АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 39 1993 Вып. 6

УДК 534.231.1

© 1993 г. В. С. Булдырев, Н. С. Григорьева

# АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, ПОРОЖДАЕМОЕ В ВОДНОМ СЛОЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ ДВИЖУЩИМСЯ В АТМОСФЕРЕ ИСТОЧНИКОМ. ИЗМЕНЕНИЕ ВО ВРЕМЕНИ ХАРАКТЕРИСТИК НОРМАЛЬНОЙ ВОЛНЫ

Рассматривается задача о вычислении в водном слое звукового поля, порожденного точечным источником, движущимся в атмосфере. Скорость звука в атмосфере предполагается постоянной. Глубина водного слоя плавно меняется в горизонтальных направлениях. Скорость звука в водном слое зависит от вертикальной координаты и плавно изменяется в горизонтальных направлениях и во времени. Источник излучает сигнал переменной амплитуды и фазы и движется со скоростью, меньшей скорости звука в воде. Общие формулы для нестационарных нормальных волн, возбуждаемых движущимся источником, были получены в предыдущей работе. В настоящей работе находятся коэффициенты возбуждения этих волн. Подробно рассмотрен частный случай, когда скорость распространения звука в водном слое постоянна, а его глубина зависит только от одной горизонтальной координаты, причем источник движется прямолинейно и равномерно. Полученные в этом частном случае явные формулы позволяют сделать вывод, что нестационарные нормальные волны, распространяющиеся в водном слое возрастающей глубины, начинают регистрироваться в точке наблюдения еще до пролета над нею источника.

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи [1], в которой были получены нестационарные нормальные волны $u_m$, возбуждаемые в водном слое переменной глубины ($0 \leq z \leq H(x, y)$) точечным источником переменной амплитуды и фазы, движущимся в воздухе ($z < 0$) со скоростью, меньшей скорости звука в воде.

Приведем формулу для $u_m$ из [1]. Для этого введем необходимые обозначения. Пусть $c_a = \mathrm{const}$ — скорость звука в атмосфере, а $c_w(z, x, y, t)$ — скорость звука в воде. Предполагается, что $c_w(z, x, y, t)$ и глубина водного слоя $H(x, y)$ медленно меняются по горизонтальным переменным $x$, $y$ и времени $t$. Это медленное изменение характеризуется первым малым параметром задачи $\varepsilon \simeq 10^{-3} \div 10^{-2}$. Вторым малым параметром рассматриваемой задачи является $\varkappa = \rho_a/\rho_w \simeq 10^{-3}$ — отношение плотностей воздуха и воды.

Пусть $c_{\min} = \min c_w(z, x, y, t)$ — минимальное значение скорости звука в воде и $d = c_{\min}/\max |\partial c_w/\partial z|$ — характерный пространственный масштаб. Введем безразмерную вертикальную переменную $\zeta = z/d$, медленные горизонтальные переменные $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\varepsilon x/d, \varepsilon y/d)$ и медленное время $\tau = \varepsilon c_{\min} t/d$. В этих безразмерных переменных траектория движения задается уравнениями: $\zeta = \zeta_0(\tau) < 0$, $\xi = \xi_0(\tau)$. Амплитуда $A(\tau)$ и фаза $\varphi(\tau)$ источника зависит от медленного времени $\tau$, причем $A(\tau)|_{\tau\leq 0} = 0$, $\varphi'(\tau) < 0$, и все функции, входящие в постановку задачи, в медленных переменных имеют производные порядка единицы. Параметр $q$ характеризует величину мгновенной частоты источника $\omega(t)$ в единицах характерной частоты задачи $c_{\min}/d$:

$$\omega(t) = -d\,[(q/\varepsilon)\,\varphi(\tau)]/dt = -q\,(c_{\min}/d)\,\varphi'(\tau) > 0, \quad \omega(t) \sim q\,(c_{\min}/d).$$

В работе [1] нестационарные нормальные волны $u_m$, $m = 0, 1, \ldots$, распространяющиеся в водном слое и возбуждаемые движущимся в атмосфере источником, записывались в виде разложения по степеням $\varepsilon$:

$$u_m = \exp [i (q/\varepsilon) \theta_m (\xi, \tau)] \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{mj} (\zeta, \xi, \tau) \varepsilon^j. \tag{1}$$

Фазовая функция $\theta_m(\xi, \tau)$ находилась из решения задачи Коши (1.20), (1.23) (здесь и далее (1. ...) — формулы работы [1]) для нестационарного уравнения эйконала (1.20). Для коэффициентов $\psi_{mj}(\zeta, \xi, \tau)$ разложения (1) была получена рекуррентная последовательность задач Штурма — Лиувилля (1.5), (1.7), (1.12) по переменной $\zeta$ на промежутке $[0, h]$, $h = h(\xi) = H/d$ — безразмерная глубина водного слоя. В частности, функция $\psi_{m0}(\eta, \xi, \tau)$ являлась решением однородной задачи

$$d^2\psi_{m0}/d\zeta^2 + q^2 [n_w^2 (\partial\theta_m/\partial\tau)^2 - \mu_m^2] \psi_{m0} = 0, \tag{2}$$

$$\varkappa d\psi_{m0}/d\zeta + iq [n_a^2 (\partial\theta_m/\partial\tau)^2 - \mu_m^2]^{1/2} \psi_{m0} \Big|_{\zeta=0} = 0, \tag{3}$$

$$d\psi_{m0}/d\zeta \,\Big|_{\zeta=h} = 0, \tag{4}$$

где

$$n = \begin{cases} n_a = c_{\min}/c_a = \text{const} \approx 4{,}5\,, & \zeta < 0 \\ n_w = c_{\min}/c_w \approx 1, & 0 \le \zeta \le h \end{cases}$$

— показатель преломления среды, $\mu_m^2 = (\nabla_\perp \theta_m)^2 = (\partial\theta_m/\partial\xi_1)^2 + (\partial\theta_m/\partial\xi_2)^2$, и ветвь корня в граничном условии (3) фиксирована неравенством $\mathrm{Re}\, [n_a^2 (\partial\theta_m/\partial\tau)^2 - \mu_m^2]^{1/2} > 0$ при $\mu_m^2 < n_a^2 (\partial\theta_m/\partial\tau)^2$. Задача Штурма — Лиувилля (2)—(4) имеет счетное множество резонансов (полюсов резольвенты) $\mu_m$, $m = 0, 1, \ldots$, расположенных в первой четверти комплексной плоскости $\mu$ (см. [1]).

