АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 5

УДК 550.34

© 1993 г. Г. А. Максимов

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ЭНЕРГИИ КОРОТКОГО ИМПУЛЬСА, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В СРЕДЕ С ОДНИМ РЕЛАКСАЦИОННЫМ МЕХАНИЗМОМ

Рассматривается задача об изменении энергии импульса при его распространении по релаксационной среде. Предполагается, что диссипативно-дисперсионные среды могут быть описаны с помощью единственного релаксационного механизма, характеризующегося своим временем релаксации. Для случая короткого начального импульса, когда время действия источника значительно меньше времени релаксации, получено точное выражение для зависимости энергии импульса от пройденного расстояния. В частности, показано, что на коротких расстояниях энергия импульса диссипирует по экспоненциальному закону, в то время как на больших расстояниях закон диссипации сменяется на степенной — обратно пропорционально корню из пройденного расстояния.

Закономерности изменения амплитуды акустических импульсов, распространяющихся в релаксационных (диссипативных) средах, в настоящее время детально исследованы [1—5]. Свойства таких сред определяются экспоненциальным видом релаксационных ядер в уравнении состояния среды наследственного типа. Общая теория релаксационных сред, связанная с введением дополнительных внутренних параметров, характеризующихся своими временами релаксации к состоянию термодинамического равновесия, была развита Мандельштаммом и Леонтовичем [6]. Существует широкий класс реальных сред, свойства которых адекватно описываются в рамках этой теории [7, 8]. Детальные исследования [1, 2] по распространению импульсов в релаксационных средах приводят к следующей картине эволюции их амплитуды и формы: первоначально близкий к дельта-функции импульс (фундаментальное решение) при своем распространении разделяется на распространяющийся с максимальной фазовой скоростью упругий предвестник, амплитуда которого экспоненциально убывает с пройденным расстоянием, и тело импульса, имеющее на близких расстояниях вид экспоненциально спадающего во времени хвоста, а на больших расстояниях трансформирующееся в гауссов импульс, максимум которого движется с минимальной фазовой скоростью, а амплитуда убывает пропорционально корню из пройденного расстояния.

Таким образом, на начальной стадии, пока преобладает предвестник, амплитуда импульса экспоненциально убывает с пройденным расстоянием, а на поздних стадиях, когда выживает лишь тело импульса, его амплитуда убывает по степенному закону.

Такая картина находится в полном соответствии с тем, что на высоких частотах, которые формируют предвестник, коэффициент затухания в релаксационных средах не зависит от частоты, так что закон убывания его амплитуды оказывается экспоненциальным. На низких же частотах коэффициент затухания пропорционален квадрату частоты, что приводит к гауссову импульсу и степенному закону убывания амплитуды [9]. Таким образом, по мере «выедания» высокочастотной области происходит описанная выше трансформация импульса.

Характерный масштаб расстояний, на которых первоначальный дельта-функционный импульс превращается в гауссов, имеет вид $L = C_\infty\langle\tau\rangle/\Delta$, где $\langle\tau\rangle$ — среднее по спектру время релаксации, $\Delta = (C_\infty^2 - C_0^2)\,/\,C_\infty^2$ — дисперсия фазовой скорости, C_∞ и C_0 — максимальная и минимальная фазовые скорости в среде.

Если же источник имеет конечную длительность T, то описанную выше динамику эволюции импульса можно наблюдать при условии $T \ll \langle \tau \rangle / \Delta$ и $T \ll \langle \tau^2 \rangle^{1/2}$. При больших длительностях действия источника вклад высоких частот будет незначительным по сравнению с определяющей ролью низких частот, для которых справедливо представление фундаментального решения в виде гауссового пакета.

Помимо амплитуды и формы импульса другими его важными характеристиками являются количество движения и энергия, переносимые им. Что касается первой из этих величин, которая в линейном приближении характеризует площадь под временным профилем массовой скорости (его динамика описана выше), то она сохраняется уже как следствие однородности пространства. Таким образом, площадь под профилем импульса не меняется при его распространении.

Этого никак нельзя сказать об энергии импульса, распространяющегося по релаксационной среде.

