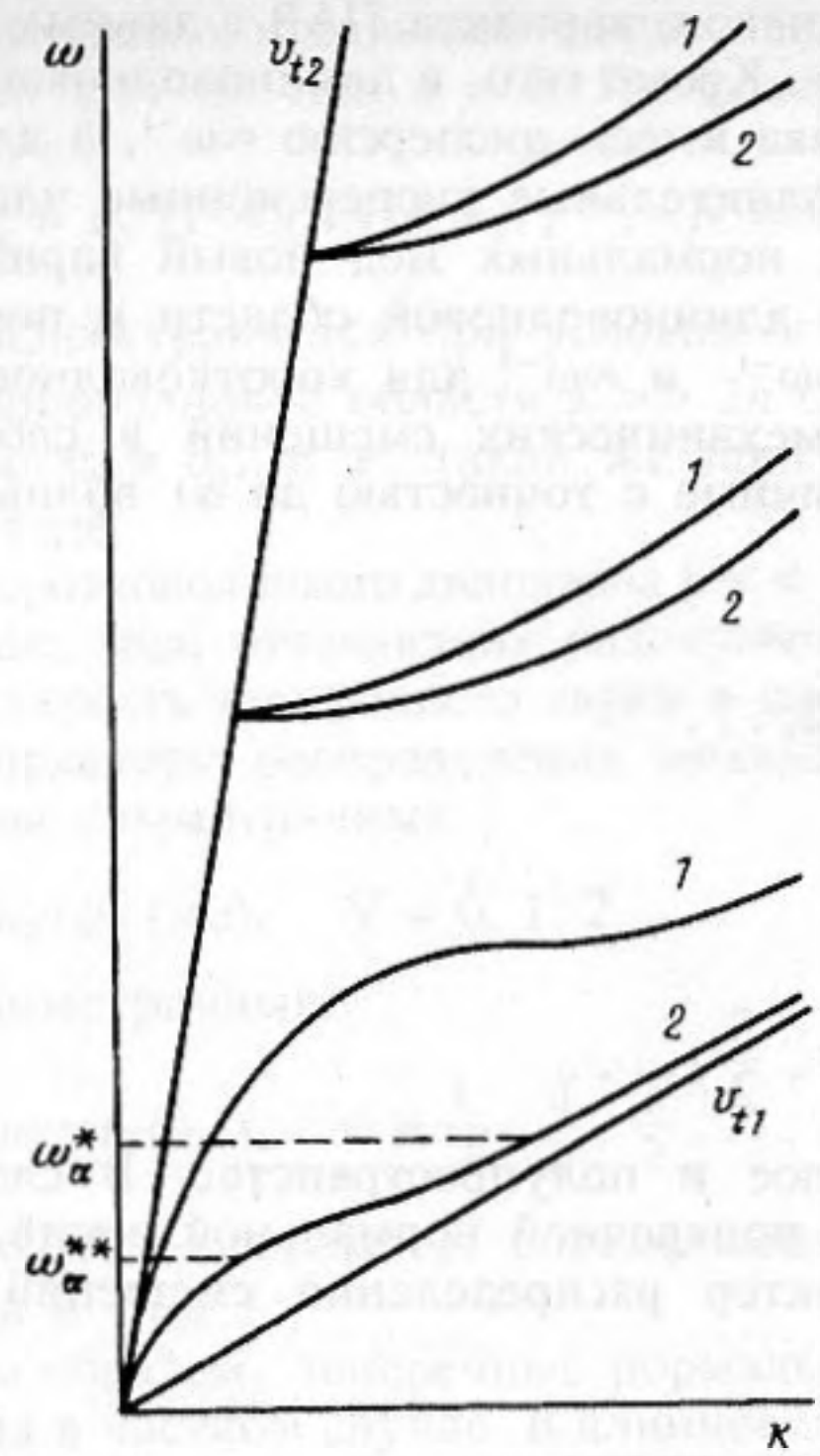
В полупространстве смещения спадают экспоненциально, глубина локализации

$$H = k_{\text{п}}^{-1} (v_N/v_{\text{п}}) T_N^{-1} [1 + \delta_N/T_N^2] \sim \lambda/(2\pi), \tag{14}$$

т. е. рассматриваемая волна сильнонеоднородна при любых соотношениях толщины слоя и длины волны.