Пусть $f_m(\zeta) = f_m(\zeta, \xi, \tau)$ — резонансная функция (нетривиальное решение задачи Штурма — Лиувилля (2)—(4)), отвечающая резонансу $\mu_m$. Тогда, очевидно,

$$\psi_{m0} (\zeta, \xi, \tau) = \mathcal{A}_{m0} (\xi, \tau) f_m (\zeta, \xi, \tau),$$

где $\mathcal{A}_{m0}(\xi, \tau)$ — не зависящая от $\zeta$ функция $\xi$ и $\tau$.

Резонансная функция $f_m(\zeta, \xi, \tau)$, фазовая функция $\theta_m(\xi, \tau)$ и амплитудная функция $\mathcal{A}_{m0}(\xi, \tau)$ искались в виде рядов по степеням малого параметра $\varkappa$:

$$f_m = \sum_{l=0}^{\infty} f_m^{(l)} (\zeta, \xi, \tau) (i\varkappa)^l, \quad \theta_m = \sum_{l=0}^{\infty} \theta_m^{(l)} (\xi, \tau) (i\varkappa)^l, \quad \mathcal{A}_{m0} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{A}_{m0}^{(l)} (\xi, \tau) (i\varkappa)^l.$$

Выпишем из работы [1] формулы для $f_m^{(0)}$, $\theta_m^{(0)}$ и $\mathcal{A}_{m0}^{(0)}$, которые нам понадобятся в этой статье. Функция $f_m^{(0)}(\zeta) = f_m^{(0)}(\zeta, \xi, \tau)$, очевидно, является собственной функцией однородной задачи Штурма — Лиувилля

$$d^2 f_m^{(0)}/d\zeta^2 + q^2 [n_w^2 (\partial\theta_m/\partial\tau)^2 - (\mu_m^{(0)})^2] f_m^{(0)} = 0, \tag{5}$$

$$f_m^{(0)} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad df_m^{(0)}/d\zeta \Big|_{\zeta=0} = 0,$$

отвечающей вещественному собственному значению $(\mu_m^{(0)})^2$ ($(\mu_m^{(0)})^2$ — старший член разложения $\mu_m^2$ в ряд по степеням $i\varkappa$). В дальнейшем функции $f_m^{(0)}(\zeta, \xi, \tau)$ и собственные значения $(\mu_m^{(0)})^2$ считаются известными.

Функция $\theta_m^{(0)}(\xi, \tau)$ вычисляется по формуле

$$\theta_m^{(0)}(\xi, \tau) = \varphi(\alpha) + \int_0^s [p_0(s) + \sum_{i=1}^{2} p_i(s)\, d\xi_i(s)/ds]\, ds. \tag{6}$$

Здесь

$$\tau = s + \alpha, \quad \xi_i(s) = \xi_i(\alpha, \vartheta, s), \quad p_0(s) = p_0(\alpha, \vartheta, s), \tag{7}$$

$$p_i(s) = p_i(\alpha, \vartheta, s); \quad i = 1, 2$$

— решение характеристической системы

$$\frac{d\tau}{ds} = 1, \quad \frac{d\xi_i}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}_m^{(0)}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_0}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}_m^{(0)}}{\partial \tau}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}_m^{(0)}}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

отвечающее начальным условиям

$$\tau\Big|_{s=0} = \alpha, \quad \xi\Big|_{s=0} = \xi_0(\alpha), \quad p_0\Big|_{s=0} = -\Omega_m, \quad \mathbf{p}\Big|_{s=0} = K_m \mathbf{e}, \tag{9}$$

$\mathbf{e} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ — единичный вектор. Функция Гамильтона $\mathcal{H}_m^{(0)}(p^2, \xi, \tau)$, $p = |\mathbf{p}|$ определяется равенством

$$\mathcal{H}_m^{(0)} = [p^2 N_{m0}^2 + q^{-2}(N'_{m0})^2]^{1/2} (M_{m0}^2)^{-1/2},$$

где введены обозначения

$$M_{m0}^2 = \int_0^h n_w^2 [f_m^{(0)}(\zeta)]^2 d\zeta, \quad N_{m0}^2 = \int_0^h [f_m^{(0)}(\zeta)]^2 d\zeta, \tag{10}$$

$$(N'_{m0})^2 = \int_0^h [df_m^{(0)}/d\zeta]^2 d\zeta.$$

Начальные данные $\Omega_m$ и $K_m$ должны удовлетворять условиям согласования

$$\Omega_m = \mathcal{H}_m^{(0)}(K_m^2, \xi_0, (\alpha), \alpha), \quad \Omega_m = K_m(\mathbf{v}(\alpha), \mathbf{e}) - \dot{\varphi}(\alpha). \tag{11}$$

В последнем равенстве и в формуле (6) $\varphi(\alpha)$ — фаза источника $\varphi(\tau)$ в момент времени $\tau = \alpha$; через $\mathbf{v}(\alpha)$ в (11) обозначена безразмерная скорость движения источника в момент времени $\tau = \alpha$: $\mathbf{v}(\alpha) = d\xi_0(\tau)/d\tau\Big|_{\tau=\alpha} = d\xi_0(\alpha)/d\alpha$.

