АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 5

УДК 534.231:532.542

© 1993 г. Ю. В. Фирсов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ОГРАНИЧЕННОМ КАНАЛЕ С РАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ ПЛАСТИНОЙ НА ВХОДЕ

Исследованы поперечные акустические колебания в ограниченном входной и выходной решетками плоском канале с разделительной пластиной на входе. Рассмотрена возможность отрывного обтекания задней кромки пластины акустической волной. Образующаяся при этом вихревая пелена сносится вниз по потоку без затухания со скоростью среднего течения. Особое внимание уделено решению вблизи задней кромки пластины. Расчет течения в канале проводился методом конечных разностей.

Диссипация акустических поперечных колебаний в канале прямоугольного сечения и бесконечной длины с разделительной пластиной, установленной во всю ширину вдоль центральной линии канала и простирающейся от 0 до $-\infty$, изучалась в [1]. В этой работе предполагалось, что ослабление звука обусловлено переходом части акустической энергии в энергию вихревой дорожки вблизи задней кромки пластины. В [2] исследовалось распространение звука в канале с тонкой твердой или проницаемой разделительной пластиной конечной длины. Представленные результаты расчетов иллюстрируют зависимость уровня ослабления падающей звуковой волны от длины, местоположения пластины и числа Маха стационарного потока.

В настоящей работе изучаются акустические свойства канала, ограниченного входной и выходной решетками со сверхкритическим перепадом давления (свойства которых в акустическом плане описаны в работе [3]), с разделительной пластиной, прикрепленной передней кромкой к входной решетке. Сравниваются два физически возможных вида течения в таком канале: потенциальное во всем объеме; потенциальное, за исключением области, занятой вихревой пеленой, берущей начало на задней кромке пластины и движущейся вниз по потоку. Интенсивность вихревой пелены определяется из условия выполнения гипотезы Жуковского на задней кромке. Исследуется влияние длины пластины и числа Маха стационарного потока.

Рассмотрим канал, ограниченный жесткими стенками, по которому течет однородная жидкость. Все длины в декартовой системе координат (x, y, z) определяются в долях расстояния (D) между стенками, при этом ось x направлена по основному потоку, а ось y — перпендикулярна стенкам. В направлении z стенки имеют бесконечную протяженность. В направлении x в сечениях $x = 0$ и $x = L$ расположены соответственно входная и выходная решетки. Бесконечно тонкая непроницаемая разделительная пластина длиной l занимает положение $x \in [0, l]$, $y = 0$ посередине канала параллельно стенкам. Жидкость представляет собой идеальный газ, стационарный поток которого описывается следующими параметрами: c_0 — скорость звука, u_0 — скорость потока, ρ_0 и p_0 — плотность и давление соответственно, γ — показатель адиабаты.

Так как влияние пластины на акустические свойства канала анализируется в линейном по возмущениям приближении, то можно сказать, что акустическое поле имеет единственную частоту ω, а все возмущенные величины, отмечаемые в дальнейшем штрихом, могут быть описаны с помощью комплексных амплитуд, помноженных на $\exp(i\omega t)$.

При принятых допущениях уравнение для потенциала пульсационной скорости Φ имеет вид [4]

$$(1 - M^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - 2ikM\frac{\partial\Phi}{\partial x} + k^2\Phi = 0, \tag{1}$$

где $M = u_0/c_0$, $k = \omega/c_0$. После обезразмеривания и преобразования переменных

$$x = D\sqrt{1 - M^2}\,X, \quad y = DY, \quad k = \frac{\sqrt{1 - M^2}}{D}k^*,$$

$$\Phi = c_0 D\Psi \exp(ik^*MX) \tag{2}$$

уравнение (1) сводится к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} + (k^*)^2\Psi = 0, \tag{3}$$

которое требуется решить при следующих граничных условиях:

$$u_y' = 0 \quad \text{при} \quad Y = \pm\frac{1}{2},$$

$$u_y' = 0 \quad \text{при} \quad Y = \pm 0,\ 0 \le X < b \left(b = \frac{l}{D\sqrt{1 - M^2}}\right) \tag{4}$$

(условие непротекания на стенках канала и на пластине),

$$\frac{u_x'}{u_0} = \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) \quad \text{при} \quad X = \frac{L}{D\sqrt{1 - M^2}} \tag{5}$$

(условие квазистационарного истечения через выходную решетку [3])

$$\delta G = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{u_x'}{u_0} = a\sin(\pi Y),\ a \ll 1 \quad \text{при} \quad X = 0 \tag{6}$$

(условие задания на входной решетке возмущений расхода, отвечающих первой тангенциальной форме колебаний в канале без пластины).