Прежде всего отметим, что под энергией импульса, которой он обладает в некотором сечении трассы, будем понимать полный поток энергии, прошедшей через указанное сечение за все время прохождения импульса.

В случае распространения плоских импульсов эта энергия на единицу площади поперечного сечения определяется выражением

$$E(x) = \int_0^\infty dt P(t, x) V(t, x), \tag{1}$$

где $P(t, x)$ и $V(t, x)$ — соответственно давление и массовая скорость в импульсе.

Если на границе $x = 0$ задан источник скорости $V(t, x = 0) = V_0(t)$, то поля массовой скорости $V(t, x)$ и давления $P(t, x)$ определяются свертками

$$V(t, x) = \int_0^\infty dt V_0(t - t') I(t', x),$$

$$P(t, x) = \rho C_\infty \int_0^\infty dt \widetilde{V}_0(t - t') I(t', x), \tag{2а}$$

где $I(t, x)$ — фундаментальное решение, которое дается интегралом Меллина

$$I(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp \exp\{pt - xK(p)\}, \quad \gamma = (-i\infty, i\infty), \tag{3}$$

а $\widetilde{V}_0(t)$ отличается от $V_0(t)$ наличием дополнительного множителя в ее фурье-спектре $(p = i\omega)$:

$$\widetilde{V}_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp e^{pt} \sqrt{\varkappa(p)}\, V_0(p). \tag{4а}$$

Здесь введены обозначения

$$K(p) = \frac{p}{C_\infty} \frac{1}{\sqrt{\varkappa(p)}}, \tag{5}$$

$$\varkappa(p) = \left[1 - \frac{\Delta}{\langle \tau \rangle} \int_a^b \frac{g(\tau)}{(p + 1/\tau)} d\tau\right],$$

$g(\tau)$ — спектр времен релаксации.

Если же на границе $x = 0$ задан источник давления $P(t, x = 0) = P_0(t)$, то вместо выражений (2а) будем иметь

$$V(t, x) = (\rho C_\infty)^{-1} \int_0^\infty dt \widetilde{P}_0(t - t') I(t', x), \tag{2б}$$

$$P(t, x) = \int_0^\infty dt P_0(t - t') I(t', x),$$

где $\widetilde{P}_0(t)$ связано с $P_0(t)$ соотношением

$$\widetilde{P}_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp e^{pt} \frac{1}{\sqrt{\varkappa(p)}} P_0(p). \tag{4б}$$

В случае малой дисперсии фазовой скорости $\Delta \ll 1$ величины $K(p)$ и $\varkappa(p)$ можно разложить по этому параметру, так что $K(p)$ можно представить в виде [2]

$$K(p) = \frac{p}{C_\infty} \left[1 + \frac{\Delta}{2\langle\tau\rangle} \int_a^b \frac{g(\tau)}{(p + 1/\tau)} d\tau \right], \tag{6}$$

а отличием эффективных функций источников (4а) и (4б) от заданных на границе можно пренебречь (см. приложение, а также [10]).

В случае единственного релаксационного процесса спектр времен релаксации является дельта-функционным

$$g(\tau') = \delta(\tau' - \tau),$$

так что волновое число будет иметь вид

$$K(p) = \frac{p}{C_\infty} \left[1 + \frac{\Delta/2}{(p\tau + 1)} \right]. \tag{7}$$

Формула (7) полностью совпадает с аналогичным выражением для введенной Нигулом среды с так называемой E-памятью [3, 4] и, как показано Ашенбахом и Чао в работе [11], такая зависимость физически эквивалентна введению небольшой инерционной поправки в уравнение состояния стандартного неупругого тела.

Фундаментальное решение (3) при зависимости (7) волнового числа от частоты ($p = i\omega$) хорошо известно [3, 4, 11, 12]:

$$I(t, x) = e^{-\beta} \left[\delta(t') + e^{-t'/\tau} \left(\frac{\beta}{t'\tau} \right)^{1/2} I_1 (2\sqrt{\beta t'/\tau})\, \vartheta(t') \right], \tag{8, 9}$$

где $t' = t - x/C_\infty$, $\beta = \Delta x/(2C_\infty\tau)$.

