АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 2, с. 189 - 195

УДК 534.26

ОСОБЕННОСТИ ДИФРАКЦИИ ЗВУКА НА ДВИЖУЩЕЙСЯ СФЕРЕ БОЛЬШОГО РАДИУСА

© 1994 г. В. Н. Алексеев, А. Г. Семенов

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН

117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 30.12.92 г.

В работе представлены результаты теоретических исследований рассеяния звука на сфере большого радиуса, движущейся в жидкости. В линейном приближении по гидродинамическому числу Маха сформулирована система уравнений и граничных условий. Получено решение задачи в квадратурах и приведены оценки. Показана значительная роль течений и найдено, что их учет более существенен, чем нахождение в рамках уравнения Гельмгольца поправок, связанных с движением только поверхности тела.

В работе [1] было найдено рассеянное поле в окрестности движущейся сферы малого радиуса. Поскольку движение тела в реальных средах сопровождается увлечением частиц окружающей жидкости, то рассеяние звука в этом случае происходит как на движущейся поверхности самого тела, так и на неоднородностях сопутствующего течения жидкости. В упомянутой работе [1] было показано, что для сферы, радиус которой мал по сравнению с длиной волны звука, парциальная амплитуда рассеяния звука на течении и поправка к парциальной амплитуде рассеяния на теле, вызванная движением его поверхности, одного порядка. Отсюда следовало, в частности, что разделение полного рассеянного поля на отдельные составляющие не имело физического смысла, а было лишь удобно в вычислительном плане. В низкочастотном приближении, когда безразмерный параметр ka был очень мал, задачу удалось решить в линейном приближении по гидродинамическому числу Маха, причем полученное решение имело простой и компактный вид. Из этого решения следовало, что поправки к полной амплитуде рассеяния, вызванные движением тела, имеют первый порядок по числу Маха, так что при малой его величине поправки были также малы. Однако в случае дифракции звука на движущейся сфере, когда ее радиус много больше длины волны падающего звука и параметр ka велик, ситуация меняется коренным образом. Уже в работе [2] было показано, что рассеянное поле в окрестности движущегося тела больших размеров перестраивается таким образом, что в некоторых областях пространства возможно заметное и значительное усиление поля даже в однородной среде и при относительно малых числах Маха. В настоящей работе мы рассмотрим задачу о рассеянии звука на сфере большого радиуса более строго и несколько подробнее.

Будем считать, что в безграничной и однородной жидкости, покоящейся на бесконечности, движется твердая сфера радиуса a с постоянной скоростью $\mathbf{V}$. Движущаяся сфера увлекает за собой прилегающие к ее поверхности частицы жидкости, и окружающая среда в окрестности тела приходит в движение. Если скорость движения сферы, а следовательно, и скорость сопутствующего течения жидкости, много меньше скорости звука, то жидкость можно считать несжимаемой. Полагая, что жидкость идеальна, а обтекание ею сферы совершается потенциальным образом, находим, что распределение скорости в среде $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ будет описываться хорошо известной формулой [3]

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \frac{a^3}{2}\frac{3(\mathbf{V}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{V}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|^3}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r}_0(t)$ – координата центра шара, который движется с постоянной скоростью $\mathbf{r}'_0(t) = \mathbf{V}$, $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности сферы, направленный в точку наблюдения $\mathbf{r}$.

На сферу падает приходящая из бесконечности плоская монохроматическая волна вида $p_i(\mathbf{r}, t) = p_0\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - i\omega_0 t)$. Волновой вектор $\mathbf{k}_0$ направлен здесь вдоль единичного вектора $\mathbf{n}_0$, а его модуль связан с частотой звука ω_0 и его скоростью c соотношением $\mathbf{k}_0 = \omega_0/c$. В линейном приближении по гидродинамическому числу Маха $M = V/c$ распространение звука в среде с течением будем описывать уравнением Лайтхилла

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right) = 2\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(U_\beta\frac{\partial^2 p}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right), \quad (2)$$

