В представлении (7) сохранены именно цилиндрические свойства Ф. Г. К. Действительно, в выражении (7) можно ввести новое обозначение $\tilde{k} = k\sqrt[4]{1 + 4rr'/((r-r')^2 + (z-z')^2)}$, что означает введение слабой зависимости длины волны $\tilde{\lambda}$ от координат таким образом, что $\tilde{\lambda}$ с удалением от точки наблюдения увеличивается, асимптотически стремясь к λ плоской волны. Рассматривать это можно, как трансляцию свойств цилиндрических функций, у которых, как известно, расстояние между соседними корнями увеличивается с увеличением номеров этих корней, асимптотически стремясь к π.

Представление же (3) близко к тороидальной геометрии, и, очевидно, что приближенные выражения для Ф. Г. К. (3), (4) и (7) должны использоваться с соотношением характерных размеров апертуры (по координате $z-h$, по координате $r-d$) типа $kh \leq kd$, (7) в задачах с соотношением $kh >> kd$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Willims W., Parke N. G., Moran D. A., Sherman C. H.* Acoustical radiation from a finite cylinder// J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 41. № 4. P. 807—816.
2. *Бейтмен Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн/Пер. с англ. М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1956. 180 с.
3. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2/Пер. с анг. М.: Мир, 1956. 544 с.
4. *Касьянов Д. А.* Функция Грина кольца и гипергеометрические функции двух переменных: Препринт № 297. Горький: НИРФИ, 1990. 28 с.
5. *Васильев Е. Н.* Об одной функции встречающейся в теории дифракции//ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. С. 841—852.
6. *Касьянов Д. А.* О функции Грина кольца//Волны и дифракция-90. М.: Физическое общество. 1990. Т. 1. С. 250—253.
7. *Стретт Дж. В.* (лорд Рэлей). Волновая теория света/Пер. с англ. М.—Л.: ГИТТЛ, 1940. 207 с.

Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт

Поступило в редакцию
01.07.91
После исправления
04.12.92

УДК 534

© 1993 г. Е. Я. Коган, Н. Е. Молевич

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ В НЕРАВНОВЕСНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОМ ГАЗЕ

Известно, что в средах с аномальными термодинамическими свойствами, такими, что вторая производная от давления по объему при постоянной энтропии

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S < 0, \tag{1}$$

возможно существование ударных волн (УВ) разрежения [1, 2]. При условии (1) эти волны эволюционно устойчивы и удовлетворяют требованию положительного скачка энтропии

$$\Delta S = \frac{1}{12T_0}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S \Delta P^3, \tag{2}$$

где T_0 — температура среды перед УВ.

Эволюция малых финитных газодинамических возмущений описывается уравнением Бюргерса