Параметры $\alpha$, $\vartheta$, входящие в начальные условия (9), и независимая переменная $s$ представляют собой пространственно-временные лучевые (ПВЛ) координаты. С декартовыми координатами $\xi_1$, $\xi_2$ и временем $\tau$ они связаны первыми тремя уравнениями (7). ПВЛ координата $\alpha$ имеет смысл времени излучения поля нормальной волны, наблюдаемого в момент времени $\tau$ в точке с координатами $(\xi_1, \xi_2)$. Координата $\vartheta$ — угол между скоростью источника $\mathbf{v}(\alpha)$ в момент излучения $\tau = \alpha$ и пространственно-временным лучом $\xi_i = \xi_i(\alpha, \vartheta, s)$, который выходит из источника, находящегося в точке $(\xi_{10}(\alpha), \xi_{20}(\alpha))$ $(\xi_0(\alpha) = (\xi_{10}(\alpha), \xi_{20}(\alpha)))$, и приходит в точку наблюдения $(\xi_1, \xi_2)$. И, наконец, $s$ — время распространения волнового возмущения от источника до точки наблюдения вдоль пространственно-временного луча. (Лучевые координаты, соответствующие разным нормальным волнам, различны, поэтому они должны были бы иметь индекс $m$. Этот индекс опущен для сокращения записи.) (В дальнейшем предполагается, что якобиан перехода от декартовых координат к лучевым $J_m = |D(\xi_1, \xi_2, \tau)/D(\alpha, \vartheta, s)|$ отличен от нуля.)

Для старшего коэффициента $\mathcal{A}_{m0}^{(0)}(\xi, \tau)$ разложения амплитудной функции $\mathcal{A}_{m0}(\xi, \tau)$ в ряд по степеням $\varkappa$ в работе [1] была получена формула

$$\mathcal{A}^{0}_{m0}(\xi, \tau) = \mathcal{B}^{0}_{m0}(\alpha, \vartheta)\,[-(\partial\theta^{(0)}_m/\partial\tau)\,M^2_{m0}J_m]^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^s [(\mathrm{v}^G_m, \nabla_\perp h)\,(f^{(0)}_m(h))^2/N^2_{m0} - L^2_{m0}/M^2_{m0}]\,ds\right\},$$

где $\mathrm{v}^G_m$ — групповая скорость (скорость распространения волнового возмущения вдоль пространственно-временного луча), которая определяется равенством

$$\mathrm{v}^G_m = d\xi/ds = \partial\mathcal{H}^{(0)}_m(p^2(\alpha, \vartheta, s), \xi(\alpha, \vartheta, s), s + \alpha)/\partial p,$$

и $L^2_{m0} = \int\limits_0^h (\partial n^2_w/\partial\tau)\,[f^{(0)}_m(\zeta)]^2\,d\zeta$. Функция $\mathcal{B}^{0}_{m0}(\alpha, \vartheta)$, не зависящая от лучевой координаты $s$, и потому постоянная вдоль луча, называется коэффициентом возбуждения нестационарной нормальной волны номера $m$ в адиабатическом (главном по $\varepsilon$) и старшем по $\varkappa$ приближениях.

В адиабатическом (главном по $\varepsilon$) и старшем по $\varkappa$ приближениях волновое поле нестационарной нормальной волны $u^{(0)}_{m0}$ вычисляется по формуле

$$u^{(0)}_{m0} = \exp[i(q/\varepsilon)\,\theta^{(0)}_m(\xi, \tau)]\,\mathcal{B}^{0}_{m0}(\alpha, \vartheta)\,[-(\partial\theta^{(0)}_m/\partial\tau)\times \tag{12}$$

$$\times M^2_{m0}J_m]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^s [(\mathrm{v}^G_m, \nabla_\perp h)\,(f^{(0)}_m(h))^2/N^2_{m0} -\right.$$

$$\left.- L^2_{m0}/M^2_{m0}]\,ds\right\} f^{(0)}_m(\zeta, \xi, \tau).$$

Последующие коэффициенты разложения $\mathcal{A}^{l}_{m0}$, $l \geq 1$ амплитудной функции $\mathcal{A}_{m0}$ по степеням $\varkappa$ удовлетворяют неоднородным уравнениям переноса, при интегрировании которых возникают постоянные интегрирования $\mathcal{B}^{l}_{m0}(\alpha, \vartheta)$ — коэффициенты возбуждения в старших порядках по $\varkappa$. Коэффициенты возбуждения $\mathcal{B}^{l}_{m0}(\alpha, \vartheta)$, $l \geq 0$ зависят от положения и других характеристик движущегося источника в момент излучения поля нормальной волны. Они находятся на основе принципа локальности из сравнения старшего по $\varepsilon$ члена разложения (1) с нестационарной нормальной волной того же номера в точно решаемой задаче со стратифицированным водным слоем и источником, движущимся в атмосфере равномерно и прямолинейно на фиксированной высоте.

В соответствии с принципом локальности будем считать, что волновое поле рассматриваемого источника в достаточно малой его окрестности в момент излучения (т. е. при $\tau = \alpha$, произвольных $\vartheta \in [0, 2\pi)$ и $\zeta \in [0, h]$ и при малых $s$) в главном приближении по $s$ совпадает с волновым полем модельного источника, движущегося на высоте рассматриваемого источника $\zeta_0(\tau)|_{\tau=\alpha}$ и с его скоростью $\mathrm{v} = d\xi_0(\tau)/d\tau|_{\tau=\alpha}$. Частоту и амплитуду модельного источника считаем постоянными и равными $-\varphi'(\tau)|_{\tau=\alpha}$ и $A(\tau)|_{\tau=\alpha}$ соответственно, т. е. совпадающими с частотой и амплитудой рассматриваемого источника в момент излучения. За счет выбора параметра $q$ всегда можно добиться выполнения равенства $-\varphi'(\tau)|_{\tau=\alpha} = 1$, поэтому будем считать источник гармоническим и его безразмерную частоту — равной единице. Водный слой, над которым движется модельный источник, считаем слоем постоянной глубины, однородным по горизонтальным переменным, и таким, каким он является над источником в момент излучения, т. е. при $\xi = \xi_0(\alpha)$. Для простоты будем считать, что рассматриваемый источник в момент излучения движется вдоль оси $\xi_1$. Тогда траекторию движения модельного источника можно задать уравнением $\xi_0(\tau) = v\tau\mathrm{e}_1$, где $\mathrm{e}_1$ — единичный вектор оси $\xi_1$.