Новый вариант ПАВ горизонтальной поляризации существует только при определенных ограничениях на значения физических параметров нашей задачи. Во-первых, такая волна может существовать только при выполнении условия распространения поперечной нормальной моды $\omega > \pi N v_{\text{п}}/h$. Второе ограничение вытекает из условия принадлежности значения фазовой скорости ПАВ к диапазону от $v_{\text{п}}$ до $v_{\text{п}2}$, что выполняется при $\omega > \pi N v_{\text{п}}/(h\sqrt{p})$. Третье ограничение вытекает из условия $\delta_N << 1$ в формуле (9), тогда $\omega >> \alpha v_{\text{п}}/(2h)$. При значениях частот, не удовлетворяющих перечисленным трем требованиям, рассмотренная волна, по-видимому, не существует.

Таким образом, новый вариант ПАВ горизонтальной поляризации — решение исходного уравнения в случае мягкого полупространства и жесткого слоя. Фазовая скорость таких волн несколько больше скорости поперечных нормальных мод. В длинноволновой области существует только первая мода с фазовой скоростью, несколько большей скорости поперечного звука в слое, и обратно пропорциональной дисперсией. Для коротковолновой области существует совокупность мод с фазовыми скоростями, несколько большими скорости поперечного звука в слое. Закон дисперсии содержит члены, пропорциональные обратной величине частоты в первой, второй и третьей степенях. Новый вариант ПАВ горизонтальной поляризации сильнонеоднороден в длинно- и коротковолновой областях, возможна классификация по категориям квазисимметричности и квазиантисимметричности. Одним из критериев достоверности полученных результатов является аналогия



Кривые дисперсии ПАВ горизонтальной поляризации в системе твердые полупространство — слой со свободной внешней границей. *1* — $\mu_1 < \mu_2$, существуют только волны Лява; 2 — $\mu_1 >> \mu_2$, при низких частотах $\omega < \omega_\alpha^{**}$ существуют волны Лява, в области $\omega_\alpha^{**} < \omega < \omega_\alpha^*$ происходит изменение спектра, а при высоких частотах $\omega > \omega_\alpha^*$ распространяются видоизмененные поперечные нормальные моды, которые можно назвать волнами Лява с измененным законом дисперсии

с теоретическими выводами Викторова [8] для ПАВ вертикальной поляризации, качественно подтвержденными экспериментально [9]. Рассмотренный нами случай отличается типом поляризации и учетом возможности существования целой совокупности мод при выходе за пределы применимости длинноволнового приближения.

Трансформация спектра волн Лява. Волны Лява и новый вариант ПАВ горизонтальной поляризации — решения дисперсионного уравнения (1), (2). Однако в [6] доказана единственность его корней. Поэтому совместное существование волн Лява и нового варианта ПАВ невозможно. Действительно, новый вариант ПАВ горизонтальной поляризации существует в области частот, больших критической $\omega_\alpha^* = \alpha v_{t1}/2h$. Из (1), (2) также следует возможность существования только первой моды волн Лява ($n = 0$) при частотах $\omega < \omega_\alpha^{**} = \alpha v_{t1}^2/(2hv_{t2}p)$ в случае жесткого слоя и мягкого полупространства. Так как скорость поперечного звука в слое v_{t1} меньше ее значения в полупространстве v_{t2}, то $\omega_\alpha^{**} < \omega_\alpha^*$. Следовательно, частотные области существования волн Лява и нового варианта ПАВ не перекрываются (см. рисунок). Механические смещения в волне Лява (5) можно записать в форме

$$u_{y1} = u_0 \frac{\cos \varkappa_1 h \cos \varkappa_1 z - \sin \varkappa_1 h \sin \varkappa_1 z}{\cos^2 (\varkappa_1 h) - \sin^2 (\varkappa_1 h)},$$