где по дважды повторяющимся индексам предусмотрено суммирование. Для однозначного решения задачи о рассеянии звука на движущейся

сфере уравнение (2) вместе с условием на бесконечности надо дополнить граничным условием на поверхности сферы. Для простоты рассмотрим случай абсолютно жесткой сферы, когда на ее поверхности $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = a$ ставится единственное условие – равенство нулю нормальной составляющей скорости жидкости в звуковой волне. При отсутствии у движущейся жидкости вязкости ее движение в звуковой волне может описываться, как и в неподвижной среде, с помощью скалярного потенциала φ [6]. В этом случае равенство $\mathbf{v}\mathbf{n}_0 = 0$ на поверхности шара соответствует граничному условию типа Неймана

$$(\mathbf{n}\nabla\varphi)_{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t) + a\mathbf{n}} = 0, \qquad (3)$$

ставящемуся на подвижной границе. Необходимость решения внутренней задачи отпадает, а решение общей задачи рассеяния значительно облегчается.

Поскольку по предположению сфера движется в жидкости с постоянной скоростью, то при решении задачи удобно перейти в подвижную систему координат $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, в которой сфера покоится. В этом случае "коэффициент" $\mathbf{U}(\mathbf{r}')$ в правой части уравнения (2) перестает зависеть от времени, а граничное условие на поверхности сферы будет ставиться теперь на неподвижной поверхности $r' = a$. Явная зависимость от времени будет встречаться теперь только при формулировке дополнительного условия на бесконечности для падающей волны $p_i(\mathbf{r}', t)$. Но при переходе в подвижную систему координат $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ поле падающей плоской монохроматической волны превращается в звуковую волну того же типа $p_i(\mathbf{r}', t) = p_0 \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}' - i\omega t)$, но с другой частотой. Новая частота ω оказывается смещенной относительно старой частоты ω_0 на небольшую величину, пропорциональную числу Маха, и равна $\omega = \omega_0(1 - \mathbf{M}\mathbf{n}_0)$. В связи с этим временная зависимость всех искомых величин в подвижной системе координат будет определяться исключительно временным множителем вида $\exp(-i\omega t)$, встречающимся явно только в условии на бесконечности.

Для окончательной формулировки задачи, т.е. при записи управляющего уравнения вместе со всеми необходимыми дополнительными условиями, следует установить еще связь между акустическим давлением p и скалярным потенциалом φ, определяющим скорость частиц жидкости в звуковой волне $\mathbf{v} = \nabla\varphi$. Используя уравнение движения Эйлера, записанное с учетом течения жидкости в линейном приближении по числу M, найдем, что искомая связь после перехода в подвижную систему координат будет выглядеть так:

$$p(\mathbf{r}', t) = i\omega\rho\left\{\varphi(\mathbf{r}', t) + \frac{i}{\omega}[U_\alpha - V_\alpha]\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\alpha}\right\}. \qquad (4)$$

Принимая во внимание полученное соотношение (4) между переменными φ и p, математическую задачу можно сформулировать теперь как для потенциала φ, так и для акустического давления p. Так, используя зависимость $\varphi(p)$, следующую из обращения равенства (4), легко записать граничное условие (3) в терминах давления. Вместе с уравнением (2) и условием на бесконечности это дает возможность постановки замкнутой задачи для p. Однако в настоящей статье мы выберем иной подход, который был использован в работах [1, 4, 5] и связан с формулировкой дифракционной задачи для потенциала.