Таким образом, подставив (8) в (2а) или (2б), а затем в (1), можно в принципе определить зависимость энергии импульса от пройденного расстояния. Аналитически это можно сделать для достаточно короткого импульса $T \ll \langle\tau\rangle/\Delta$ и $T \ll \langle\tau^2\rangle^{1/2}$, возбуждаемого источником, близким к дельта-функционному (например $V_0(t) \approx V_0\delta(t)$). В этом случае динамика профиля импульса описывается выражением (8). Здесь, однако, следует сделать оговорку: если по отношению ко второму слагаемому при длительности действия источника $T \ll \tau$ его действительно можно рассматривать как дельта-функцию, то по отношению к первому слагаемому необходимо оставить хоть и очень малую, но конечную длительность его действия. В противном случае это приведет к бесконечному вкладу высоких частот в энергию импульса. Эффективно в этом случае для $V_0(t)$ можно воспользоваться одним из предельных представлений дельта-функции, например

$$V_0(t) = V_0 \lim_{T \to 0} (t/T^2) \exp\{-t/T\}, \quad t > 0. \tag{10}$$

Таким образом, в соответствии с (9), (2а) и (1) изменение энергии импульса с пройденным расстоянием описывается выражением

$$E(x) = \rho C_\infty V_0^2 \int_0^\infty dt' e^{-2\beta} [(t'/T^2)^2 \exp\{-2t'/T\} +$$

$$+ 2\frac{\beta}{\tau}(t'/T^2)\exp\{-t'/T\} + e^{-2t'/\tau}\left(\frac{\beta}{t'\tau}\right) I_1^2(2\sqrt{\beta t'/\tau})\Big].$$

Это выражение нетрудно привести к виду

$$E(x) = \rho C_\infty V_0^2 e^{-2\beta}\,[1/(4T) + 2\beta/\tau + 2\beta/\tau \int_0^\infty dx/x e^{-2x^2/\tau} I_1^2(2x\sqrt{\beta/\tau})]. \tag{11}$$

Последний интеграл в (11) вычисляется точно [13], так что последнее слагаемое в (11) оказывается равным

$$\beta/\tau e^\beta \left[I_1(\beta) + 2\sum_{k=1}^\infty (-1)^k I_{1+k}(\beta)\right]. \tag{12}$$

Учитывая соотношение [13]

$$2\sum_{k=1}^\infty (\pm 1)^k I_k(\beta) = e^{\pm\beta} - I_0(\beta),$$

выражение (12) запишется в виде

$$\beta/\tau e^\beta\,[I_0(\beta) - I_1(\beta) + e^{-\beta}].$$

Таким образом, окончательная зависимость энергии короткого импульса от пройденного расстояния описывается выражением

$$E(x) = \rho C_\infty V_0^2 \left[e^{-2\beta}\left(\frac{1}{4T} + \frac{\beta}{\tau}\right) + \frac{\beta}{\tau} e^{-\beta}(I_0(\beta) - I_1(\beta))\right]. \tag{13}$$

Если на границе был задан источник давления $P_0(t)$, то при указанных выше ограничениях в выражении (13) следовало бы поменять общий множитель $\rho C_\infty V_0^2$ на $P_0^2/(\rho C_\infty)$.

Первое слагаемое в (13) представляет собой энергию высокочастотной составляющей импульса: как непосредственно предвестника (первое слагаемое при множителе $e^{-2}\beta$), так и высокочастотных составляющих тела импульса и его интерференции с предвестником (второе слагаемое при множителе $e^{-2}\beta$). Последнее слагаемое в (13) представляет собой вклад средне- и низкочастотных составляющих тела импульса.

На расстояниях $\beta \ll \ln(\tau/T)$ большая часть энергии импульса заключается в его предвестнике. По мере распространения импульса эта энергия перекачивается в тело импульса, первоначально нарастая и сравниваясь с энергией предвестника на расстояниях $\beta \approx \ln(\tau/T)$.