$$u_{y2} = u_0 \exp [-\varkappa_2 (z - h)]. \qquad (15)$$

При $\varkappa_1 h = \pi N$, $N = 0, 1, 2, \ldots$ получаем трансформацию в квазисимметричные моды нового варианта ПАВ (12а). В случае $\varkappa_1 h = \pi N$, $N = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2, \ldots$ — в квазиантисимметричные моды (12б). Трансформация спектра волн Лява в новый вариант ПАВ происходит в области частот $\omega_\alpha^{**} < \omega < \omega_\alpha^*$. Новый вариант ПАВ в дальнейшем нужно называть волнами Лява с измененным законом дисперсии. Этот термин более удачно отражает тот факт, что такие волны являются решением хорошо известного дисперсионного соотношения волн Лява. В геофизике и акустоэлектронике, как правило, реализуется случай мягкого слоя и жесткого

полупространства [1, 2, 3, 6, 10, 11], когда отмеченное изменение спектра волн Лява невозможно. Однако есть ряд материалов, в сочетании которых реализуется противоположный случай жесткого слоя и мягкого полупространства (таблица таких материалов приведена в [4]). В этой ситуации возможно изменение спектра волн Лява.

Таким образом, в работе предсказана трансформация спектра волн Лява в случае жесткого слоя и мягкого полупространства. Она заключается в существенном изменении законов дисперсии и распределения механических смещений при частотах, больших критической. Ввиду заметного уменьшения при этом фазовой и групповой скоростей предсказанная трансформация может оказаться полезной в акустоэлектронике, например при разработке фильтров или линий задержки [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bromwich T. J. I.* On the influence of gravity on elastic waves, and in particular, on the vibrations of an elastic globe//Proc. London Math. Soc. 1898. V. 30. P. 98—120.
2. *Love A. E. H.* Some problems of geodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1911. 180 p.
3. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. *Кайбичев И. А., Шавров В. Г.* Вариант поверхностных акустических волн горизонтальной поляризации в твердых телах//Письма в ЖГФ. 1988. Т. 14. Вып. 14. С. 1299—1304.
5. *Кайбичев И. А.* Новый тип ПАВ горизонтальной поляризации//Тез. XIV Всесоюз. конф. по акустоэлектронике и физической акустике твердого тела. Кишинев: Ин-т прикл. физики АН МССР, 1989. Ч. 1. С. 84—86.
6. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах: Применение для обработки сигналов. М.: Наука, 1982. 424 с.
7. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках// Физическая акустика/Под ред. Мэзона У. П. М.: Мир, 1966. Ч. 1. Ч. А. С. 140—203.
8. *Викторов И. А.* Сильнонеоднородные звуковые поверхностные волны в твердых телах//Акуст. журн. 1978. Т. 24. Ч. 5. С. 780—782.
9. *Викторов И. А., Кудрявцев В. Н., Можаев В. Г., Пятаков П. А.* О наблюдении медленной изгибно-поверхностной волны//Акуст. журн. 1982. Т. 28. Вып. 2. С. 164—166.
10. *Ewing W. M., Jardetsky W. S., Press F.* Elastic waves in layered media. N. Y.: McGraw-Hill, 1958. 380 p.
11. Поверхностные акустические волны/Под ред. Олинера А. М.: Мир, 1981. 392 с.
12. *Tournois P., Lardat C.* Love wave dispersive delay-lines//Reports 6-th Intern. congr. on Acoustics. Tokyo. 1968. V. 6. P. 37—40.

Институт радиотехники и электроники
Российской академии наук

Поступила в редакцию
18.08.92
После исправления
18.02.93

I. A. Kaibichev, V. G. Shavrov

LOVE WAVES SPECTRUM TRANSFORMATION IN THE CASE OF RIGID LAYER AND SOFT HALF-SPACE

Love waves spectrum transformation is predicted in the case of rigid layer and soft half-space. In this case only first weakly-inhomogeneous mode of the Love wave exists at low frequencies. If the frequency increases, then the spectrum transformation takes place and at frequencies higher than the critical one, modified shear normal modes propagate.