К уравнению (3) и граничным условиям (4)—(6) необходимо добавить связь физических величин с потенциалом Ψ. С учетом изоэнтропичности колебаний, интеграла Коши — Лагранжа и соотношений (2) получим

$$\delta u_x = \frac{u_x'}{u_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial\Psi}{\partial X} + ik^*\Psi\right)\exp(ik^*MX),$$

$$\delta u_y = \frac{u_y'}{u_0} = \frac{\partial\Psi}{\partial X}\exp(ik^*MX), \tag{7}$$

$$\delta P = \frac{p'}{p_0} = -\frac{\gamma}{\sqrt{1 - M^2}}\left(M\frac{\partial\Psi}{\partial X} + ik^*\Psi\right)\exp(ik^*MX),$$

$$\delta G = \delta\rho + \delta u_x = \frac{\sqrt{1 - M^2}}{M}\frac{\partial\Psi}{\partial X}\exp(ik^*MX).$$

В сформулированной задаче на вынужденные колебания определялись характеристики течения по формулам (7), а также входной импеданс рассматриваемого канала, который, по определению [5], есть отношение безразмерных пульсаций давления $\delta P = p'/p_0$ к безразмерным пульсациям расхода $\delta G = G'/G_0$ у входной

решетки, отвечающих исследуемой моде колебаний. Так как постановка разделительной пластины приводит к искажению акустического поля вблизи входной решетки [6], т. е. поле фактически содержит суперпозицию нескольких мод колебаний, под входным импедансом понималось отношение $(\delta P/\delta G)_{Y=\pm 1/2}$. Из (7) следует, что в этом случае входной импеданс выражается через потенциал

$$N(\omega) = \left(\frac{\delta P}{\delta G}\right)_{Y=\pm 1/2} = -\frac{\gamma M^2}{1-M^2}\left(1 + \frac{ik^*}{M}\frac{\Psi}{\partial\Psi/\partial X}\right)_{Y=\pm 1/2}. \tag{8}$$

Трудности решения сформулированной задачи заключаются не в нахождении решения уравнения (3), а в удовлетворении граничному условию (4) для разделительной пластины. В теории электрических волноводов показано [7], что если граничная поверхность имеет так называемые геометрические сингулярности, например острые ребра, то уравнения Максвелла допускают существование множества непрерывных решений. Дополнительное физическое условие, необходимое для однозначного определения решения, в этом случае известно как условие на ребре. Оно заключается в требовании конечности энергии, запасенной в окрестности острой кромки ребра. Применительно к аэродинамике из этого требования следует, что ни одна из компонент поля скоростей в окрестности острой кромки ребра не может возрастать быстрее, чем $R^{-1+\tau}$ ($\tau > 0$, R — расстояние до кромки). Величина τ определяется конфигурацией острой кромки ребра. Таким образом, для однозначного нахождения непрерывного потенциального физически приемлемого решения граничные условия необходимо дополнить условием на острой кромке пластины.

Перейдем к цилиндрической системе координат с началом на острой кромке ($R^2 = (k^*)^2((X-b)^2 + Y^2)$, $\theta = \operatorname{arctg}(Y/(X-b))$), тогда уравнение (3) в окрестности кромки пластины преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \Psi = 0. \tag{9}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию непротекания на пластине

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)_{\theta=\pm\pi} = 0, \tag{10}$$

ищем в виде $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, где $\Psi_1 = \sum_n Z_n(R)\cos(n\theta)$, $\Psi_2 = \sum_m W_m(R)\sin[(m - \frac{1}{2})\theta]$. Нетрудно проверить, что Ψ_1 и Ψ_2 удовлетворяют граничным условиям (10), если n и m — целые числа, при этом функции Z_n и W_m являются решениями дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left[R\left(\frac{dZ_n}{dR}\right)\right] + \left(1 - \frac{n^2}{R^2}\right)Z_n = 0,$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left[R\left(\frac{dW_m}{dR}\right)\right] + \left[1 - \frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}{R^2}\right]W_m = 0$$