Подставив выражение (4) для $p(\mathbf{r}', t)$ в уравнение (2), записанное в подвижной системе координат, и удерживая только линейные члены по M, можно найти уравнение для потенциала φ. Однако для того, чтобы привести уравнение для $\varphi(\mathbf{r}', t)$ к виду, похожему на обычное волновое уравнение с правой частью, введем, кроме того, новую функцию ψ. Амплитуду калибровочного потенциала $\psi(\mathbf{r}')$ свяжем со скалярным потенциалом $\varphi(\mathbf{r}', t)$ следующим соотношением:

$$\varphi(\mathbf{r}', t) = \psi(\mathbf{r}')e^{ik\mathbf{r}'\mathbf{M} - i\omega t}. \qquad (5)$$

Новое волновое число $k = \omega/c$ определяется здесь уже через доплеровскую частоту ω. Подставив теперь (5) в модифицированное уравнение (2), записанное для скалярного потенциала φ в подвижной системе координат, найдем, что с точностью до линейных членов по гидродинамическому числу Маха уравнение для калибровочного потенциала $\psi(\mathbf{r}')$ будет выглядеть так:

$$\Delta'\psi + k^2\psi = -\frac{2ik}{c}U_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x'_\alpha}. \qquad (6)$$

Используя определение (5), найдем также, что простое граничное условие (3) превращается для потенциала ψ в условие смешанного типа

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r'}\right)_{r' = a} = -ik\mathbf{n}\mathbf{M}\psi(a). \qquad (7)$$

Вид выражения для падающей волны в терминах калибровочного потенциала ψ тоже изменяется. Из выражения (4) находим обратную зависимость $\varphi(p)$ и, подставляя в нее значение $p_i(\mathbf{r}', t) = p_0\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}' - i\omega t)$, найдем, что с точностью до линейных членов по числу Маха падающее поле выглядит теперь следующим образом:

$$\psi_i(\mathbf{r}') = \psi_0 e^{ik\mathbf{r}'(\mathbf{n}_0 - \mathbf{M}_\perp)}\left[1 + \frac{\mathbf{U}\mathbf{n}_0 - \mathbf{V}\mathbf{n}_0}{c}\right], \qquad (8)$$

где $\psi_0 = p_0/i\omega\rho$, а вектор $\mathbf{M}_\perp = \mathbf{n}_0 x(\mathbf{M}\mathbf{n}_0)$ – перпендикулярен единичному вектору $\mathbf{n}_0$. Сразу же отметим, что в отличие от обычной ситуации калибровочный потенциал ψ_i, соответствующий падающей волне (8), не удовлетворяет ни исходному уравнению (6) с правой частью, ни однородному уравнению Гельмгольца. При этом нарушение равенства $\Delta\psi_i + k^2\psi_i = 0$ происходит в первом порядке приближения по числу Маха M.

Уравнение (6) с дополнительными условиями (7) и (8) позволяет найти единственное решение задачи, которое и будем искать с помощью обычной теории возмущений, считая параметр M малым. Поскольку рассматриваемые граничные условия и само уравнение (6) записаны с точностью до линейных членов по числу Маха, то разложение решения в ряд по числу M имеет смысл проводить тоже с той же точностью. Поэтому решение задачи (6) - (8) будем искать в виде суммы, состоящей только из первых двух членов бесконечного ряда возмущений: $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}$, где $\psi^{(0)}$ – нулевое приближение по M, а $\psi^{(1)}$ – линейная по M поправка.

С другой стороны, решение задачи можно представить в виде суммы падающей и рассеянных волн: $\psi = \psi_i + \psi_s$. Однако в отличие от дифракции звука на неподвижном теле рассеяние падающей волны (8) будет происходить теперь как на поверхности движущейся сферы, так и на неоднородностях сопутствующего течения $U(\mathbf{r}, t)$: $\psi_s = \psi_{sp} + \psi_{sf}$. Поэтому общее решение дифракционной задачи будем искать, как и в работе [1], в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) + \psi_{sp}(\mathbf{r}) + \psi_{sf}(\mathbf{r}). \tag{9}$$