$$u_y + \psi u u_\xi = \nu u_{\xi\xi}, \tag{3}$$

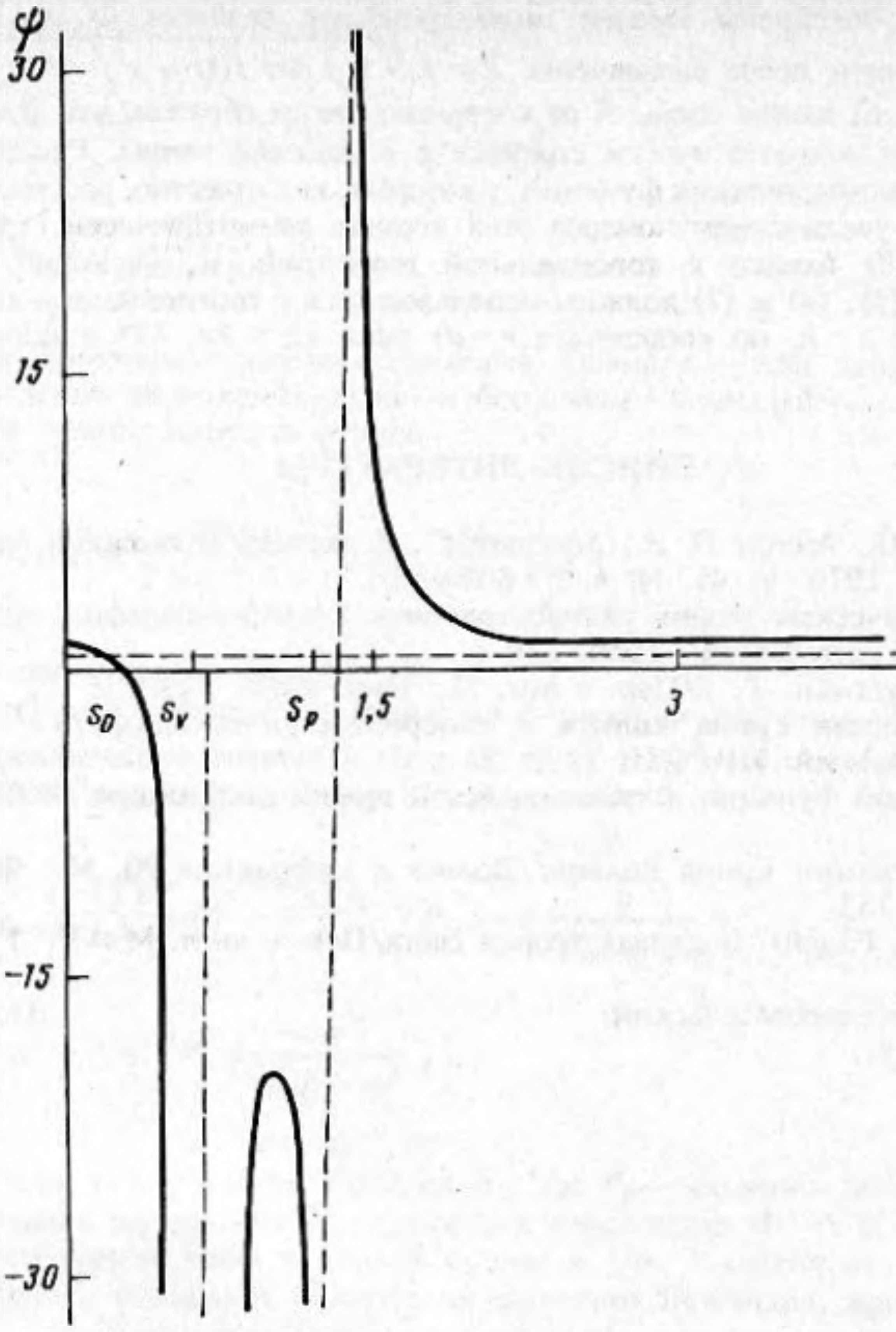
где u — возмущение скорости, ψ — коэффициент нелинейности, ν — диссипативный коэффициент. Для газа

$$\nu = \frac{\mu}{2\rho_0} + \frac{2\eta}{3\rho_0} + \frac{\chi}{2\rho_0}\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right), \tag{4}$$

где χ, μ, η — коэффициенты теплопроводности, второй (объемной) и сдвиговой вязкости; ρ_0 — стационарная плотность среды; C_V, C_P — теплоемкости газа при постоянном объеме и давлении.

Коэффициент нелинейности для равновесного политропного газа

$$\psi = \frac{u_S^4}{2V^3}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_S = \frac{(\gamma+1)}{2} > 0, \tag{5}$$



где $u_S = (\gamma T_0/m)^{0,5}$ — скорость звука, $\gamma = C_P/C_V$ — показатель адиабаты, m — масса молекулы.

С учетом (5) стационарная форма уравнения (3), имеющая в автомодельной переменной $z = \xi - Wy$ (W — скорость стационарной волны) вид

$$-Wu_z + \psi u u_z = \nu u u_{zz}, \tag{6}$$

описывает УВ сжатия.

В случае (1) имеем иную ситуацию, так как $\psi < 0$ [2, 3], и решением уравнения (6) является УВ разрежения.

Обратимся теперь к случаю термодинамически неравновесных сред. В [4] рассмотрена эволюция газодинамических возмущений в газе с источником энергии, поддерживающим стационарное неравновесное заселение колебательных состояний молекулы. Полученное в [4] уравнение описывает с точностью до величин второго порядка малости эволюцию возмущений с плавным фронтом ($\tau/\widetilde{T} \ll C_V^0/C_{V\infty}$, $C_P^0/C_{P\infty}$, $\widetilde{T}$ — характерная длительность фронта, C_V^0, C_P^0 и $C_{V\infty}, C_{P\infty}$ — низкочастотные и высокочастотные теплоемкости) и совпадает с (3). Однако имеется существенное отличие в коэффициентах ψ и μ. Для неравновесной среды они являются функциями степени неравновесности и релаксационных свойств газа, определяемых зависимостью времени релаксации $\tau(T, \rho)$. В [4] приведен вид ψ при бинарных столкновениях, когда $\tau \sim 1/\rho$. Его можно переписать в несколько более компактном виде

$$\psi = \frac{1}{C_V^0}\left[\frac{s\hat{\tau}(1+s)}{C_P^0} + \frac{1+2C_V^0}{2} - \frac{s(1+s)^2}{2C_P^0 C_V^0}\hat{\hat{\tau}}\right], \tag{7}$$

где $C_V^0 = C_{V\infty} + C_k + s\hat{\tau}$, $C_P^0 = C_{P\infty} + C_k + s(\hat{\tau} + 1)$ — низкочастотные теплоемкости при постоянном объеме и давлении [4], C_k — равновесная колебательная теплоемкость; $s = (E_k^0 - E_k^P)/T_0$ — степень колебательной неравновесности; E_k^0, E_k^P — стационарная колебательная энергия и ее равновесное ($T_{k0} = T_0$, T_{k0} — стационарная колебательная температура) значение; $\tau = T_0 \partial \ln \tau/\partial T_0$, $\hat{\hat{\tau}} = \tau^{-1} T_0^2 \partial^2 \tau/\partial T_0^2$.

Выражение (7) в зависимости от s, $\hat{\tau}$ и $\hat{\tau}$ может быть как положительным, так и отрицательным. На рисунке представлена зависимость $\psi(s)$ для типичной лазерной среды ($CO_2 : N_2 : He = 1 : 2 : 3$, $P = 1$ атм, $T_0 = 300$ K, $\hat{\tau} \approx -3{,}4$, $\hat{\hat{\tau}} \approx 16$). Значение $S_V = -(C_{V\infty} + C_k)/\hat{\tau}$ соответствует $C_V^0 = 0$, значение $s_P = -(C_{P\infty} + C_k)/(\hat{\tau}_0 + 1)$ соответствует $C_P^0 = 0$, поэтому при таких степенях неравновесности теряет смысл низкочастотное приближение ($\tau/\tilde{T} \ll C^0_V/C_{V\infty}$, $C^0_P/C_{P\infty}$), а для высокочастотных возмущений $\psi = (C_{P\infty} + C_{V\infty})/2C_{V\infty}$ независимо от s [5]. В областях $s < s_0, s > s_P$ коэффициент нелинейности положителен, как и в равновесной среде, хотя может значительно отличаться по величине. В области $s_V < s < s_P$ показатель адиабаты $\gamma < 0$ и низкочастотные возмущения не распространяются. Наконец, при $s_0 < s < s_V$ коэффициент $\psi < 0$, и уравнение (6) описывает УВ разрежения.

Рассмотрим вопрос об эволюционной устойчивости УВ разрежения. Согласно [6], стационарные решения (3) устойчивы только при $\nu > 0$. В равновесной среде это условие всегда выполняется, в неравновесной среде коэффициент второй вязкости может стать отрицательным [4, 7], а следовательно, и знак коэффициента диссипации ν зависит от s. Для рассмотренной газовой смеси $\nu < 0$ при $s > 2\cdot 10^{-4} = s_{\text{пор}}$, т. е. во всей области, где $\psi < 0$.

Согласно [4, 6], уравнение (3) при $\nu < 0$ описывает коллапс газодинамического возмущения. В [5] рассмотрен механизм нелинейной стабилизации коллапса при $\psi > 0$ в области $s_{\text{пор}} < s < s_0$, связанной с «насыщением» коэффициента второй вязкости.

Действительно, согласно линейному приближению

$$\Delta E_k = \frac{mC^0_V\mu}{\tau\rho_0}\,\Delta\rho, \quad \Delta T = \frac{mu_0^2\,(\gamma_0 - 1)}{\gamma_0\rho_0}\,\Delta\rho \tag{8}$$

$u_0 = (\gamma_0 T_0/m)^{1/2}$ — скорость низкочастотного звука, $\gamma_0 = C^0_P/C_V{}^0$ с ростом амплитуды возмущения сжатия колебательная энергия уменьшается, а температура растет, что сопровождается уменьшением степени неравновесности s и, следовательно, модуля коэффициента второй вязкости.

В случае волн разрежения увеличение их амплитуды приводит, согласно (8), при $\mu C^0_V < 0$ (при $s_{\text{пор}} < s < s_V$) к увеличению s, а не к уменьшению, что не может привести к стабилизации неустойчивости. Поэтому вопрос о существовании стационарных волн разрежения в среде с отрицательной вязкостью остается открытым.

Более очевиден случай $\nu > 0$, $\psi < 0$, когда эволюционная устойчивость стационарных УВ разрежения доказана. Обычно при требуемой для обращения коэффициента нелинейности степени неравновесности величина $\mu = \rho_0 T_0\,[C_k - s\,(C_{V\infty} - \hat{\tau})]/C_V^{0^2} < 0$ и $|\mu| \gg \eta, \chi$, т. е. $\nu < 0$.

По-видимому, наиболее легко случай $\nu > 0$, $\psi < 0$ может быть реализован при наличии в среде нескольких релаксационных процессов с временами релаксации, удовлетворяющими низкочастотному пределу. В этом случае коэффициент второй вязкости имеет вид [8]

$$\mu = \frac{\rho_0 T_0}{m}\sum_j^N \frac{\tau_j\,[(C_{Vj} - C_{V\infty})\,C_P - C_V\,(C^0_{Pj} - C_{P\infty})]}{C_V^2}, \tag{9}$$

N — число релаксационных процессов, τ_j — время релаксации j-го процесса, $C^0_{Vj} = C_{V\infty} + C_{kj} + s_j\hat{\tau}_j$, $C^0_{Pj} = C_{P\infty} + C_{kj} + s_j\,(\hat{\tau}_j - \check{\tau}_j)$,

$$C_V = C_{V\infty} + \sum_j\,(C^0_{Vj} - C_{V\infty}),\ C_P = C_{P\infty} + \sum_j\,(C_{Pj} - C_{P\infty}),\ \hat{\tau}_j = \rho_0\partial\ln\tau/\partial\rho_0\,.$$

Например, если внешний источник энергии поддерживает неравновесное возбуждение только степени свободы с временем релаксации τ_1, то вид коэффициента нелинейности, кроме замены $C^0_V = C_{V\infty} + \sum_j C_{kj} + s_1\hat{\tau}_1$. $C^0_P = C_{P\infty} + \sum_j C_{kj} + s_1\,(\hat{\tau}_1 + 1)$, не изменится, а из (9) следует (при $\tau_1 = -1$)

$$\mu = \frac{\tau_1\rho_0 T_0\,[C_{k1} - s\,(C_{V\infty} + \sum\limits_{j=2}^N C_{kj} - \hat{\tau}_1)]}{m\,(C_{V\infty} + \sum\limits_{j=1}^N C_{kj} + s_1\hat{\tau}_1)^2} +$$

$$+ \frac{\rho_0 T_0}{m}\sum_{j=2}^N \frac{\tau_j C_{kj}}{(C_{V\infty} + \sum\limits_{j=1}^N C_{kj} + s_1\hat{\tau}_1)^2}. \tag{10}$$

Второе слагаемое в (10) всегда положительное и условие $\nu > 0$ может быть совместимо с $\psi < 0$.

Заметим в заключение, что эволюционная устойчивость УВ разрежения не означает в неравновесной среде роста ΔS на разрыве. Последнее условие здесь не является обязательным, поскольку в системе есть источники и стоки энергии, т. е. она является открытой. Согласно ([1], с. 427), изменение энтропии в релаксирующей среде

$$\Delta S = \Delta E_k \frac{(T - T_k)}{TT_k}, \tag{11}$$

или, используя (8) и учитывая, что в неравновесной среде $T_{k0} > T_0$ в стационарных условиях, имеем

$$\Delta S = -\frac{(T_{k0} - T_0)\, m\mu C_V^0}{T_0 T_{k0} \tau_{\rho 0}} \Delta\rho,$$

т. е. изменение энтропии оказывается величиной первого порядка малости и для частного случая $\mu C_{V0} < 0$ является отрицательным при $\Delta\rho < 0$. Уменьшение энтропии связано с обсужденным выше увеличением степени неравновесности среды при прохождении возмущения разрежения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1966. С. 64.
2. *Kutateladze S. S., Nakoryakov V. E., Borisov A. A.* Rarefaction waves in liquid and gas — liquid media//Ann. Rev. Fluid. Mech. 1987. N 3. P. 577—600.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 491.
4. *Коган Е. Я., Молевич Н. Е.* Коллапс акустических волн в неравновесном молекулярном газе// ЖТФ. 1986. Т. 56. № 5. С. 941—943.
5. *Коган Е. Я., Молевич Н. Е., Ораевский А. Н.* Структура нелинейных акустических волн в неравновесном колебательно-возбужденном газе//Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. № 14. С. 836—839.
6. *Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е.* Взрывная неустойчивость нелинейных волн в средах с отрицательной вязкостью//Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38. № 6. С. 991—995.
7. *Молевич Н. Е., Ораевский А. Н.* Вторая вязкость в термодинамически неравновесных средах// ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 3. С. 128—132.
8. *Молевич Н. Е., Ораевский А. Н.* Вторая вязкость в термодинамически неравновесной среде с несколькими характерными временами процессов: Препринт № 106. М.: ФИАН СССР, 1990. 24 с.

Самарский государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
03.02.93

УДК 534

© 1993 г. Ж. Н. Тьотта

КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА — ЗАБОЛОТСКОЙ

Недавно [1] Лапидус и Руденко показали, что

$$V(\theta, x, z) = \frac{C}{1 - iNz(1 - ib)} \exp\left[iT - x^2 \frac{1 - ib}{1 - iNz(1 - ib)} \right] \tag{1}$$

является точным решением уравнения Хохлова — Заболотской (X — 3):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z} - \frac{N}{4} \nabla_x^2 \right] V - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left(\frac{V^2}{2} \right) = 0. \tag{2}$$

Здесь T — нелинейно ретардированное время, определяемое формулой:

$$T(\theta, x, z) = \theta + \frac{1 - inz(1 - ib)}{-iN(1 - ib)} \ln\left(1 - iNz(1 - ib)\right] V, \tag{3}$$

а C и b — константы. Как отмечено авторами, недостатком решения является его представление в комплексной форме. В настоящей работе мы покажем, что метод, использованный в [1] для получения решения (3) может дать более общий класс действительных и комплексных решений, описывающих нелинейные распространяющиеся сферические волны. Эти решения связаны также с общим решением уравнения Бюргерса для сферических волн. Обозначения, принятые ниже, практически те же, что и в [1]: N — отношение длины образования разрыва, $l_S = c_0^2/\beta\omega u_0$ к характерной Релеевской длине (мы использовали величину $l_d = \omega a^2/2c_0$ в качестве параметра нелинейности среды вместо ε). Далее, V есть z — компонента скорости частиц, нормированная на величину характерной скорости u_0 (в рамках параболического приближения пропорционально звуковому давлению p), $\theta = \omega(t - z'/c_0)$ — безразмерное ретардированное время для бегущей вдоль оси z волны; трехмерные пространственные