На больших расстояниях основная часть энергии импульса сосредоточена в его теле.

На расстояниях $\beta \geq 1$ можно воспользоваться асимптотическим представлением функции Бесселя мнимого аргумента [14] $I_\nu(\beta) \sim (2\pi\beta)^{-1/2}e^\beta\,[1 + (4\nu^2 - 1)/8\beta]$, используя которое, нетрудно получить $I_0(\beta) - I_1(\beta) = (2\pi\beta)^{-1/2}e^\beta/(2\beta)$, так что асимптотическое представление для $E(x)$ при $\beta \geq 1$ имеет вид

$$E(x) = \rho C_\infty V_0^2 \left[e^{-2\beta}\left(\frac{1}{4T} + \frac{\beta}{\tau}\right) + (2\pi\beta)^{-1/2}/(2\tau)\right]. \tag{14}$$

Анализ асимптотик выражения (13) показывает, что функция $E(x)$ монотонно убывает с пройденным расстоянием, что является следствием диссипативности среды. Однако если на расстояниях $\beta \leq 1$ это убывание происходит по экспоненциальному закону, то на больших расстояниях $\beta \geq \ln(\tau/T)$ закон диссипации энергии сменяется на степенной — обратно пропорционально корню из пройденного расстояния, что характерно для гауссова импульса.

Таким образом, качественная зависимость энергии короткого импульса от пройденного расстояния подобна аналогичной зависимости его амплитуды: боль-

шая часть энергии короткого импульса диссипирует по экспоненциальному закону в слое толщиной $\beta \approx \ln(\tau/T) \sim 1$, где происходит диспергирование импульса. Оставшаяся доля энергии, пропорциональная величине $T/\tau \ll 1$, связанная с гауссовым пакетом, диссипирует более медленно по степенному закону.

Из выражения (14) также следует, что вне зависимости от энергии, вкачиваемой источником в релаксационную среду, энергия импульса на расстояниях $\beta \geq \ln(\tau/T)$ будет определяться выражением $E(x) = \rho C_\infty V_0^2/[(2\pi\beta)^{1/2}(2\tau)]$, которое содержит только амплитудный фактор источника и не связано напрямую с его энергией, т. е. на указанных расстояниях импульс «забывает» о своей первоначальной энергии. Это обстоятельство следует учитывать при генерации коротких акустических импульсов, особенно при лазерных методах их возбуждения [15].

Приложение

Эффективные функции источников

Рассмотрим отличие во временном поведении эффективных функций источников (ЭФИ) $\widetilde{V}_0(t)$ и $\widetilde{P}_0(t)$ от временного поведения граничного источника, задаваемого функциями $\widetilde{V}_0(t)$ или $\widetilde{P}_0(t)$.

Согласно (4а), (4б) функции и определяются выражениями

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{V}_0(t) \\ \widetilde{P}_0(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp e^{pt} \varkappa^{\pm 1/2}(p) \begin{Bmatrix} V_0(p) \\ P_0(p) \end{Bmatrix}, \quad \gamma = (-i\infty, i\infty), \tag{П.1}$$

где

$$\varkappa(p) = \left[1 - \frac{\Delta}{\langle\tau\rangle} \int_a^b \frac{g(\tau)}{(p + 1/\tau)} d\tau\right]. \tag{П.2}$$

В случае малой дисперсии фазовой скорости $\Delta \ll 1$ (что всюду в работе предполагается выполненным) по этому параметру можно разложить, так что в результате $\widetilde{V}_0(t)$ можно записать в виде

$$\widetilde{V}_0(t) = V_0(t) + \frac{1}{2}\delta V_0(t), \tag{П.3}$$

где

$$\delta V_0(t) = \frac{\Delta}{\langle\tau\rangle} \int_0^t dt' V_0(t - t') \int_a^b g(\tau) e^{-t'/\tau} d\tau. \tag{П.4}$$

Выражение для $\widetilde{P}_0(t)$ отличается от (П.3), (П.4) заменой $V_0(t)$ на $P_0(t)$ и другим знаком перед вторым слагаемым в (П.3).