Падающая волна $\psi_i(\mathbf{r})$ дается формулой (8); она имеет две составляющие: $\psi_i^{(0)}$ и $\psi_i^{(1)}$. В нулевом приближении по M общее решение $\psi^{(0)}$, полученное с помощью $\psi_i^{(0)}$, описывает рассеяние звука на неподвижной сфере при отсутствии течений. Второе слагаемое ψ_{sp} описывает поле, рассеянное движущейся поверхностью сферы. При этом предполагается, что сама функция ψ_{sp} удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца. В нулевом приближении по M она соответствует обычной рассеянной волне. Движение поверхности сферы и сопутствующее течение жидкости учитываются отраженной волной ψ_{sp} в линейном приближении по числу Маха через граничное условие (7) на поверхности $r' = a$ и условие на бесконечности. Процесс рассеяния звука на движущейся сфере, но без учета сопутствующего течения жидкости может быть описан в рамках однородного волнового уравнения или однородного уравнения Гельмгольца для монохроматических волн. Формально для этого достаточно положить в уравнении (6) скорость $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ равной нулю, а в граничном условии сохранить $V \neq 0$. Однако ниже будет показано, что процесс рассеяния необходимо рассматривать в рамках уравнения Лайтхилла, которое учитывает еще и рассеяние звука на неоднородностях сопутствующего течения жидкости. В этом случае общее решение (9) необходимо дополнить слагаемым ψ_{sp}, которое и будет описывать рассеяние на течении.

В нулевом приближении по числу Маха составляющая $\psi_{sf}^{(0)}$ тождественно равна нулю. Для нахождения уравнения для $\psi_{sf}^{(1)}$ необходимо подставить решение в форме (9) в уравнение (6) и учесть, что рассеянное поле ψ_{sp} удовлетворяет уравнению Гельмгольца, а вид падающей волны определяется формулой (8). Принимая во внимание, что для течения (1) $\Delta U = 0$, находим, что искомое уравнение для $\psi_{sf}^{(1)}$ должно выглядеть так:

$$\Delta'\psi_{sf}^{(1)} + k^2\psi_{sf}^{(1)} = -\frac{2ik}{c}U_\alpha\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}(\psi_i^{(0)} + \psi_{sp}^{(0)}) - \frac{2ik}{c}n_{0\alpha}n_{0\beta}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x'_\beta}\psi_i^{(0)}. \tag{10}$$

Для завершения постановки задачи необходимо сформулировать для $\psi_{sf}^{(1)}$ граничное условие на поверхности сферы. В работе [1] отмечалось, что разбиение граничного условия (7) для полного поля ψ на два отдельных условия для ψ_{sp} и ψ_{sf} неоднозначно. Поэтому в качестве решения уравнения (10) предлагается использовать то его частное решение, которое получается с помощью функции Грина свободного пространства $G(R) = R^{-1}\exp(ikR)$. В этом случае решение уравнения (10) можно записать в виде суммы двух слагаемых следующего вида:

$$\psi_{sf}^{(1)}(\mathbf{r}') = \frac{ikn_{0\alpha}n_{0\beta}}{2\pi c}\psi_0 \times \int d^3r''\frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}\frac{\partial}{\partial x''_\alpha}(U_\beta(r'')e^{ik\mathbf{n}_0\mathbf{r}''}) + \frac{ik}{2\pi c}\times \int d^3r''\frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}U_\alpha\frac{\partial\psi_{sp}^{(0)}}{\partial x''_\alpha} = \psi_{f1} + \psi_{f2}, \tag{11}$$

где интегрирование производится по внешней области сферы $r' > a$.

Теперь искомое решение ψ_{sp} будем искать с помощью граничного условия (7), рассматривая известную сумму потенциалов $\psi_i + \psi_{sf}^{(1)}$ как некоторое новое падающее поле. Поскольку отраженная волна ψ_{sp} при заданном виде функций ψ_i и $\psi_{sf}^{(1)}$ получается однозначной, то и полное решение задачи рассеяния, представленное в форме (9), будет также однозначным. Если же при решении дифференциального уравнения (10) взять его другое частное решение, выбрав иную функцию Грина, то конкретный вид $\psi_{sf}^{(1)}$, конечно, изменится. Но в этом случае изменится и граничное условие для нахождения рассеянной волны ψ_{sp}. Однако в сумме вновь найденное решение $\psi_i + \psi_{sf}^{(1)} + \psi_{sp}$ будет по-прежнему удовлетворять как уравнению (6), так и граничному условию (7).