Задача о волновом поле модельного гармонического источника решается точно с помощью преобразования Фурье по времени и последующего разделения переменных при построении спектральной функции (см. работу [2], в которой с помощью преобразования Фурье было построено решение задачи о поле точечного гармонического источника, движущегося равномерно и прямолинейно в стратифицированном водном слое).

Имея в виду определить коэффициенты возбуждения $\mathcal{B}^{(0)}_{m0}(\alpha, \vartheta)$ на основе принципа локальности, вычислим по формуле (12) волновое поле нестационарной нормальной волны в адиабатическом и старшем по $\varkappa$ приближениях для точечного гармонического источника ($\varphi(\tau) = \tau$), движущегося на высоте $\zeta_0(\alpha)$ по закону $\xi_0(\tau) = v\tau \mathbf{e}_1$ над стратифицированным водным слоем с показателем преломления $n_w = n_w(\zeta, \xi_0(\alpha))$ и с постоянной глубиной $h = h(\xi_0(\alpha))$. Для такого слоя интегралы $M^2_{m0}$, $N^2_{m0}$ и $(N_{m0}')^2$ (см. (10)) не зависят от $\xi$ и $\tau$, поскольку вычисляются по фиксированному промежутку $[0, h(\xi_0(\alpha))]$, а их подынтегральные функции соответствуют фиксированному значению $\xi = \xi_0(\alpha)$ и не содержат $\tau$. Поэтому характеристическая система (8) принимает вид

$$\frac{d\tau}{ds} = 1, \quad \frac{d\xi_i}{ds} = \frac{N^2_{m0} p_i}{M^2_{m0} \mathcal{H}^{(0)}_m (p^2)}, \quad \frac{dp_0}{ds} = 0, \quad \frac{dp_i}{ds} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{13}$$

Начальные данные (см. равенства (9)) запишутся в форме

$$\tau \Big|_{s=0} = \alpha, \quad \xi \Big|_{s=0} = v\alpha \mathbf{e}_1, \quad p_0 \Big|_{s=0} = -\Omega_m, \quad \mathbf{p} \Big|_{s=0} = K_m \mathbf{e}, \tag{14}$$

причем выполняются условия согласования (см. (11))

$$\Omega_m = \mathcal{H}^{(0)}_m (K^2_m), \quad \Omega_m = K_m v \cos \vartheta + 1. \tag{15}$$

Из последних трех уравнений системы (13) следует, что $p_0$ и $\mathbf{p}$ постоянно вдоль луча, и в силу (14): $p_0(\alpha, \vartheta, s) = -\Omega_m$, $\mathbf{p}(\alpha, \vartheta, s) = K_m \mathbf{e}$. Следовательно, в рассматриваемом случае пространственно-временные лучи — прямые линии

$$\tau = \alpha + s, \quad \xi = v\alpha \mathbf{e}_1 + s \mathbf{v}^G_m, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{v}^G_m = v^G_m \mathbf{e}, \quad v^G_m = N^2_{m0} K_m / (M^2_{m0} \Omega_n) \tag{17}$$

— групповая скорость нормальной волны, остающаяся постоянной вдоль пространственно-временного луча. Фазовая функция $\theta^{(0)}_m(\xi, \tau)$ и якобиан $J_m$ в ПВЛ координатах $\alpha$, $\vartheta$, $s$ легко вычисляются:

$$\theta^{(0)}_m (\xi, \tau) = -\alpha + (-\Omega_m + K_m v^G_m) s, \tag{18}$$

$$J_m = s (v^G_m)^2 [1 - \beta_m \cos \vartheta + \beta^2_m (d v^G_m / d\Omega_m) \times$$

$$\times K_m \sin^2 \vartheta (1 - \beta_m \cos \vartheta)^{-1}], \quad \beta_m = v / v^G_m. \tag{19}$$

Найдем связь декартовых координат $\xi_1$, $\xi_2$ и времени $\tau$ с ПВЛ координатами. Если вместо $\xi_1$ и $\xi_2$ ввести координаты (см. рисунок)

$$R = [(v\tau - \xi_1)^2 + \xi^2_2]^{1/2}, \quad \Phi = \mathrm{arctg}\, [(v\tau - \xi_1)/\xi_2], \tag{20}$$

то формулы связи будут иметь следующий простой вид:

$$\mathrm{tg}\, \Phi = (\beta_m - \cos \vartheta)/\sin \vartheta, \quad \tau - \alpha = R \cos (\vartheta - \Phi)/(v \sin \vartheta). \tag{21}$$

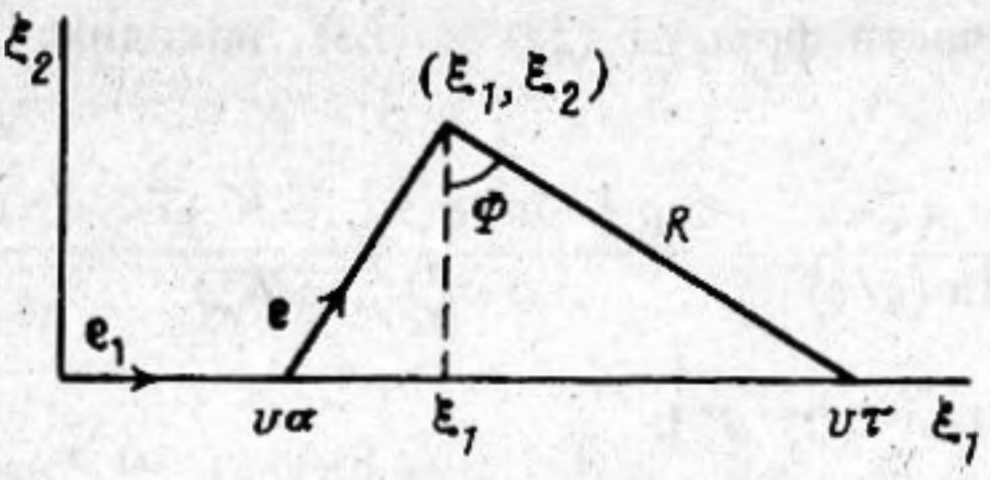


Рис.