В случае, когда характерная длительность действия источника T оказывается много меньше, чем минимальное время релаксации $T \ll a$, то $V_0(t)$ играет роль дельта-функции по отношению к последнему интегралу в (П.4), если же, напротив, время действия источника намного превышает максимальное время релаксации $T \gg b$, то роль дельта-функции играет последний интеграл в (П.4). Таким образом, $\delta V_0(t)$ имеет следующие асимптотики

$$\delta V_0(t) = \begin{cases} \Delta \cdot V_0(t), & \text{при} \quad T \gg b \\ \dfrac{\Delta}{\langle\tau\rangle} \displaystyle\int_a^b g(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \int_0^\infty V_0(t') dt', & \text{при} \quad T \ll a. \end{cases} \tag{П.5}$$

Следовательно, при длительности импульса большей, чем максимальное время релаксации в среде, отличие ЭФИ от заданной на границе $V_0(t)$ сводится лишь к небольшому увеличению ее амплитуды на величину, пропорциональную дисперсии фазовой скорости в среде.

Если же исходный импульс короче чем минимальное время релаксации в среде, то у ЭФИ появляется дополнительный монотонно спадающий во времени хвост, характерная длительность которого может достигать максимального времени релаксации.

По существу хвост, связанный с откликом среды, заметный при очень короткой длительности исходного импульса, начинает постепенно исчезать на его фоне по мере увеличения длительности последнего, приводя лишь к небольшому увеличению амплитуды. В случае единственного релаксационного процесса в этом можно убедиться непосредственно.

Главный вывод приведенного выше исследования свойств ЭФИ заключается в том, что даже в тех случаях, когда влияние среды приводит к появлению медленно спадающего хвоста (в масштабе изменения функции источника, заданной на границе), в случае малой дисперсии фазовой скорости амплитуда этого хвоста оказывается малой, и более того малым также является и его интегральный вклад. Поэтому в слабодиспергирующих средах отличием ЭФИ от заданной на границе можно пренебрегать.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по высшей школе Российской Федерации в рамках гранта № 2—112—26—47 и в рамках межвузовской научно-технической программы «ФИЗМАТ».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кельберт М. Я., Сазонов И. А.* Распространение импульсов в жидкостях. М.: Наука, 1991.
2. *Дунин С. З., Максимов Г. А.* Распространение импульсов в средах, обладающих спектром времен релаксации // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 6. С. 1048—1055.
5. *Нигул У. К.* Аналитическое решение одномерной обратной задачи импульсной акустодиагностики наследственной среды // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984.
4. *Nigul U.* The modified theory of viscoelasticity: Preprint. Tallinn: Acad. Sci. Estonian SSR, 1983.
5. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982.
6. *Мандельштамм Л. И., Леонтович М. А.* К теории поглощения звука в жидкостях // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. № 3. С. 438—444.
7. *Новик А., Берри Б.* Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975.
8. *Михайлов И. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П.* Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
10. *Максимов Г. А.* Распространение коротких акустических импульсов в неоднородных релаксационных средах // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 4. С. 703—714.
11. *Achenbach J. D., Chao C. C.* A three parameter visco-elastic model particulary suited for dynamic problem // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. P. 245—252.
12. *Дунин С. З.* Распространение волн в слабо диспергирующих средах // ПМТФ. 1986. № 1. С. 138—141.
13. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
14. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.
15. *Гусев В. Э., Карабутов А. А.* Лазерная оптоакустика. М.: Наука, 1991.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию 17.02.93

G. A. Maksimov

SPATIAL ENERGY DEPENDENCE OF A SHORT PULSE PROPAGATING IN A MEDIUM WITH SINGLE PELAXATION PROCESS

A problem of pulse energy alteration along the propagation path is considered. The medium properties are assumed to be described by a single relaxation process characterized by its own relaxation time. An exact expression for pulse energy dependence on the travelled distance is obtained for the case of short initial pulse when the source time of action is significantly less than the relaxation time. In particular, it is demonstrated that at short distances the pulse energy dissipates according to the exponential law, while at large distances the law of dissipation is changed to the power law — inversely proportional to the root of the travelled distance.