В силу единственности решения задачи, выражения для полного поля, полученные разными способами, должны совпадать.

Первое слагаемое в формуле (11) описывает то воображаемое, фиктивное поле, которое возникало бы в движущейся среде при рассеянии звуковых волн на неоднородностях течения жидкости в предположении, что само движущееся тело, порождающее это сопутствующее течение, отсутствует. В ряде случаев это поле сравнительно хорошо аппроксимирует реальное волновое поле, рассеянное на неоднородностях сопутствующего течения жидкости. Так, в работе [1], где рассматривалось рассеяние звука на движущейся сфере малого радиуса, было показано, что после отражения от поверхности тела амплитуда рассеянного поля ψ_{sp} приобретает дополнительный множитель $(ka)^2$, независимо от того, движется сфера или нет. В этом случае второй интеграл в выражении (11) также получает дополнительный множитель, пропорциональный $(ka)^2$, и им можно пренебречь. Данный член описывает двухкратное перерассеяние первоначально невозмущенной падающей волны $\psi_i^{(0)}$, которая рассеивается вначале на поверхности сферы, а затем – на неоднородностях течения. Обратная последовательность рассеяния – вначале на течении, а затем на шаре – описывается полем $\psi_{sp}^{(1)}$. В этом проявляется, в частности, условность разбиения рассеянного поля ψ_s на две составляющие ψ_{sf} и ψ_{sp} и необходимость выделения в полном решении (9) дополнительной интерференционной составляющей ψ_{si}, связанной с указанным перерассеянием волн на течении и на теле.

Найдем теперь поле ψ_{sp}, рассеянное на поверхности движущегося шара. Для этого воспользуемся интегральной формулой Грина:

$$\psi_{sp}(\mathbf{r}') = \int \frac{d\mathbf{S}''}{4\pi} \times \tag{12}$$
$$\times\, [\psi_{sp}(\mathbf{r}'')\nabla'' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') - G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')\nabla'' \psi_{sp}(\mathbf{r}'')]\,.$$

Здесь $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^{-1}\exp(ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)$ – функция Грина свободного пространства, а интегрирование совершается по всей поверхности сферы $r' = a$, для которой $d\mathbf{S} = \mathbf{n}a^2 d\Omega_{\mathbf{n}}$. При решении интегрального уравнения (12) заметим, что согласно граничному условию (7) и записи общего решения в форме (9) искомая производная $\mathbf{n}\nabla\psi_{sp}$ на поверхности сферы равна

$$(\mathbf{n}\nabla\psi_{sp})_{r''=a} =$$
$$= -\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial r} + \frac{\partial\psi_{sf}^{(1)}}{\partial r} f + ik\mathbf{n}\mathbf{M}\,(\psi_i^{(0)} + \psi_{sp}^{(0)})\right]_{r''=a}. \tag{13}$$

Выражение (13) для производной записано с точностью до линейных членов по числу Маха. Что касается значения самого потенциала ψ на границе $r' = a$, то для его нахождения воспользуемся методом, использованным в монографии [7] и связанным с большим значением параметра ka. Для этого всю область телесных углов $d\Omega_{\mathbf{n}} = 4\pi$ сферической поверхности $r' = a$ разобьем на две части: "озвученную" область, где $\mathbf{n}_0\mathbf{n}'' < 0$, и область звуковой тени, где $\mathbf{n}_0\mathbf{n}'' > 0$. В коротковолновом приближении каждый элементарный участок сферы dS можно рассматривать локально как плоский, а при отражении звука от абсолютно жесткой плоскости амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей. Поскольку поле $\psi_{sf}^{(1)}$, рассеянное на течении, при его перерассеянии на поверхности сферы можно рассматривать как падающее, то с учетом договоренности о потенциале ψ_{si} оказывается, что на озвученной поверхности сферы, где $\mathbf{n}_0\mathbf{n}'' < 0$, полная отраженная волна равна $\psi_{sp}(r' = a, \mathbf{n}_0\mathbf{n}'' < 0) = (\psi_i + \psi_{sf}^{(1)})_{r'=a}$. В области же звуковой тени полное поле ψ на поверхности абсолютно жесткого шара можно считать в коротковолновом приближении равным нулю. Тогда из записи решения в форме (9) следует, что там $\psi_{sp}(r' = a, \mathbf{n}_0\mathbf{n}'' > 0) = -(\psi_i + \psi_{sf}^{(1)})_{r'=a}$. Отсюда вытекает, в частности, что в нулевом приближении по числу Маха $\psi_{sp}^{(0)} = -\psi_i^{(0)}$, и выражение, стоящее в круглых скобках в правой части (13), обращается в нуль.