В координатах $R$, $\Phi$, $\tau$ имеем

$$\theta_m^{(0)} = -\tau + K_m R \sin(\vartheta - \Phi),$$

$$J_m = v_m^G R \mid \beta_m - \cos\vartheta \mid \, [1 - \beta_m^2 \cos^2 \Phi \,(1 - K_m dv_m^G / d\Omega_m)] \times$$

$$\times \; [(1 - \beta_m \cos\vartheta) \mid \sin\Phi \mid ]^{-1}.$$

Пять величин $\alpha$, $\vartheta$, $s$, $K_m$ и $\Omega_m$ связаны тремя уравнениями (16) и двумя уравнениями (15), из которых они и могут быть определены. При фиксированном $\alpha$ величины $\vartheta$, $K_m$ и $\Omega_m$, входящие в формулы (18), (19) находятся из решений трех уравнений: двух уравнений (15) и первого уравнения (21).

Подставим найденные значения для $\theta_m^{(0)}$ и $J_m$ в выражение (12) и воспользуемся формулой (17) для модуля групповой скорости $v_m^G$. Тогда для нестационарной нормальной волны $u_{m0}^{(0)}$ в адиабатическом и старшем по $\varkappa$ приближениях получим

$$u_{m0}^{(0)} = \frac{\mathfrak{B}_{m0}^{(0)}(\alpha, \vartheta)}{(K_m R)^{1/2}} \left\{ \frac{(1 - \beta_m \cos\vartheta) \mid \sin\Phi \mid}{\mid \beta_m - \cos\vartheta \mid \, [1 - \beta_m^2 \cos^2\Phi \,(1 - K_m dv_m^G / d\Omega_m)]} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \hat{f}_m^{(0)}(\zeta) \exp\{ i\,(q/\varepsilon)\, [-\tau + K_m R \sin(\vartheta - \Phi)]\}, \tag{22}$$

где $\hat{f}_m^{(0)}(\zeta) = f_m^{(0)}(\zeta) (N_{m0}^2)^{-1/2}$ — нормированная собственная функция однородной задачи Штурма — Лиувилля (5).

Суперпозиция нормальных волн $\sum\limits_m u_{m0}^{(0)} = u_0^{(0)}$ дает в адиабатическом и старшем по $\varkappa$ приближениях акустическое поле, порожденное в водном слое источником, движущимся в атмосфере, за вычетом боковой волны, которая в рассматриваемой задаче имеет характер приповерхностной волны и экспоненциально затухает по глубине.

С другой стороны, если интеграл Фурье, представляющий нестационарную нормальную волну $u_{m0}$ модельной задачи, заменить его асимптотикой при $(q/\varepsilon) K_m R >> 1$, найденной по методу стационарной фазы, и это выражение разложить по степеням $\varkappa$, то для $u_{m0}^{(0)}$ в использованных обозначениях получим следующую формулу:

$$u_{m0}^{(0)} = e^{3\pi i/4} \frac{A(\alpha)}{[8\pi\,(q/\varepsilon)\, K_m R]^{1/2}} \left\{ \frac{\mid \sin\Phi \mid^{1/2}}{\mid \beta_m - \cos\vartheta \mid \, [1 - \beta_m^2 \cos^2\Phi\,(1 - K_m dv_m^G / d\Omega_m)]} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \frac{\exp[-iq\,(n_a^2 \Omega_m^2 - K_m^2)^{1/2} \zeta_0(\alpha)]}{q\,(n_a^2 \Omega_m^2 - K_m^2)^{1/2}} \frac{d\hat{f}_m^{(0)}(0)}{d\zeta} \hat{f}_m^{(0)}(\zeta) \times$$

$$\times \exp\{ i\,(q/\varepsilon)\, [-\tau + K_m R \sin(\vartheta - \Phi)]\}. \tag{23}$$

Приравнивая правые части формул (22) и (23), находим коэффициент возбуждения:

$$\mathcal{B}_{m0}^{(0)}(\alpha, \vartheta) = e^{3\pi i/4} \frac{A(\alpha)}{[8\pi (q/\varepsilon)]^{1/2}} \frac{\exp[-iq(n_a^2\Omega_m^2 - K_m^2)^{1/2}\zeta_0(\alpha)]}{q(n_a^2\Omega_m^2 - K_m^2)^{1/2}} \times$$

$$\times (1 - \beta_m \cos\vartheta)^{-1/2} [d\hat{f}_m^{(0)}(0)/d\zeta]. \tag{24}$$

Напомним, что все величины, входящие в формулу (24), вычисляются при фиксированном $\xi = \xi_0(\alpha)$.

Следует заметить, что формула для нестационарной нормальной волны, получаемая из интеграла Фурье по методу стационарной фазы, справедлива при любых значениях $\varkappa$. Она отличается от формулы (23) заменой собственных функций $\hat{f}_m^{(0)}$ на нормированные резонансные функции $\hat{f}_m = f_m(\zeta)(N_m^2)^{-1/2}$, где $N_m^2 = \int\limits_0^h f_m^2(\zeta)\,d\zeta$. Величины $\Omega_m$ и $K_m$ будут связаны соотношениями (11), в первом из которых функция $\mathcal{H}_m^{(0)}$ должна быть заменена на $\mathcal{H}_m$ (см. [1] (21)). В формулу для $\mathcal{H}_m$ вместо вещественных интегралов $M_{m0}^2$, $N_{m0}^2$, $(N_{m0}')^2$ входят соответствующие им комплексные значения ([1] (19), а также дополнительные члены порядка $O(\varkappa)$. Разлагая формулу для нестационарной нормальной волны, получаемой из интеграла Фурье по методу стационарной фазы, по степеням $\varkappa$ и сохраняя члены, содержащие $\varkappa^l$, $l \geq 1$, можно вычислить старшие коэффициенты возбуждения $\mathcal{B}_{m0}^{l}(\alpha, \vartheta)$, $l \geq 1$.

Объединяя формулы (12) и (24), получаем окончательное выражение для нестационарной нормальной волны в адиабатическом и старшем по $\varkappa$ приближениях:

$$u_{m0}^{(0)} = e^{3\pi i/4} \frac{A(\alpha)}{[8\pi (q/\varepsilon)]^{1/2}} [-(\partial\theta_m^0/\partial\tau) M_{m0}^2 J_m]^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left\{ i(q/\varepsilon)\,\theta_m^{(0)}(\xi, \tau) - \frac{1}{2}\int\limits_0^s [(\mathbf{v}_m^G, \nabla_\perp h)(f_m^{(0)}(h))^2/N_{m0}^2 -\right.$$

$$\left. - L_{m0}^2/M_{m0}^2]\,ds \right\} f_{m0}^{(0)}(\zeta, \xi, \tau) \times$$

$$\times \left[ \left(1 - \beta_m \cos\vartheta\right)^{-1/2} \frac{\exp[-iq(n_a^2\Omega_m^2 - K_m^2)^{1/2}\zeta_0(\alpha)]}{q(n_a^2\Omega_m^2 - K_m^2)^{1/2}} \frac{d\hat{f}_m(0)}{d\zeta} \right] \Bigg|_{\xi=\xi_0(\alpha)}. \tag{25}$$

Для того чтобы проследить изменение во времени различных характеристик нестационарной нормальной волны фиксированного номера $m$, рассмотрим следующий частный случай. Пусть скорость распространения звука в водном слое постоянна ($n_w = 1$), а глубина слоя $h$ зависит только от $\xi_1$, т. е. $h = h(\xi_1)$. Гармонический источник ($\varphi(\tau) = -\tau$) постоянной амплитуды $A$ движется по траектории $(\zeta_0(\tau), v\tau, 0)$ в направлении оси $\xi_1$ с постоянной горизонтальной безразмерной скоростью $v < 1$ (т. е. размерная скорость движения источника меньше скорости звука в воде).

Собственные значения задачи Штурма — Лиувилля (5) при $n_w \equiv 1$ и $h = h(\xi_1)$, очевидно, равны $(\mu_m^{(0)})^2 = \partial\theta_m^{(0)}/\partial\tau)^2 - a_m^2 q^{-2} h^{-2}(*\xi_1)$, где $a_m = \pi(m + 1/2)$, $m = 0, 1, \ldots$. В качестве собственных функций возьмем сразу же нормированные собственные функции $\hat{f}_m^{(0)}(\zeta, \xi_1) = [2/h(\xi_1)]^{1/2} \times \cos[a_m(1 - \zeta/h(\xi_1))]$. Тогда $M_{m0}^2 = N_{m0}^2 = 1$, $(N_{m0}')^2 = a_m^2/h^2(\xi_1)$, и характеристическая система (8) с начальными условиями (9) запишется в форме

$$\frac{d\tau}{ds}=1,\quad \frac{d\xi_i}{ds}=\frac{p_i}{[p^2+a_m^2q^{-2}h^{-2}(\xi_1)]^{1/2}},\quad i=1,2,$$

$$\frac{dp_0}{ds}=0,\quad \frac{dp_1}{ds}=\frac{a_m^2q^{-2}h^{-3}(\xi_1)\,h'(\xi_1)}{[p^2+a_m^2q^{-2}h^{-2}(\xi_1)]^{1/2}},\quad \frac{dp_2}{ds}=0, \tag{26}$$

$$\tau\,|_{s=0}=\alpha,\quad \xi\,|_{s=0}=v\alpha e_1,\quad p_0\,|_{s=0}=-\Omega_m,\quad \mathbf{p}\,|_{s=0}=K_m\mathbf{e}, \tag{27}$$

где $\mathbf{e}_1$ — орт оси $\xi_1$. Условия согласования (11) принимают вид

$$\Omega_m=[K_m^2+a_m^2q^{-2}h_0^{-2}]^{1/2},\quad \Omega_m=K_m v\cos\vartheta+1.$$

Здесь $h_0=h(v\alpha)$ — глубина водного слоя под источником в момент излучения $\tau=\alpha$.

Поскольку уравнение для $p_1$ может быть записано в форме $dp_1^2/ds=-a_m^2q^{-2}d\,(h^{-2})/ds$, система (26) легко интегрируется. Выпишем ее решение, удовлетворяющее начальным условиям (27),

$$\tau=\alpha+s,\qquad \left|\int\limits_{v\alpha}^{\xi_1}[v_{m1}^{g}(x)]^{-1}\,dx\right|=s,\quad \xi_2=v_{m2}^{g}s, \tag{28}$$

$$p_0=-\Omega_m,\quad p_1=\Omega_m v_{m1}^{g}(\xi_1),\quad p_2=\Omega_m v_{m2}^{g},$$

где

$$v_{m1}^{g}(\xi_1)=\Omega_m^{-1}\{K_m^2\cos^2\vartheta+a_m^2q^{-2}[h_0^{-2}-h^{-2}(\xi_1)]\}^{1/2},\quad v_{m2}^{g}=K_m\Omega_m^{-1}\sin\vartheta$$

— составляющие вектора групповой скорости в точке с декартовой координатой $\xi_1$ и лучевыми координатами $\alpha$, $\vartheta$. Фазовая функция $\theta_m^{(0)}(\xi,\tau)$, вычисляемая по формуле (6), в рассматриваемом случае принимает значение

$$\theta_m^{(0)}=-\alpha+\Omega_m\,[-1+(v_{m2}^{g})^2]\,s+\ \Omega_m\int\limits_{v\alpha}^{\xi_1}v_{m1}^{g}(x)\,dx.$$

Якобиан $J_m=|D(\xi_1,\xi_2,\tau)/D(\alpha,\vartheta,s)|$ находится с помощью равенств (28), связывающих декартовы и лучевые координаты, и оказывается равным

$$J_m=v_{m1}^{g}(\xi_1)\Big\{[v_{m2}^{g}-s\partial v_{m2}^{g}/\partial\alpha]\int\limits_{v\alpha}^{\xi_1}(v_{m1}^{g}(x))^{-2}(\partial v_{m1}^{g}(x)/\partial\vartheta)\,dx+$$

$$+[v\operatorname{tg}\vartheta/v_{m2}^{g}-1+\int\limits_{v\alpha}^{\xi_1}(v_{m1}^{g}(x))^{-2}(\partial v_{m1}^{g}(x)/\partial\alpha)\,dx]\,s\,(\partial v_{m2}^{g}/\partial\vartheta).$$

Производные составляющих групповой скорости выражаются через производные от $K_m$ и $\Omega_m$, которые находятся из продифференцированных по $\alpha$ и $\vartheta$ условий согласования

$$\frac{\partial K_m}{\partial\alpha}=-\frac{a_m^2}{q^2}\frac{h_0'}{h_0^3}\frac{v}{\Omega_m v\cos\vartheta-K_m},\quad \frac{\partial K_m}{\partial\vartheta}=\frac{\Omega_m K_m v\sin\vartheta}{\Omega_m v\cos\vartheta-K_m}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial\Omega_m}{\partial\alpha}=-\frac{a_m^2}{q^2}\frac{h_0'}{h_0^3}\frac{v^2\cos\vartheta}{\Omega_m v\cos\vartheta-K_m},\quad \frac{\partial\Omega_m}{\partial\vartheta}=\frac{K_m^2 v\sin\vartheta}{\Omega_m v\cos\vartheta-K_m},$$

где $h_0'=dh/d\xi_1\big|_{\xi_1=v\alpha}$.

Вычислим, наконец, множитель в формуле (25), содержащий интеграл по $s$. Так как в рассматриваемом случае $L^2_{m0} = 0$ и

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{v}^G_m, \nabla_\perp h)(f^{(0)}_m(h))^2/N^2_{m0} = -v^G_{m1}h'(\xi_1)/h(\xi_1) = -[h'(\xi_1)/h(\xi_1)](d\xi_1/ds),$$

то

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^s [(\mathbf{v}^G_m, \nabla_\perp h)(f^{(0)}_m(h))^2/N^2_{m0} - L^2_{m0}/M^2_{m0}]\,ds\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\int\limits_{v\alpha}^{\xi_1}[h'(x)/h(x)]\,dx\right\} = h_0/h(\xi_1).$$

В результате формула (25) сильно упрощается:

$$u^{(0)}_{m0} = e^{3\pi i/4}\frac{A}{[2\pi(q/\varepsilon)]^{1/2}}\frac{h_0}{h(\xi_1)}[\Omega^2_m(1-\beta_{m0}\cos\vartheta)J_m]^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{i(q/\varepsilon)\left[-\alpha+\Omega_m(-1+(v^G_{m2})^2)s+\Omega_m\int\limits_{v\alpha}^{\xi_1}v^G_{m1}(x)\,dx\right]\right\}\times$$

$$\times\frac{(\Omega^2_m-K^2_m)^{1/2}}{(n^2_a\Omega^2_m-K^2_m)^{1/2}}\frac{(-1)^m}{(h_0h(\xi_1))^{1/2}}\exp[-iq(n^2_a\Omega^2_m-K^2_m)^{1/2}\zeta_0(\alpha)]\times$$

$$\times\cos a_m(1-\zeta/h(\xi_1)), \tag{30}$$

где

$$\beta_{m0} = \beta_m\Big|_{\boldsymbol{\xi}=(v\alpha,\,0)} = v\left[v^G_m\Big|_{\boldsymbol{\xi}=(v\alpha,\,0)}\right]^{-1} = v\Omega_mK^{-1}_m.$$

Для того чтобы еще больше упростить формулу (30), предположим, что зависимость $h$ от $\xi_1$ линейная: $h = \lambda\xi_1$, $\lambda > 0$, и точка наблюдения имеет координаты $(\zeta, \xi_1, 0)$. Тогда угол $\vartheta$ равен нулю или $\pi$. Если для определенности считать, что источник приближается к точке наблюдения, то $\vartheta = 0$. При сделанных дополнительных предположениях связь лучевых координат $\alpha$, $s$ с координатой $\xi_1$ и временем $\tau$ будет задаваться формулами

$$\tau = \alpha + s, \quad \int\limits_{v\alpha}^{\xi_1}[v^G_m(x,\alpha)]^{-1}\,dx = s, \tag{31}$$

$$\Omega^2_m = K^2_m + a^2_mq^{-2}h^{-2}_0, \quad \Omega_m = vK_m + 1, \tag{32}$$

где теперь $h_0 = \lambda v\alpha$ и через

$$v^G_m(x,\alpha) = \Omega^{-1}_m\{K^2_m + a^2_mq^{-2}[h^{-2}_0 - (\lambda x)^{-2}]\}^{1/2} = \{1 - a^2_m(\Omega_mq\lambda x)^{-2}\}^{1/2}$$

обозначен модуль групповой скорости нормальной волны, излученной в момент времени $\tau = \alpha$ и измеряемой в точке $\xi_1 = x$ (при $\xi_2 = 0$ имеем $\mathbf{v}^G_m = (v^G_m, 0)$).

Если решения уравнений (32) комплексны, то фаза волны (30) имеет отрицательное вещественное слагаемое, поэтому волна будет затухать с ростом $\xi_1 - v\alpha$. Найдем момент времени $\alpha = \alpha^*_m$, когда излучаемая нормальная волна с номером $m$ становится распространяющейся. (В момент времени $\tau = \alpha^*_m$ источник пролетает над водным слоем, глубина которого $h = \lambda v\alpha^*_m$ соответствует глубине, при которой нормальная волна частоты $\Omega_m$ становится распространяющейся).

Система уравнений (32) будет иметь вещественные решения, если дискриминант $D_m$ уравнения $(K_m v + 1)^2 = K_m^2 + \gamma_m^2$, $\gamma_m = a_m/(q\lambda v\alpha)$ неотрицателен, т. е. если $D_m = 1 - (1 - v^2)\gamma_m^2 \geq 0$. Дискриминант $D_m$ обращается в нуль при $\gamma_m = 1/(1 - v^2)^{1/2}$. Заменяя здесь $\gamma_m$ на $a_m/(q\lambda v\alpha_m^*)$, находим искомый момент времени $\alpha_m^* = (1 - v^2)^{1/2} a_m/(q\lambda v)$. Значению $\alpha = \alpha_m^*$ соответствует частота $\Omega_m = \Omega_m^* = 1/(1 - v^2)^{1/2}$, волновой вектор $K_m = K_m^* = v/(1 - v^2)^{1/2}$ и модуль групповой скорости

$$v_m^G(x, \alpha_m^*) = \left\{ v^2 + \frac{a_m^2}{q^2 (\Omega_m^*)^2 \lambda^2} \left( \frac{1}{v^2 (\alpha_m^*)^2} - \frac{1}{x^2} \right) \right\}^{1/2} = \left\{ 1 - \frac{a_m^2}{(\Omega_m^*)^2 q^2 \lambda^2 x^2} \right\}^{1/2}.$$

Момент прихода нормальной волны номера $m$, излученной в момент времени $\alpha_m^*$, в точку наблюдения $(\zeta, \xi_1, 0)$, т. е. время начала ее регистрации $\tau = \tau_m^*$ в точке наблюдения, находится из системы (31) при $\alpha = \alpha_m^*$ и равно

$$\tau_m^* = \alpha_m^* + \int_{v\alpha_m^*}^{\xi_1} [v_m^G(x, \alpha_m^*)]^{-1} \, dx.$$

В этот момент времени источник находится в точке $\zeta_0 = \zeta_0(\tau_m^*)$, $\xi_{10} = v\tau_m^*$, $\xi_{20} = 0$. Покажем, что $\xi_1 > v\tau_m^*$. Действительно, $\tau_m^* - \alpha_m^* = \int_{v\alpha_m^*}^{\xi_1} [v_m^G(x, \alpha_m^*)]^{-1} \, dx < \int_{v\alpha_m^*}^{\xi_1} v^{-1} \, dx = (\xi_1 - x\alpha_m^*)/v$, откуда и следует, что $v\tau_m^* < \xi_1$. Доказанное неравенство означает, что в точке наблюдения $(\zeta, \xi_1, 0)$ распространяющаяся в водном слое нормальная волна регистрируется еще до пролета над нею источника.

Заметим, что в формулу (30) для нормальной волны $u_{m0}^{(0)}$ при $\vartheta = 0$, $\alpha = \alpha_m^*$ входит выражение $(1 - \beta_{m0} \cos \vartheta) J_m \big|_{\vartheta = 0, \alpha = \alpha_m^*}$. При $\alpha = \alpha_m^*$ имеем $\beta_{m0} = v/v_m^G(v\alpha_m^*, \alpha_m^*) = 1$ и, следовательно, $(1 - \beta_{m0} \cos \vartheta)|_{\vartheta = 0, \alpha = \alpha_m^*} = 0$. С другой стороны, при $\vartheta = 0$ и $\alpha = \alpha_m^*$, как это следует из формул (29), обращаются в бесконечность производные от $\Omega_m$ и $K_m$ по $\alpha$ и $\vartheta$, а вместе с ними обращается в бесконечность и якобиан $J_m$. Раскрывая возникающую при $\vartheta = 0$ и $\alpha \to \alpha_m^*$ неопределенность, получаем

$$(1 - \beta_{m0} \cos \vartheta) J_m \Big|_{\vartheta = 0, \alpha = \alpha_m^*} = v_m^G(\xi_1, \alpha_m^*) \, v^2 (1 - v^2)^{5/2} \times$$

$$\times \, a_m s (\lambda q)^{-1} \int_{v\alpha_m^*}^{\xi_1} x^{-2} [v_m^G(x, \alpha_m^*)]^{-3} \, dx.$$

После этого формула (30) позволяет вычислить нормальную волну номера $m$ в момент $\tau = \tau_m^*$ ее прихода в точку наблюдения и в последующие моменты времени, в частности и в момент пролета над нею источника $\tau = v\tau_m^*$.

Заметим, что выполнение формального предельного перехода при $\alpha \to \alpha_m^*$ нуждается в обосновании. Дело в том, что, с одной стороны, корректный вывод формулы (23) при выполнении соотношения $\beta_m = \cos \vartheta$ должен основываться на модифицированном методе стационарной фазы, применимом в том случае, когда стационарная точка близка к особенностям подынтегральной функции. С другой стороны, при $K_m$, близких к $\Omega_m v \cos \vartheta$, для описания поля нормальной волны следует пользоваться разложением, отличным от (1) и содержащим вместо экспоненты специальные функции.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булдырев В. С., Григорьева Н. С.* Акустическое поле, порождаемое в водном слое переменной глубины движущимся в атмосфере источником. I. Нестационарные нормальные волны // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 5. С. 782—792.
2. *Hawker K. E.* A normal mode theory of acoustic Doppler effects in the ocean waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. V. 65. № 3. P. 675—681.



Санкт-Петербургский
государственный университет



Поступила в редакцию
03.02.93



Санкт-Петербургский
государственный морской технический
университет



**V. S. Buldyrev, N. S. Grigor'eva**


## ACOUSTIC FIELD GENERATED IN WATER LAYER OF VARIED DEPTH BY A SOURCE MOVING IN ATMOSPHERE


A problem on calculation of sound field in a water layer, which is produced by a point source moving in atmosphere. Sound velocity in atmosphere is assumed to be constant. The depth of the water layer is varied gradually in horizontal directions. Sound velocity in the water layer depends on the vertical coordinate and changes gradually in horizontal directions and time. The source radiates a signal of alternating amplitude and phase and moves with the velocity less than sound velocity in water. General formulations for nonstationary normal waves excited by a moving source have been obtained in the previous paper. Excitation coefficients for these waves are found out in this paper. A particular case, when the velocity of sound propagation in the water layer is constant and the layer depth depends only on one horizontal coordinate, is considered in detail, the source moving rectilinearly and uniformly. Analytical formulas obtained for this particular case allow to draw a conclusion that nonstationary normal waves propagating in a water layer of increasing depth can be detected in the observation point even before the source passage above it.