и могут быть представлены в виде

$$Z_n = A_n J_n(R) + C_n Y_n(R),$$

$$W_m = B_m J_{m-1/2}(R) + D_m Y_{m-1/2}(R), \tag{11}$$

где J_n, $J_{m-1/2}$, Y_n, $Y_{m-1/2}$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно порядка n и $(m-1/2)$, а A_n, B_m, C_n, D_m — произвольные константы. Вышеприведенная асимптотика для поля скоростей требует (см. (7)), чтобы в окрестности

кромки потенциал был ограниченной функцией, поэтому в (11) следует положить $C_n \equiv 0$, $D_m \equiv 0$, а индексы n и $(m - 1/2)$ считать положительными. Раскладывая функции Бесселя в ряд и переобозначая константы, окончательно получим потенциальное непрерывное решение уравнения (9) в окрестности острой кромки пластины

$$\Psi(R, \theta) = A_0^* + B_0^* \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) R^{1/2} +$$

$$+ A_1 \cos\theta R + B_1^* \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) R^{3/2} + \ldots, \tag{12}$$

где константы A_i^* и B_i^* определяются из условия стыковки выражения (12) с решением уравнения (3) на некоторой окружающей кромку поверхности.

Заметим, что, согласно (12), при приближении к кромке значение скорости стремится к бесконечности. Эту особенность можно устранить, используя гипотезу Жуковского, суть которой состоит в том, что поток с острой кромки должен сходить по касательной к поверхности пластины. Для данной задачи такое течение можно реализовать при помощи введения поверхности тангенциального разрыва (вихревой пелены), которая берет начало на острой кромке и движется вниз по потоку, т. е. занимает положение $Y = 0$, $X \geq b$. На этой поверхности должны быть непрерывны давление и поперечная компонента скорости, а осевая компонента скорости может терпеть разрыв [8]. Вид разрыва, согласно [9], в принятых обозначениях имеет вид

$$\Psi^+ - \Psi^- = \Gamma \exp\left[-\frac{ik^*(X - b)}{M}\right],$$

где пока неопределенная константа Г характеризует интенсивность вихревой пелены. В работе [9] также приведено собственное решение, связанное с дорожкой, тянущейся за полубесконечной твердой пластиной и занимающей положение $X \in [0, \infty]$, $Y = 0$. Несмотря на то что в настоящей работе дорожка находится в ограниченном объеме, решение Джонса [9] можно использовать в окрестности кромки разделительной пластины. Условие Жуковского на кромке будет выполнено, если интенсивность вихревой пелены Г подобрана таким образом, что в суммарном решении (непрерывном (12) и связанным с дорожкой [9]) будет отсутствовать слагаемое $\sim R^{1/2}$, ответственное за особенность на кромке. Проведя несложные вычисления, суммарное решение в окрестности кромки при условии выполнения гипотезы Жуковского можно представить в виде

$$\Psi(R, \theta) = \left(E_0 - \frac{\Gamma}{2}\right) + \left(E_1 + \frac{i\Gamma}{2M}\right) \cos\theta R +$$

$$+ F_1 \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) R^{3/2} + \ldots, \quad -\pi < \theta < 0,$$

$$\Psi(R, \theta) = \left(E_0 + \frac{\Gamma}{2}\right) + \left(E_1 - \frac{i\Gamma}{2M}\right) \cos\theta R +$$

$$+ F_1 \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) R^{3/2} + \ldots, \quad \pi > \theta > 0, \tag{13}$$

где по аналогии с (12) константы E_i и F_i определяются из условия стыковки выражения (13) с решением уравнения (3) на некоторой окружающей кромку поверхности.

Для пластины, расположенной посередине канала параллельно стенкам, и для граничного условия на входной решетке в форме (6) плоскость $Y = 0$ будет являться плоскостью симметрии, поэтому достаточно найти решение задачи в

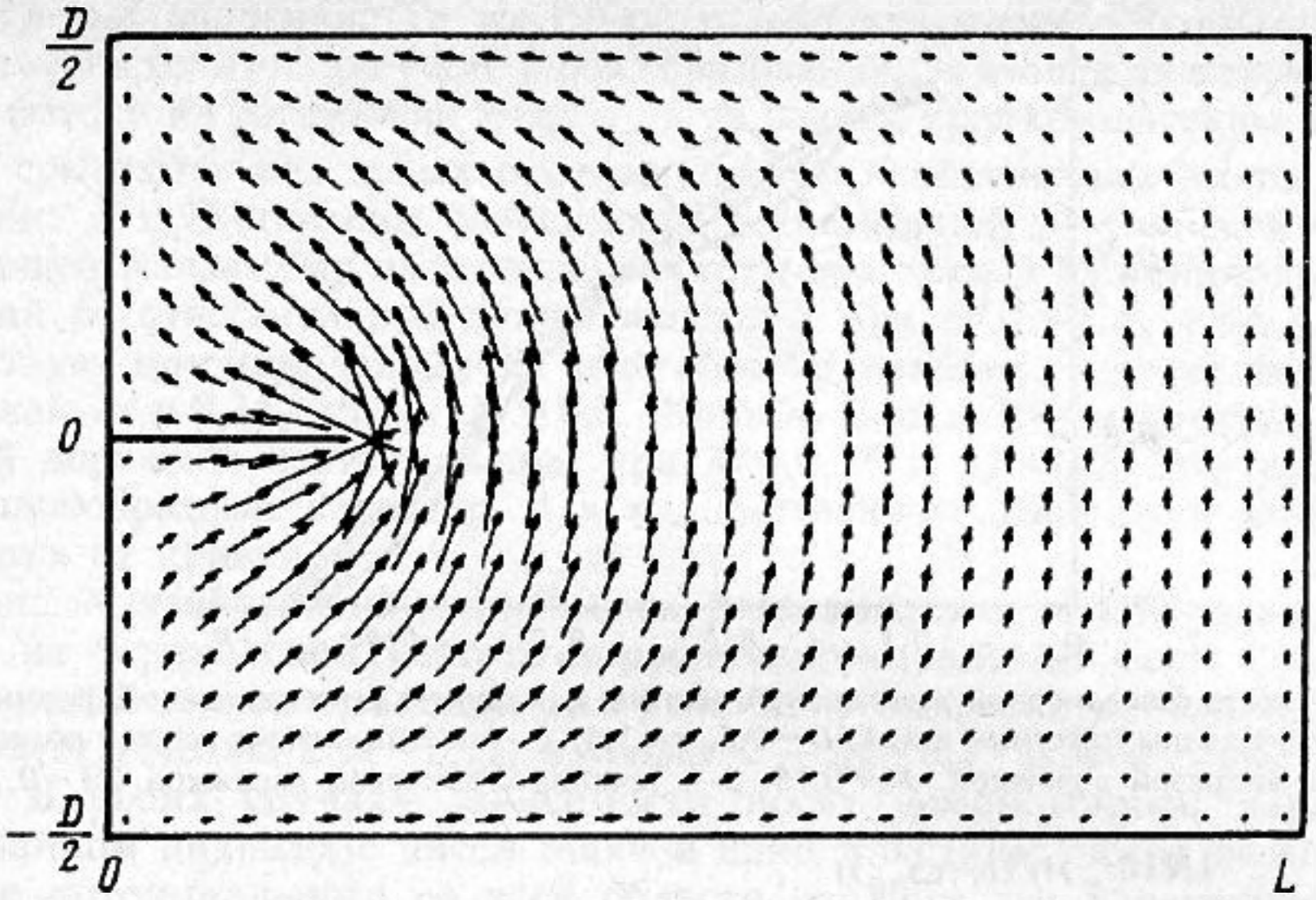

Рис. 1. Мгновенное поле скоростей на резонансной частоте первой тангенциальной моды в случае потенциального во всей области течения

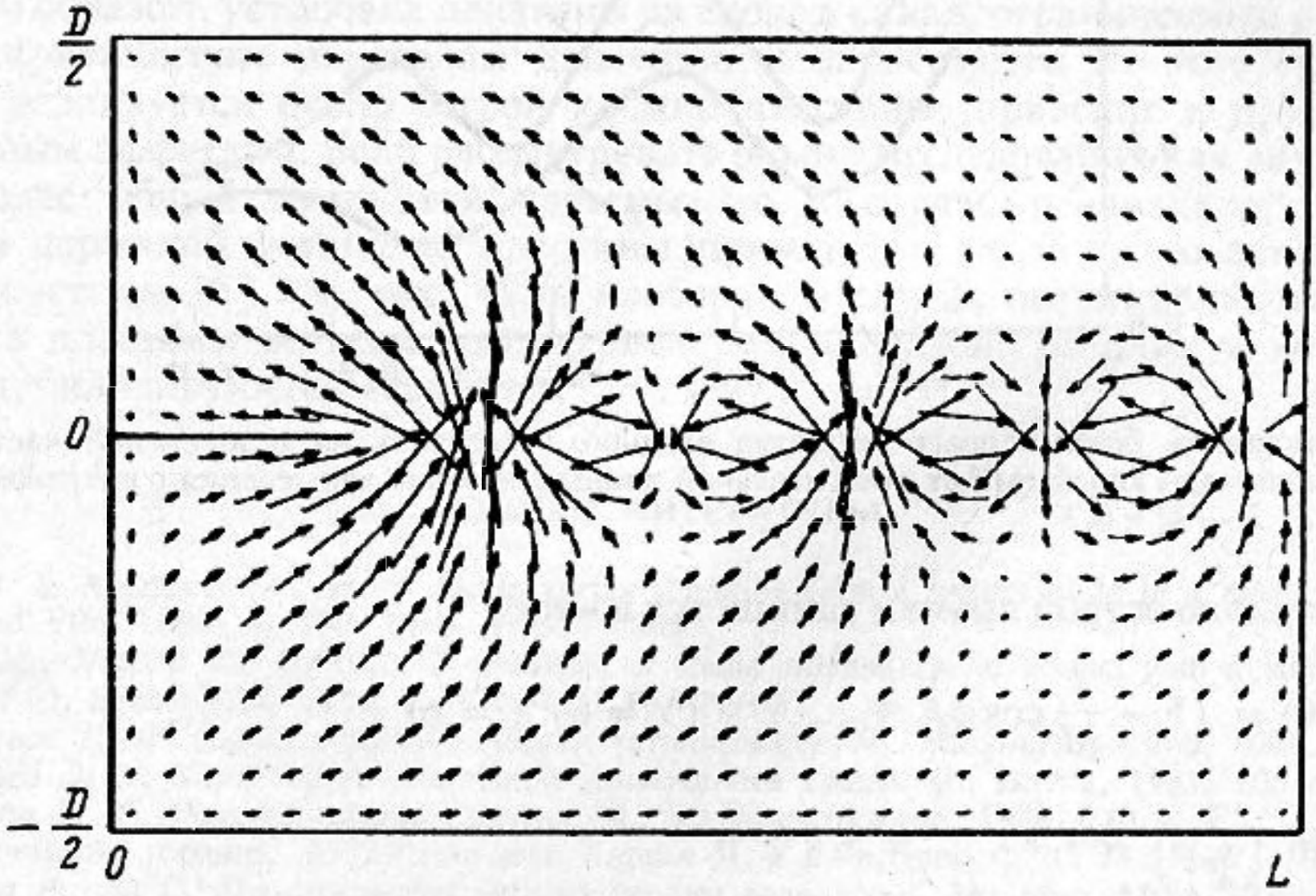

Рис. 2. Мгновенное поле скоростей на резонансной частоте первой тангенциальной моды в случае течения с вихревой дорожкой

какой-либо одной полуплоскости, например верхней. При этом в предположении потенциального течения граничное условие при $Y = 0$, $X \geq b$ будет

$$\Psi \equiv 0, \tag{14}$$

а соотношение (12) примет вид

$$\Psi(R, \theta) = B_0^* \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) R^{1/2} + B_1^* \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) R^{3/2} + \ldots \tag{15}$$

Для течения с вихревой дорожкой в плоскости симметрии

$$\Psi(Y = 0, X \geq b) = \Psi(Y = 0, X = b) \exp\left[-\frac{ik^*(X - b)}{M}\right], \tag{16}$$

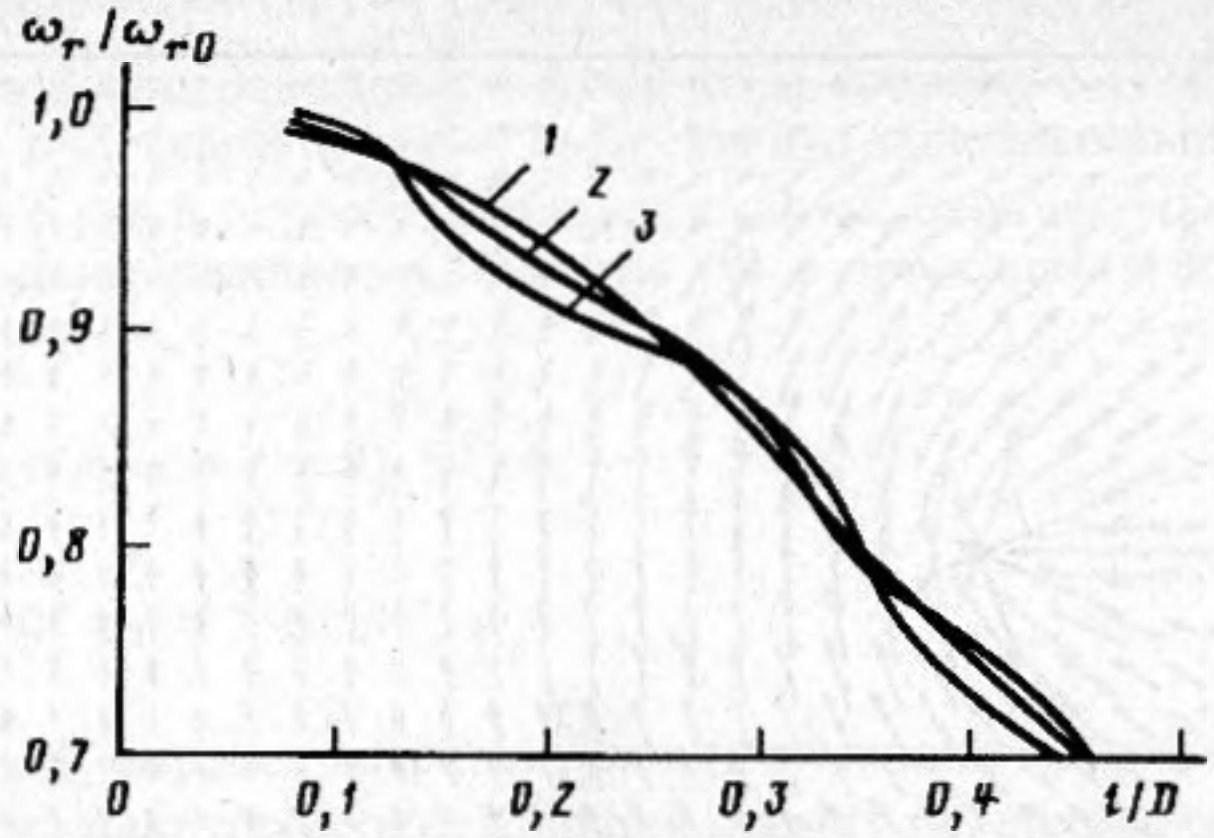

Рис. 3. Зависимость безразмерной резонансной частоты для первой тангенциальной формы колебаний от относительной длины пластины при $L/D = 1{,}5$, $\gamma = 1{,}4$; *1* — потенциальное во всей области течение; *2* — течение с вихревой дорожкой, $M = 0{,}15$; *3* — течение с вихревой дорожкой, $M = 0{,}2$

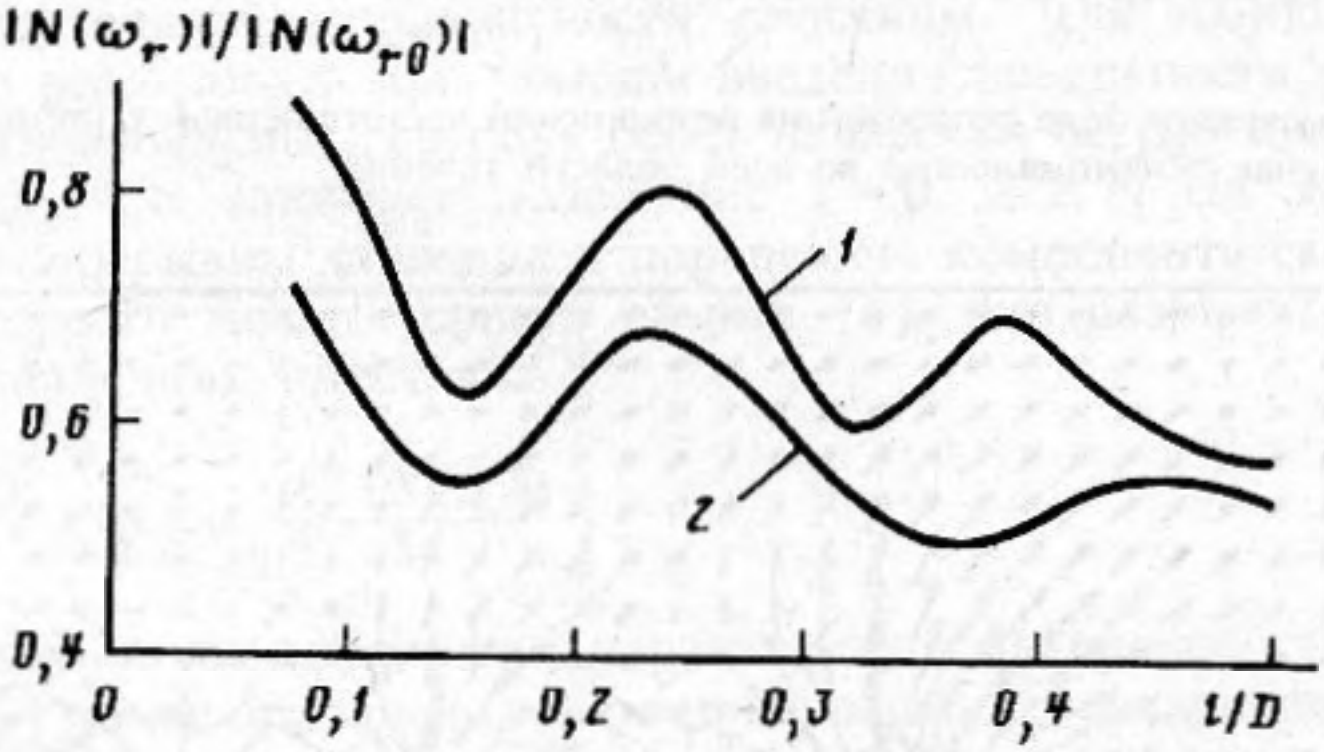

Рис. 4. Зависимость безразмерных амплитуд входного импеданса на резонансной частоте первой тангенциальной моды колебаний от относительной длины пластины для течения с вихревой дорожкой: *1* — $M = 0{,}15$; *2* — $M = 0{,}2$

а решение около острой кромки запишется в виде

$$\Psi(R, \theta) = \left(1 - \frac{i}{M}\cos\theta R + \ldots\right) \Psi(Y = 0, X = b) +$$

$$+ F_1 \sin\left(\frac{3}{2}\theta\right) R^{3/2} + \ldots \quad \pi \geq \theta \geq 0. \tag{17}$$

Уравнение (3) с граничными условиями (4)—(6), а также (14) (для потенциального во всей области течения) или (16) (для течения с вихревой дорожкой) и аналитическим решением около острой кромки (15) или (17) (в зависимости от того, какой вид течения рассматривается) решалось методом конечных разностей. Зная решение для Ψ, по формулам (7) и (8) определялись соответственно физические параметры течения и входной импеданс рассматриваемого канала. В качестве исходного варианта было рассчитано течение в канале без пластины.

Для сравнения на рис. 1 и 2 представлены мгновенные поля скоростей (максимальных за период колебания) в случае потенциального течения и течения с вихревой дорожкой на резонансной частоте ω_r первой тангенциальной моды для канала со следующими параметрами: $L/D = 1{,}5$, $l/D = 0{,}3$, $M = 0{,}2$, $\gamma = 1{,}4$. Отметим, что при одном и том же уровне задающего сигнала одинаковое значение a в формуле (6) для количественного сравнения с рис. 1 все длины векторов на рис. 2 следует уменьшить в 20 раз. В случае потенциального течения за период колебания скорости дважды меняют свое направление на обратное, проходя

через нулевые значения. То же самое только для акустической составляющей скорости происходит и при учете вихреобразования. За это время вихри смещаются вниз по потоку на расстояние $2\pi u_0/\omega_r$, а на задней кромке пластины образуются, а затем срываются два новых противоположно направленных вихря.

На рис. 3 представлены зависимости безразмерной резонансной (т. е. соответствующей максимуму импеданса) частоты для первой тангенциальной формы колебаний от относительной длины пластины при $L/D = 1{,}5$, $\gamma = 1{,}4$. Кривая *1* соответствует потенциальному во всей области течению, причем она описывает как случай $M = 0{,}15$, так и $M = 0{,}2$. Кривые *2* и *3* характеризуют течение с вихревой дорожкой соответственно при $M = 0{,}15$ и $M = 0{,}2$. Эти кривые носят слабо волнообразный характер, а в количественном отношении незначительно отличаются от кривой *1*.

На рис. 4 изображены зависимости безразмерных амплитуд входного импеданса на резонансной частоте первой тангенциальной моды колебаний от относительной длины пластины для течения с вихревой дорожкой. Кривая *1* соответствует течению с $M = 0{,}15$, а кривая *2* — $M = 0{,}2$ (как и раньше $L/D = 1{,}5$, $\gamma = 1{,}4$). В обоих случаях зависимости носят немонотонный характер и в исследованном диапазоне чисел Маха и длин пластины лежат ниже единицы. В случае потенциального во всей области течения эти характеристики поднимаются круто вверх (например, $|N(\omega_r)|/|N(\omega_{r0})| \approx 15$ при $l/D = 0{,}3$, $M = 0{,}2$) и здесь не приведены.

Таким образом, установка пластины на входе в канал, ограниченный решетками со сверхкритическим перепадом давления, в зависимости от того, какой тип течения реализуется около острой кромки пластины, приводит к прямо противоположным эффектам. Если рассматривать объект исследования как акустическое звено более общей замкнутой системы, то в случае реализации течения с вихревой дорожкой установка пластины приводит к увеличению запаса устойчивости системы [5] (см. рис. 4) и, наоборот, в случае потенциального течения установка пластины во всем рассматриваемом диапазоне ее длин и чисел Маха дает дестабилизирующий эффект.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Howe M. S.* Attenuation of sound due to vortex shedding from a splitter plate in a mean flow duct // J. Sound Vibr. 1986. V. 105. № 3. P. 385—396.
2. *Namba M., Notomi T., Fujimoto T.* Analysis of sound attenuation in a duct with a solid or porous splitter // J. Sound Vibr. 1984. V. 92. № 1. P. 47—66.
3. *Артамонов К. И.* Термогидроакустическая устойчивость. М.: Машиностроение, 1982. 261 с.
4. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 205 с.
5. *Натанзон М. С.* Неустойчивость горения. М.: Машиностроение, 1986. 248 с.
6. Неустойчивость горения ЖРД / Под ред. Харрье Д. Т., Рирдона Ф. Г. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 323 с.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
9. *Jones D. S.* Aerodynamic sound due to a source near a half-plane // J. Inst. Maths. Applics. 1972. № 9. P. 114—122.

Научно-исследовательский институт
тепловых процессов

Поступила в редакцию
29.04.91

После исправления
15.07.92

Yu. V. Firsov

SOUND PROPAGATION IN A CONFINED DUCT WITH A SPLITTER PLATE AT ITS INLET

The interaction of sound and flow around a plate located in a duct confined by inlet and outlet gratings with supercritical pressure difference is described. A thin rigid splitter plate spanning the width

of a duct with rigid walls is located symmetrically along the centerline and extends downstream from the inlet grating. In the presence of a flow the linear diffraction theory predicts both perturbation pressure and velocity to be singular at the trailing edge of the plate. The singularities are removed by the application of the Kutta condition. These result in the production of vorticity at the trailing edge which subsequently swept downstream by a flow to form a wake. The influence of the Kutta condition at the trailing edge of the splitter plate is shown to be highly significant. In particular, the influence of the mean flow Mach number and the dimensionless splitter length on both the inlet impedance and the cut-on frequency of the first transversal acoustic mode has been investigated.