Подставим найденные значения поля и его производной на границе $r' = a$ в формулу Грина (12):

$$\psi_{sp}(\mathbf{r}) = \frac{a^2}{4\pi} \int\limits_{\mathbf{n}_0\mathbf{n}''<0} d\Omega_{\mathbf{n}''} \times$$
$$\times \left[\frac{\partial}{\partial r''}(\psi_i + \psi_{sf}^{(1)})\, G + 2ik\mathbf{n}''\mathbf{M}\psi_i^{(0)} G\right]_{r''=a} +$$
$$+ \frac{a^2}{4\pi} \int\limits_{\mathbf{n}_0\mathbf{n}''>0} d\Omega_{\mathbf{n}''} \times \tag{14}$$
$$\times \left[\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial r''} + \frac{\partial\psi_{sf}^{(1)}}{\partial r''}\right) G - (\psi_i + \psi_{sf}^{(1)})\frac{\partial G}{\partial r''}\right]_{r''=a} =$$
$$= \psi_{sp}^- + \psi_{sp}^+.$$

Поскольку вид падающей звуковой волны $\psi_i^{(0)}$ известен, то, вычисляя интегралы в нулевом порядке по числу Маха M, можно найти поле $\psi_{sp}^{(0)}$,

рассеянное на поверхности неподвижной сферы. Далее, используя найденное решение $\psi_{sp}^{(0)}$, по формуле (11) может быть вычислено поле $\psi_{sf}^{(1)}$, рассеянное на неоднородностях течения. Подставляя известные теперь значения полей $\psi_i^{(0)}$, $\psi_i^{(1)}$ и $\psi_{sf}^{(1)}$ в формулу (14), можно найти поле ψ_{sp}, рассеянное на движущейся поверхности шара с учетом линейных поправок по числу M.

При вычислении амплитуды рассеяния звука волнового поля ψ_{sp} в нулевом приближении по числу Маха воспользуемся приближенным выражением для функции Грина в зоне Фраунгофера: $G(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|) = (1/r')\exp(ikr' - ik\mathbf{n}'\mathbf{r}')$, где единичный вектор $\mathbf{n}' = \mathbf{r}'/r'$ направлен из центра сферы в точку наблюдения. Первый интеграл в формуле (14) вычисляется приближенно методом наибыстрейшего спуска и при больших значениях параметра ka равен [7]

$$\psi_{sp}^{(0)-} = \frac{a\psi_0}{2r'}e^{ikr' - iqa}, \tag{15}$$

где $\mathbf{q} = k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}')$ – переданный среде "импульс", абсолютная величина которого равна $q = 2k\sin(\theta/2)$, а угол рассеяния θ заключен между единичными векторами $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{n}'$. $\psi_{sp}^{(0)-}$ описывает отраженную от поверхности неподвижной сферы волну, амплитуда которой оказывается не зависящей от угла рассеяния, а само выражение (15) справедливо лишь при конечных углах θ. При скользящих углах рассеяния, когда угол θ мал, безразмерный параметр qa становится также малым, и метод расчета ψ_{sp}^-, а с ним и результатирующая формула (15) становятся при $\theta \to 0$ неприменимыми. Простой учет движения поверхности сферы при отсутствии сопутствующего течения жидкости может быть произведен в рамках обычного волнового уравнения. Положив в формуле (14) значение скорости $\mathbf{U}$ равным нулю, можно найти, что отраженная волна во фраунгоферовой зоне будет равна

$$\psi_{sp}^- = \frac{a\psi_0}{2r'}\left[1 + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}')}{(1 - \mathbf{n}_0\mathbf{n}')}\right]e^{ikr' - iqa}. \tag{16}$$

Вычисление второго интеграла в формуле (14) может быть произведено с помощью преобразования Маджи [7]. В этом случае интегрирование по неозвученной полусфере может быть заменено интегрированием по ее поперечному сечению плоскостью, проходящей через центр шара и перпендикулярной единичному вектору $\mathbf{n}_0$. Расчет тенеобразующей волны ψ_{sp}^+ без влияния сопутствующего течения жидкости, но с учетом движения сферы дает результат, аналогичный известному для рассеяния звука на неподвижной сфере:

$$\psi_{sp}^+ = \frac{a\psi_0}{2ir'}e^{ikr'}\frac{(1 + \cos\theta)}{\sin\theta}J_1(ka\sin\theta), \tag{17}$$

где $J_1(z)$ – функция Бесселя, а движение центра сферы учтено в виде перенормированного волнового числа $k = (1 - \mathbf{M}\mathbf{n}_0)\omega_0/c$.

При нахождении поля $\psi_{sf}^{(1)}$, рассеянного на неоднородностях сопутствующего течения, воспользуемся формулой (11). Вычисление первого интеграла в (11) при произвольной величине безразмерного параметра ka было произведено в работе [4] и для соответствующей амплитуды рассеяния F_{f1} (множителя при расходящейся волне $(\psi_0/r')\exp(ikr')$) дало следующий результат:

$$F_{f1} = \frac{k^2a^3}{3}\left\{\frac{j_1(qa)}{(qa)}[(\mathbf{M}\mathbf{n}_0) - 3(\mathbf{M}\mathbf{n})] + 3\frac{j_2(qa)}{(qa)^2}\times\right.$$
$$\left.\times[(\mathbf{M}\mathbf{n}_0)(1 + \mathbf{n}\mathbf{n}_0) + (\mathbf{M}\mathbf{n})(3 - 5\mathbf{n}\mathbf{n}_0)]\right\}. \tag{18}$$

Из полученных выражений (17) и (18) следует, что рассеяние плоской волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{n}_0$, происходит в основном вперед, как при дифракции звука на поверхности движущегося тела, так и при ее рассеянии на неоднородностях течения. В области углов $\theta < \theta_d$, где $\theta_d \sim 1/ka$, составляющие амплитуды рассеяния: F_p – на поверхности тела и F_{f1} – на течении, максимальны и достигают своих наибольших значений при $\theta = 0$, равных

$$F_p(0) \simeq -\frac{i}{2}ka^2; \quad F_{f1}(0) = -\frac{2}{3}k^2a^3(\mathbf{M}\mathbf{n}_0). \tag{19}$$

При большой величине безразмерного параметра ka парциальная амплитуда рассеяния на теле $F_p(0)$ превышает радиус сферы в ka раз, а парциальная амплитуда F_{f1}, связанная с рассеянием плоской волны на течении, превосходит радиус сферы в Mk^2a^2 раз. Отношение парциальных амплитуд (19) по порядку величины равно $F_{f1}(0)/F_p(0) \sim Mka$, что в ka раз превышает число Маха. При возрастании угла рассеяния значения амплитуд (17) и (18) быстро падают и при $\theta \sim 1$ их значения составляют от соответствующих величин в нуле всего лишь $1/ka$. Аппроксимируя точные выражения (17) и (18) для амплитуд рассеяния в области углов $0 \le \theta < \theta_d$ их значениями в нуле и полагая эти выражения равными нулю в остальной области углов $\theta_d \le \theta \le \pi$, нетрудно найти, что полные сечения рассеяния в этом случае

равны: $\sigma = \int d\Omega |F|^2 = \pi\theta_d^2 |F(0)|^2$. Подставляя сюда конкретные значения (19) для амплитуд $F(0)$ и полагая, что $\theta_d \sim 1/ka$, находим, что по порядку величины соответствующие сечения равны:

$$\sigma_p \sim a^2; \quad \sigma_{f1} \sim k^2 a^4 (\mathbf{Mn}_0)^2. \tag{20}$$

Из формулы (20) видно, что парциальное сечение рассеяния звука на течении оказывается, так же как и в случае рассеяния низкочастотного звука, квадратичным по числу Маха. Однако теперь, при условии $ka \gg 1$, выражение (20) для σ_{f1} значительно превосходит соответствующее сечение рассеяния на мелкомасштабных неоднородностях течения, возникающего в окрестности сферы малого радиуса. В работе [1] было найдено сечение рассеяния на течении σ_{f1} при условии $ka \ll 1$, которое по порядку величины равнялось $\sigma_f \sim k^4 a^6 M^2$. При этом было показано, что для сферы малого радиуса добавка к амплитуде рассеяния на теле, вызванная его движением, но без учета рассеяния на сопутствующем течении, равнялась по порядку величины амплитуде рассеяния на течении и была пропорциональна числу Маха. При условии $ka \gg 1$ аналогичная добавка к амплитуде F_p, как это следует из формул (16) и (17), также пропорциональна числу M, но роль течений, как это видно из формул (18) и (19), возрастает в $(ka)^2$ раз. Заметим, что, так же как и при $ka \ll 1$, полное сечение рассеяния, рассчитанное с помощью амплитуд F_p и F_{f1}, оказывается неаддитивным относительно сечений (20). При этом полное сечение σ, равное $\sigma = 2\pi a^2[1 + C(ka)(\mathbf{Mn}_0)]$, содержит поправку, связанную с движением, пропорциональную уже $(ka)(\mathbf{Mn}_0)$, а не $\mathbf{Mn}_0$, как для сферы малого радиуса.

Однако теперь необходимо напомнить, что при распространении звука в окрестности сферы возникает отраженная от ее поверхности волна ψ_{sp}. Если при $ka \ll 1$ рассеянием на течении отраженной волны можно было пренебречь, то при $ka \gg 1$ необходимо учитывать рассеяние на течении как падающей волны ψ_i, так и отраженной волны $\psi_{sp}^{(0)}$. Формально это учитывается наличием двух слагаемых в общем выражении (11), которое справедливо при любом соотношении между длиной волны звука и радиусом сферы.

Не производя строгих вычислений второго интеграла в выражении (11), описывающего рассеяние на течении отраженной волны $\psi_{sp}^{(0)}$, можно сделать тем не менее ряд утверждений общего характера относительно рассеянной волны ψ_{f2}. Так, рассеяние на течении изотропной части $\psi_{sp}^{(0)-}$ отраженной волны $\psi_{sp}^{(0)}$ будет происходить также в основном "вперед", т.е. теперь по направлению радиус-вектора $\mathbf{r}'$. И хотя амплитуда новой "падающей" волны уменьшается с удалением от центра как a/r', но в пределах области существенного рассеяния ($a \le r'' \lesssim 2a$) она будет по-прежнему сравнима с $\psi_i^{(0)}$. Поэтому отраженная волна $\psi_{sp}^{(0)-}$ после рассеяния на неоднородностях течения, оставаясь сферической и практически изотропной, приобретает еще дополнительный множитель Mk^2a^2, согласно предыдущим выкладкам. Однако из-за сферической расходимости "падающей" волны $\psi_{sp}^{(0)-}$ числовой множитель при Mk^2a^2 будет теперь меньше, чем в выражениях (18) и (19). Рассеянная же на течении теневая волна $\psi_{sp}^{(0)+}$ остается по-прежнему однонаправленной вдоль $\theta = 0$, но ее амплитуда приобретает во фраунгоферовой зоне рассеивателя помимо своего прежнего значения ka^2 еще и дополнительный множитель – все тот же безразмерный параметр Mk^2a^2. