АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 5

УДК 534.1, 621.372

© 1993 г. Э. А. Симсон, А. А. Тарануха

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ КВАРЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА

Излагается подход к оптимальному проектированию пьезоэлемента кварцевого резонатора, совершающего сдвиговые колебания по толщине, обеспечивающий максимальную отстройку рабочей частоты от паразитных ангармоник.

Кварцевые резонаторы нашли широкое применение в производстве измерителей, микропроцессорной и разнообразной радиоэлектронной аппаратуры благодаря сочетанию высокостабильных свойств кристаллической структуры с возможностью преобразования механических колебаний в электрические и наоборот.

Важным элементом проектирования резонатора является выбор геометрической формы пьезоэлемента (формы контура и распределения толщины) и электродного покрытия. Среди ряда требований к проекту наиболее важными являются: обеспечение заданной резонансной частоты механических колебаний, высокая добротность, включая минимальное рассеяние энергии в материале и в креплениях, отсутствие вблизи рабочей частоты «паразитных» резонансов, минимальная эквивалентная динамическая индуктивность на основной гармонике. Одна из важнейших задач пьезотехники — создание моночастотных кварцевых резонаторов.

Математический подход к проблеме оптимального проектирования продемонстрируем на примере задачи управления спектром колебаний высокочастотного кварцевого резонатора, совершающего сдвиговые колебания по толщине. Число нежелательных резонансов и их близость к рабочей частоте определяют качество резонатора по частотной характеристике. Увеличение полосы частот, свободной от «паразитных» резонансов, обычно производится изменением радиуса кривизны линзы [1], формы и размеров электродного покрытия [2, 3]. Наилучший вариант находят путем перебора с последующей доводкой.

В данной работе предлагается подход к определению распределения толщины пьезоэлемента, обеспечивающего максимальную отстройку от «паразитных» резонансов, основанный на применении метода конечных элементов (МКЭ) и алгоритмов оптимального проектирования.

Целесообразность использования МКЭ в задачах управления спектром колебаний определяется простотой учета изменений в широких пределах формы пьезоэлемента, т. е. возможностью выбора большого набора переменных варьирования. Отсутствие в отечественной литературе сообщений о конечно-элементном моделировании связанных сдвиговых колебаний по толщине и изгибных колебаний кварцевых резонаторов привело к необходимости создания специализированного треугольного конечного элемента постоянной толщины.

Предлагаемый в данной работе элемент позволяет выделить из широкого и плотного спектра резонансные частоты и формы колебаний, возбуждаемые переменным электрическим полем с учетом «захвата» энергии, когда энергия механических колебаний локализуется в подэлектродной области, описывать геометрию пьезоэлемента с помощью дискретного набора значений толщин h_i $(i = 1, N)$, где N — общее количество конечных элементов, которые рассматриваются как компоненты вектора варьируемых параметров $\mathbf{h}$.

Для смещений U и V в плоскости элемента (рис. 1) применяется линейная аппроксимация, для изгибных W — квадратичная. По толщине элемента предполагается синусоидальный закон распределения смещений. Если ввести в рас-

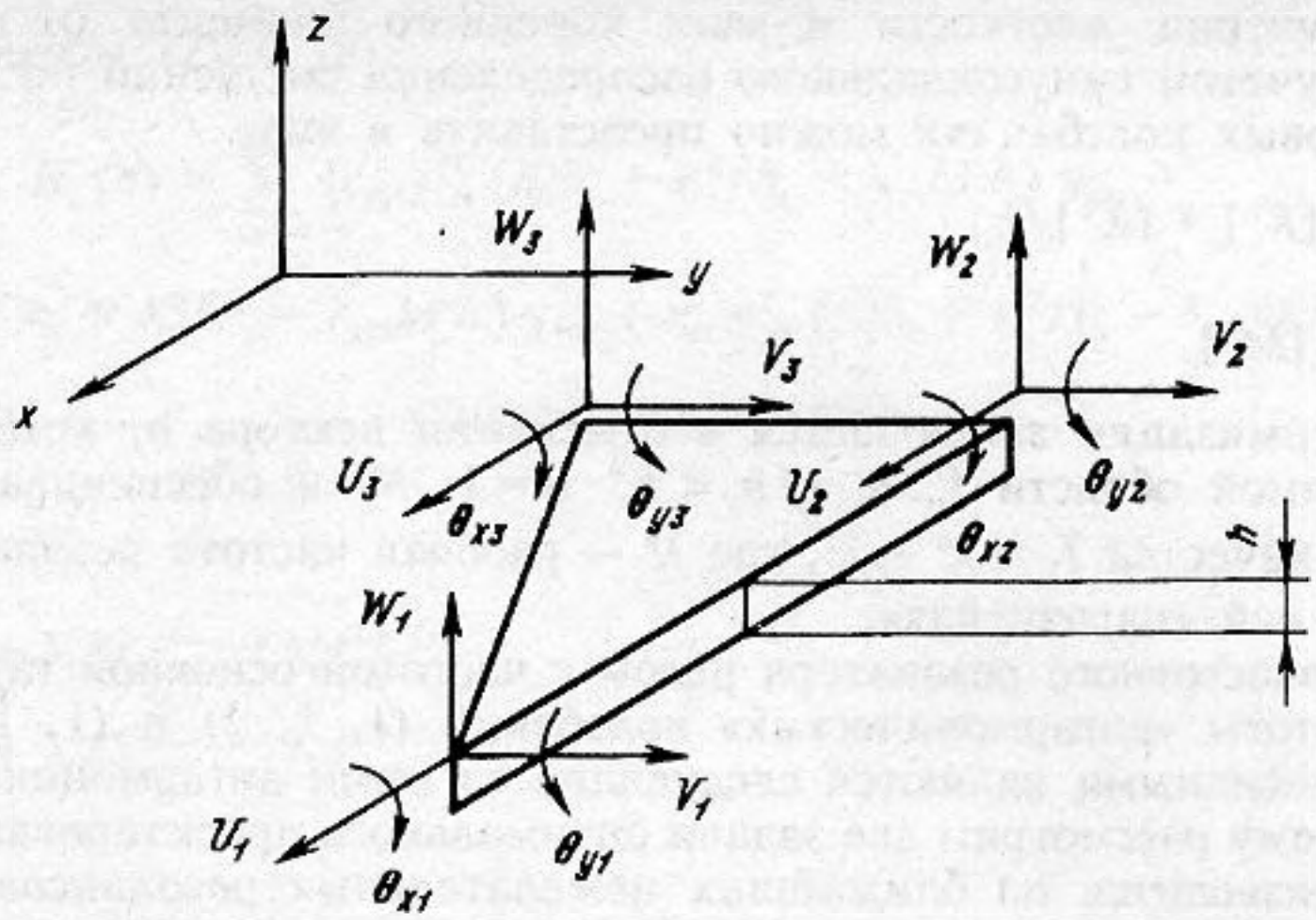

Рис. 1. Конечный элемент постоянной толщины, позволяющий моделировать связанные сдвиговые колебания по толщине и изгибные колебания

смотрение барицентрические координаты треугольного элемента L_1, L_2, L_3, то аппроксимирующие функции можно представить в виде:

$$U = (U_1L_1 + U_2L_2 + U_3L_3)\sin(n\pi z/t) + (\theta_{y1}L_1 + \theta_{y2}L_2 + \theta_{y3}L_3)\,z,$$

$$V = (V_1L_1 + V_2L_2 + V_3L_3)\sin(n\pi z/t) + (\theta_{x1}L_1 + \theta_{x2}L_2 + \theta_{x3}L_3)\,z,$$

$$W = (W_1L_1 + W_2L_2 + W_3L_3) + (-b_3L_1L_2 + b_2L_1L_3)\,\theta_{x1}/2 +$$

$$+ (-b_1L_3L_2 + b_3L_1L_2)\,\theta_{x2}/2 + (-b_2L_1L_3 + b_1L_2L_3)\,\theta_{x3}/2 +$$

$$+ (-c_3L_1L_2 + c_2L_1L_3)\,\theta_{y1}/2 +$$

$$+ (-c_1L_3L_2 + c_3L_1L_2)\,\theta_{y2}/2 +$$

$$+ (-c_2L_1L_3 + c_1L_2L_3)\,\theta_{y3}/2.$$

Матрица жесткости элемента

$$[K] = \iiint_V [B]^T\,[D]\,[B]\,dv$$

и матрица масс

$$[M] = \iiint_V [N]^T\,\rho\,[N]\,dv,$$

где $[N]$ — матрица функций форм, $[B]$ — матричный оператор, получаемый из соотношений Коши, $[D]$ — матрица упругих постоянных материала, получаются аналитическим интегрированием с учетом соотношения:

$$\iiint_V L_1^aL_2^bL_3^c = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}\,\Delta.$$

Собственные колебания резонатора описываются матричным уравнением

$$[K(\mathrm{h}) - \lambda M(\mathrm{h})]\mathrm{y} = 0, \qquad (1)$$

где y — вектор обобщенных узловых перемещений, K и M — глобальные матрицы жесткости и масс, получаемые суперпозицией матриц конечных элементов

$$[K] = \sum_{i=1}^{N} [K(\mathrm{h})]_i, \qquad [M] = \sum_{i=1}^{N} [M(\mathrm{h})]_i.$$

Зависимость матриц жесткости и масс конечного элемента от варьируемых параметров с учетом синусоидального распределения смещений по толщине при изгибно-сдвиговых колебаниях можно представить в виде

$$[K(\mathbf{h})]_i = h_i[K^1]_i + [K^2]_i/h_i, \tag{2}$$

$$[M(\mathbf{h})]_i = h_i[M^1]_i.$$

Задача оптимизации заключается в отыскании вектора $\mathbf{h}$, который принадлежит допустимой области V: $h_i^- < h_i < h_i^+$ $(i = 1, N)$ и обеспечивает максимум функционалу качества $I_1 = \lambda^n - \lambda^p$, где λ^p — рабочая частота резонатора, а λ^n — ближайшая к ней «паразитная».

Для высокочастотного резонатора рядом с частотой основной гармоники расположены частоты «ангармонических» колебаний (1, 1, 2) и (1, 1, 3). Однако наиболее интенсивными являются следующие за ними ангармоники (1, 1, 3) и (1, 3, 1). Поэтому рассмотрим две задачи оптимального проектирования: в первой отстройка производится из ближайших нежелательных резонансов и максимизируется функционал $I_1 = \max(\min\{\lambda_{112}, \lambda_{121}\} - \lambda_{111})$, во второй — от наиболее интенсивных и легко возбуждаемых $I_2 = \max(\min\{\lambda_{113}, \lambda_{131}\} - \lambda_{111})$.

На основании предельного свойства степенной нормы заменим функционалы их приближенными аппроксимациями в дифференцируемой форме:

$$I_1 = \max((\lambda_{112}^{-n} + \lambda_{121}^{-n})^{-1/n} - \lambda_{111}), \tag{3}$$

$$I_2 = \max((\lambda_{113}^{-n} + \lambda_{131}^{-n})^{-1/n} - \lambda_{111}). \tag{4}$$

Величину n для практических расчетов можно принять равной 10—12.

Максимизация функционала может осуществляться различными методами математического программирования. Одним из наиболее мощных является метод последовательной линеаризации, хорошо зарекомендовавший себя при решении многих практических задач. Однако выбранная постановка задачи оптимизации позволяет находить решение на основании подхода, аналогичного дискретному принципу максимума, что значительно сокращает время, затрачиваемое на проведение оптимального проектирования. Суть его в том, что оптимальное решение находится из условия максимума выпуклой аппроксимации гамильтониана методом последовательных приближений.

Гамильтониан выбирается таким образом, чтобы составляющие градиент функционала определялись как производные по явно входящим варьируемым параметрам. Требование выпуклости не накладывается. Возможности использования этого подхода к задачам частотно-весовой оптимизации стержневых систем, описанных конечно-элементными моделями, исследованы в работе [4].

Для функционала (3) гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H(h) = {} & c_{121}(\psi_{121}^T([K(\mathbf{h})] - \lambda_{121}[M(\mathbf{h})])\mathbf{y}_{121}) + \\ & + c_{112}(\psi_{112}^T([K(\mathbf{h})] - \lambda_{112}[M(\mathbf{h})])\mathbf{y}_{112}) + \\ & + c_{111}(\psi_{111}^T([K(\mathbf{h})] - \lambda_{111}[M(\mathbf{h})])\mathbf{y}_{111}), \end{aligned} \tag{5}$$

где ψ_i — решение сопряженной задачи

$$[K^T - \lambda_i M^T]\psi_i = -\frac{\partial I}{\partial \mathbf{y}_i} = 0.$$

Очевидно, что ψ_i с точностью до постоянного множителя совпадает с решением исходной системы (1).

Тогда с учетом (2) и (5):

$$H(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{N} H_i(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{N} \{c_{121}\mathbf{y}_{121}^T (K_i^1 h_i + K_i^2/h_i - \lambda_{121} M_i^1 h_i)\, \mathbf{y}_{121} +$$

$$+ c_{112}\mathbf{y}_{112}^T (K_i^1 h_i + K_i^2/h_i - \lambda_{112} M_i^1 h_i)\, \mathbf{y}_{112} + c_{111}\mathbf{y}_{111}^T (K_i^1 h_i + K_i^2/h_i - \lambda_{111} M_i^1 h_i)\, \mathbf{y}_{111}\}. \qquad (6)$$

Коэффициенты c_{111}, c_{112}, c_{121} находятся из условия

$$\mathrm{grad}_{\mathbf{h}} I = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{h}},$$

$$c_{112} = (\lambda_{112}^{-n} + \lambda_{121}^{-n})^{-(1+n)/n}\, \lambda_{112}^{-n-1},$$

$$c_{121} = (\lambda_{112}^{-n} + \lambda_{121}^{-n})^{-(1+n)/n}\, \lambda_{121}^{-n-1},$$

$$c_{111} = -1.$$

Условия оптимальности принимают вид

$$\left(\frac{\partial H^+}{\partial \mathbf{h}}, \mathbf{h}_{\mathrm{opt}}\right) = \max_{\mathbf{h}\in V} \left(\frac{\partial H^+}{\partial \mathbf{h}}, \mathbf{h}\right) = \sum_{i=1}^{N} \max_{h_i^- \le h_i \le h_i^+} \left(\frac{\partial H_i}{\partial h_i}, h_i\right). \qquad (7)$$

Условия оптимальности (7) принимают форму принципа максимума, если $H_i(\mathbf{h})$ $(i = 1, N)$ представляет на интервале варьирования $h_i^- \le h_i \le h_i^+$ выпуклую вверх функцию. Тогда оптимальная конфигурация определяется из соотношения:

$$h_i^{\mathrm{opt}} = \begin{cases} h_i^0, & \text{если } h_i^- \le h_i^0 \le h_i^+, \\ h_i^-, & \text{если } h_i^0 \le h_i^-, \\ h_i^+, & \text{если } h_i^0 \ge h_i^+, \end{cases} \qquad (8)$$

где точка h_i^0 — точка максимума функции H_i.

В гамильтониане выпуклым вверх является только третье слагаемое, поэтому непосредственное использование его в вычислительном процессе приводит к неудаче, процесс расходится. Однако можно ввести некоторую выпуклую вверх аппроксимацию гамильтониана так, чтобы производная по явно входящему параметру представляла собой составляющую градиента.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{H}_i = c_{121}\mathbf{y}_{121}^T (K_i^1 h_i - A_i h_i^2 - \lambda_{121} M_i^1 h_i)\, \mathbf{y}_{121} +$$

$$+ c_{112}\mathbf{y}_{112}^T (K_i^1 h_i - A_i h_i^2 - \lambda_{112} M_i^1 h_i)\, \mathbf{y}_{112} +$$

$$+ c_{111}\mathbf{y}_{111}^T (K_i^1 h_i + K_i^2/h_i - \lambda_{111} M_i^1 h_i)\, \mathbf{y}_{111},$$

выпуклую на интервале варьирования. Значения параметра A определяются из условия

$$\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial h_i} = -\frac{\partial I}{\partial h_i}, \quad A_i = K_i^2/(2h_i^3).$$

Тогда условия оптимальности принимают вид:

$$\left(\frac{\partial \tilde{H}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}}, \mathbf{h}^{\mathrm{opt}}\right) = \sum_{i=1}^{N} \max_{h_i^- \le h_i \le h_i^+} \left(\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial h_i}, h_i\right). \qquad (9)$$

Соотношения (1), (8), (9) представляют собой замкнутую задачу оптимального проектирования. Для ее решения применяется метод последовательных приближений. Аналогично максимизируется функционал (4).

Существует, однако, и другой путь получения оптимальной конфигурации, обеспечивающей максимальную отстройку от паразитных резонансов.

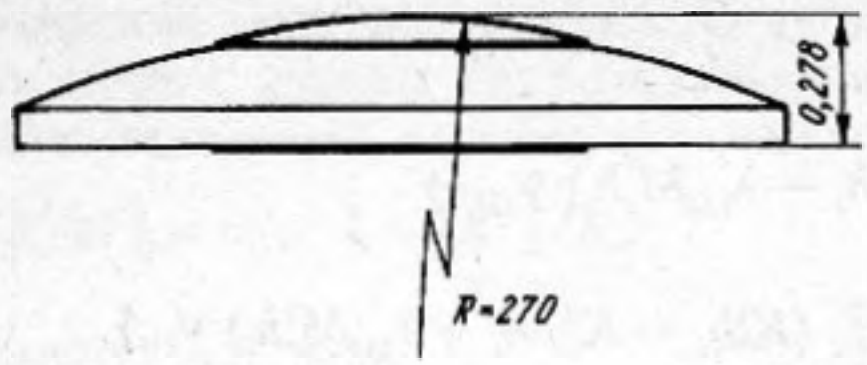

Рис. 2. Базовый вариант пьезоэлемента кварцевого резонатора

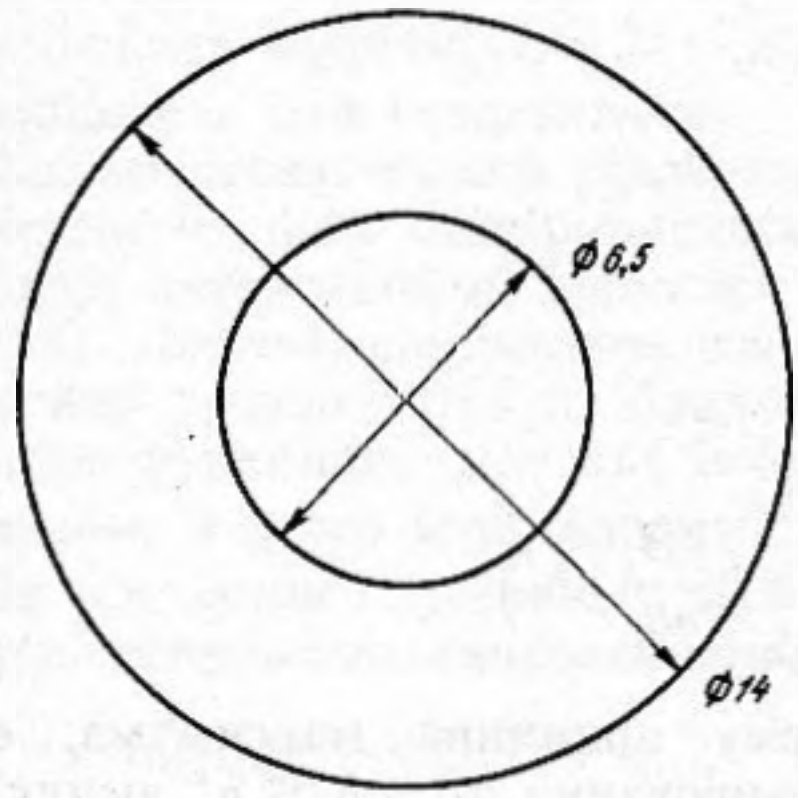

Рис. 2

Рис. 3. Распределение сдвиговых смещений по толщине (*1*) и изгибных составляющих (*2*) по оси *x* для основной гармоники (1, 1, 1) базового варианта резонатора

Рис. 4. Распределение сдвиговых смещений по толщине (*1*) и изгибных составляющих (*2*) по оси *x* для ангармоники (1, 3, 1) базового варианта резонатора

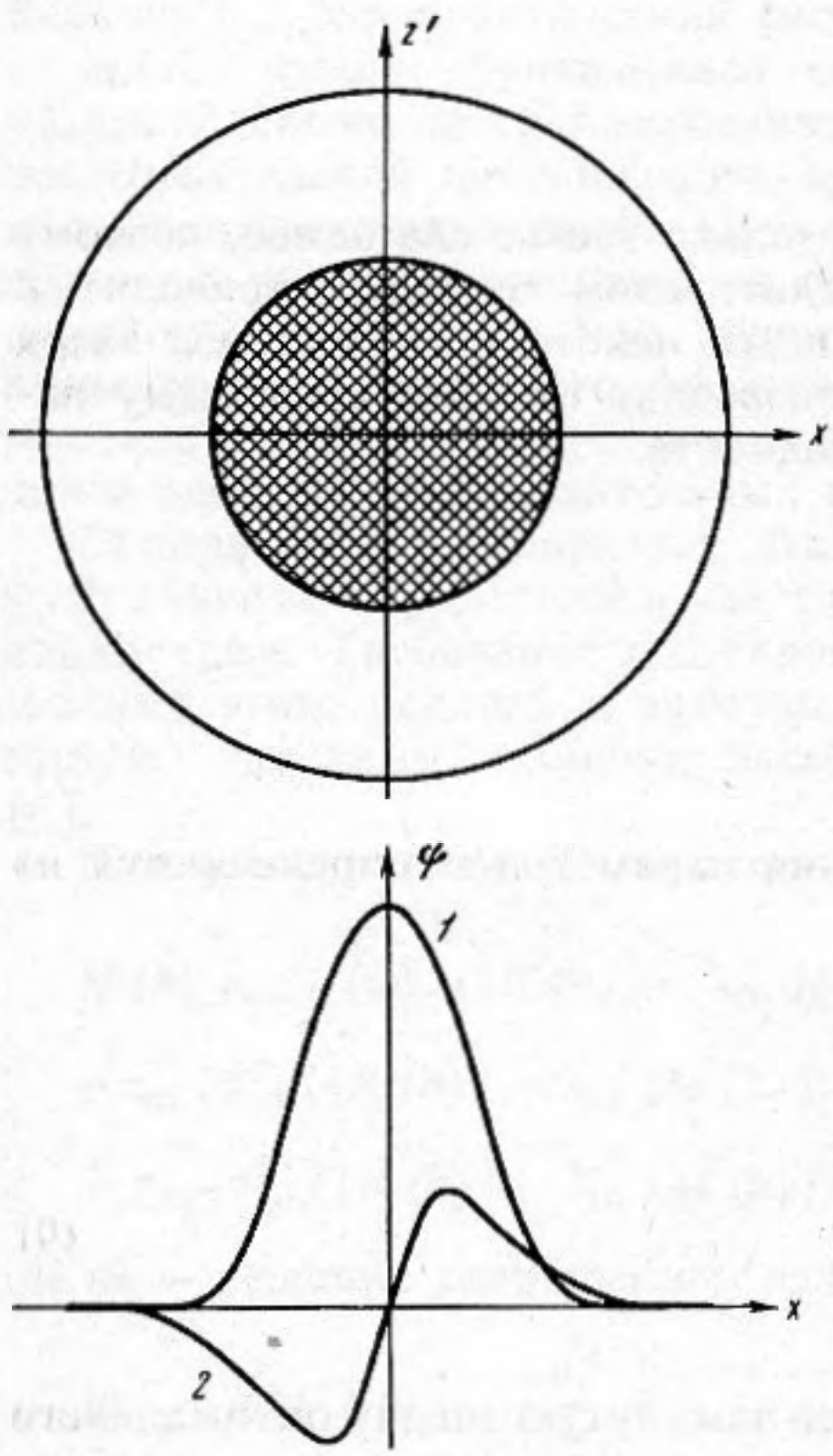

Рис. 3

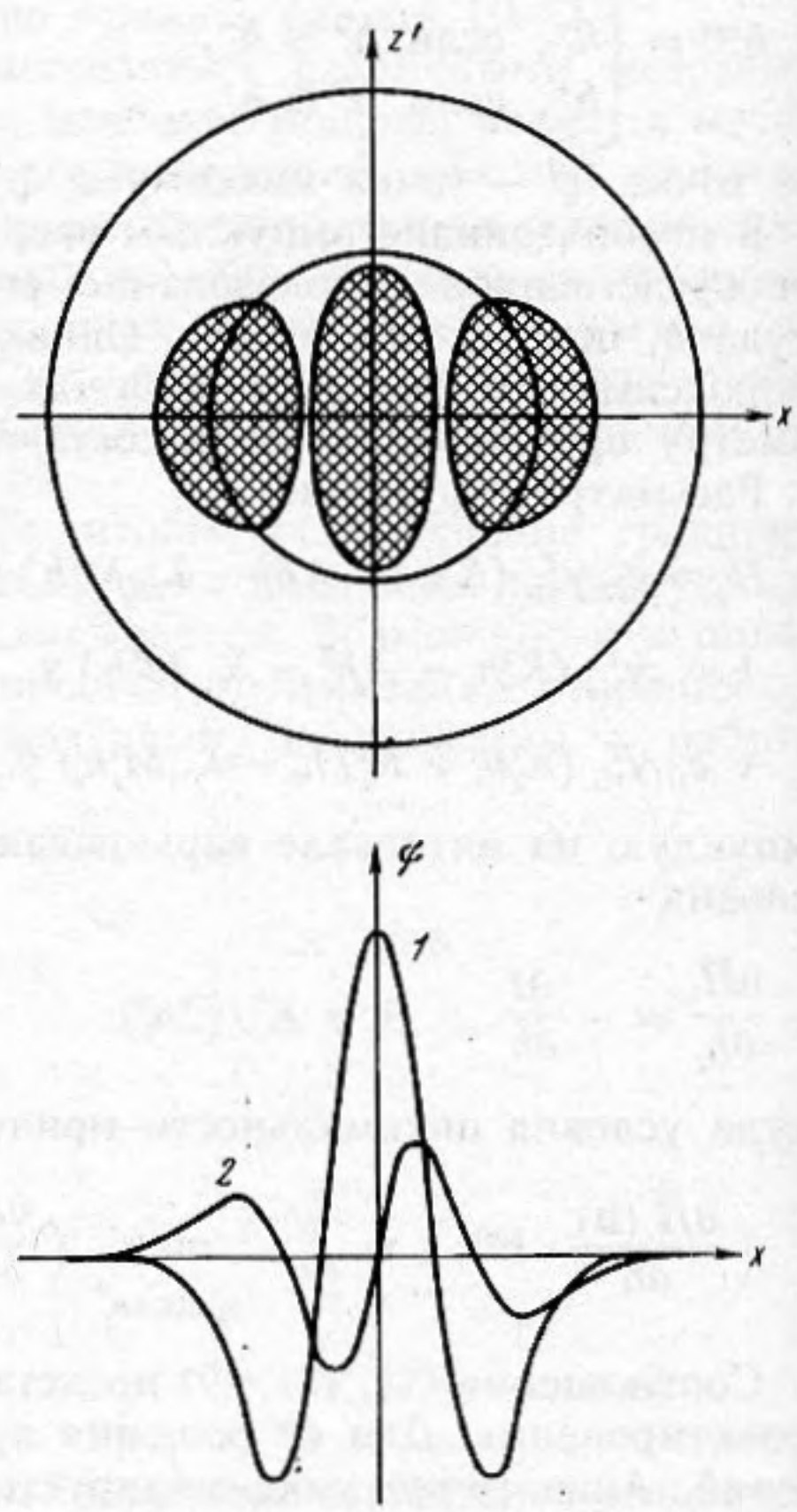

Рис. 4

Таблица 1

Ангармоника	Базовый вариант (рис. 1, *а*)	
	экспериментальное значение частоты, МГц	расчетное значение частоты, МГц
(1, 1, 1)	5,984231	6,004835
(1, 1, 2)	—	6,096303
(1, 2, 1)	—	6,107379
(1, 1, 3)	6,152575	6,188548
(1, 3, 1)	6,196537	6,211028

Таблица 2

Ангармоника	Оптимальный вариант (рис. 5, *а*)	Оптимальный вариант (рис. 5, *б*)
	частоты, МГц	
(1, 1, 1)	6,007234	5,914402
(1, 1, 2)	6,282272	6,165893
(1, 2, 1)	6,301345	6,190111
(1, 1, 3)	6,407729	6,386209
(1, 3, 1)	6,454170	6,417479

Запишем гамильтониан функционала (1) в следующем виде:

$$H = ky_{121}^T (K - \lambda_{121}M)\, y_{121} +$$

$$+ky_{112}^T (K - \lambda_{112}M)\, y_{112} + (1 - k)\, y_{111}^T (K - \lambda_{111}M)\, y_{111}, \qquad (10)$$

где $k \in [0, 1]$ — скалярный параметр, при $k = 0$ происходит минимизация λ_{111}, при $k = 1$ — максимизация частот «паразитных» резонансов (1, 1, 2) и (1, 2, 1).

Выбирая значения k из интервала [0, 1], получаем в плоскости $(\min(\lambda_{121}, \lambda_{112}), \lambda_{111})$ кривую, описывающую множество Парето. Коэффициент k, при котором функционал (3) максимален, вычисляется последовательными приближениями.

С целью демонстрации эффективности предлагаемого подхода решена задача оптимизации формы пьезоэлемента высокочастотного резонатора АТ-среза. В качестве базового варианта рассматривался плосковыпуклый резонатор, изображенный на рис. 2: диаметр пьезоэлемента 14 мм, диаметр электрода 6,5 мм, толщина в центре 0,278 мм, радиус кривизны 270 мм. В качестве варьируемых параметров рассматривались значения толщин в 153 точках. Толщины варьировались в пределах 0,01 мм от базовых значений. Расчетные значения резонансных частот базового варианта (табл. 1), полученные с помощью разработанного конечного элемента, хорошо согласуются с экспериментально измеренными [5]. Вычисления производились на PC AT при разбиении области на 288 элементов (765 степеней свободы). Для определения собственных частот и форм использовался алгоритм метода Ланцоша с полной переортогонализацией векторов подпространства Крылова. Глобальные матрицы жесткости и масс представлялись в профильном виде в соответствии со схемой Дженнингса [6]. На рис. 3 изображено рассчитанное распределение сдвиговых смещений по толщине и изгибных смещений по оси x для основной гармоники (1, 1, 1), а на рис. 4 — для ангармоники (1, 3, 1). Темные участки соответствуют амплитуде сдвиговых смещений по толщине на поверхности пьезоэлемента, превышающей 0,1 от максимального смещения в центре.

Максимизация функционала (3) с использованием гамильтониана в форме (9) приводит к оптимальной конфигурации, изображенной на рис. 5, *а*. Значения

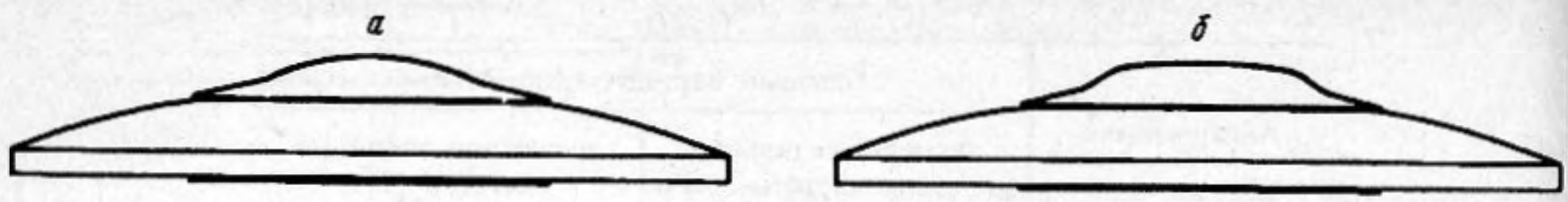

Рис. 5

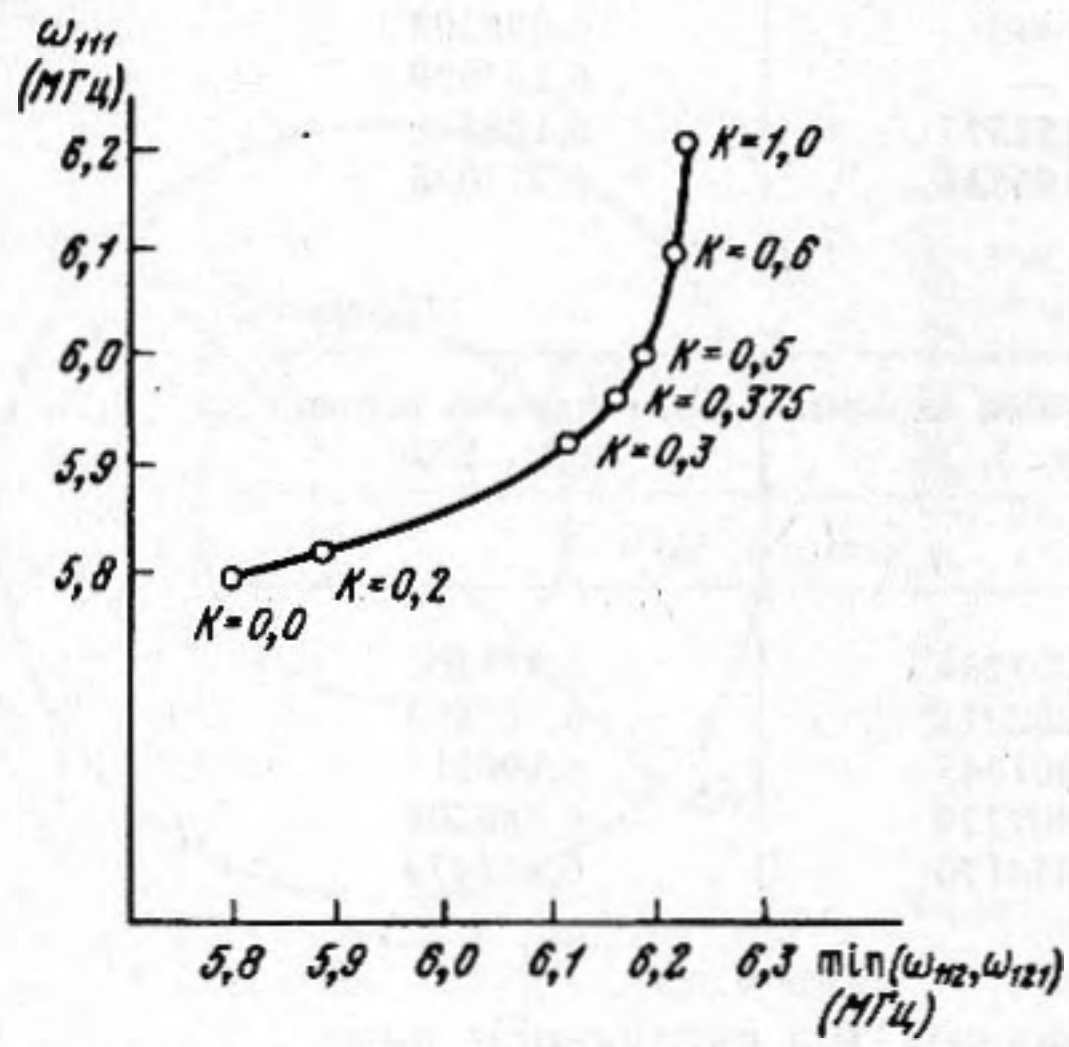

Рис. 6

Рис. 5. Оптимальные конфигурации пьезоэлемента кварцевого резонатора, обеспечивающие максимальную отстройку от ближайших ангармонических резонансов (*а*) и от наиболее интенсивных резонансов (*б*)

Рис. 6. Кривая множества Парето

толщин в центральной части подэлектродной области соответствуют верхним геометрическим ограничениям. Переход на нижние геометрические ограничения происходит на расстоянии $^1/_3$ радиуса электрода.

Интервал между основной гармоникой (1, 1, 1) и ближайшей «паразитной» (1, 1, 2) равен 0,275 МГц, тогда как в базовом варианте всего 0,092 МГц.

Полоса частот до ближайшего из наиболее интенсивных резонансов (1, 1, 3) увеличилась до 0,401 МГц, в базовом варианте — 0,184 МГц (табл. 2).

Максимизация функционала (4) приводит к оптимальной конфигурации, изображенной на рис. 5, *б*. В отличие от предыдущей, переход с верхнего на нижнее ограничение расположен на расстоянии $^2/_3$ радиуса электрода.

Интервал между гармониками (1, 1, 1) и (1, 1, 3) увеличился до 0,472 МГц, в то время как ширина полосы частот, свободной от «паразитных» резонансов, уменьшилась до 0,251 МГц по сравнению с предыдущим вариантом (табл. 2).

Использование подхода, связанного с отысканием множества Парето гамильтониана (10), потребовало решения ряда задач оптимизации при различных коэффициентах (табл. 3). Кривая, описывающая множество Парето, изображена на рис. 6. Максимум функционала (3) получен при $k = 0{,}375$, оптимальная конфигурация совпадает с изображенной на рис. 5, *а*.

Таблица 3

Параметр k	Частота основной гармоники, МГц	Частота ближней паразитной ангармоники, МГц	Значение функционала, МГц
0,0	5,81686	5,91178	0,09492
0,2	5,82708	5,96386	0,13678
0,3	6,00355	6,27193	0,26838
0,375	6,00723	6,28227	0,27504
0,5	6,03191	6,29784	0,26593
0,6	6,10016	6,33233	0,23217
1,0	6,24091	6,34376	0,10285

Таким образом, можно сделать вывод о возможности эффективного использования методов оптимального проектирования при отстройке резонатора от «паразитных» ангармоник путем варьирования распределением толщины пьезоэлемента. При этом целесообразно вести отстройку от наиболее интенсивных и легко возбуждаемых резонансов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смагин А. Г., Ярославский М. Н.* Пьезоэлектричество кварца и кварцевые резонаторы. М.: Энергия, 1970. 272 с.
2. *Постников И. И., Самойлов В. С., Моргаловский В. П.* Расчет динамической индуктивности основного и побочных колебаний высокочастотных кварцевых резонаторов с осесимметричными пьезоэлементами АТ-среза//РЭ. 1984. Т. 29. № 4. С. 643—649.
3. *Букштам Б. М., Богуш М. Е., Поздняков П. Г., Орловская Р. Я., Герасимов Е. В.* Влияние формы и размеров электродного покрытия на спектр ангармонических колебаний линзовых пьезоэлементов//Электрон. техника. 1978. № 1 (20). С. 10—19.
4. *Богомолов С. И., Симсон Э. А.* Оптимизация механических систем в резонансных режимах. Харьков: Вища шк. 1983. 153 с.
5. *Hertl S., Wimmer L., Beness E.* Investigation of the amplitude distribution of AT-cut quartz crystal// J. Acoust. Soc. Amer. 1985. V. 76. № 4. P. 1337—1343.
6. *Jennings A.* A compact storage scheme for the solution of symmetric linear simultaneous equations// Comput. J. 1986. V. 9. P. 281—285.

Харьковский государственный
политехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
17.09.92

E. A. Simson, A. A. Taranukha

SHAPE OPTIMIZATION OF QUARTZ RESONATOR PIEZOELEMENT

A method for spectrum control of quartz resonator piezoelements operated in coupled thickness-shear and flexural vibrations utilizing the optimization technique and the finite elements method is proposed. The design problem is to maximize the gap between the fundamental harmonic and parasitic anharmonics. The thicknesses of finite elements are used as design parameters. The optimum shape of piezoelement is found out by the discrete maximum principle.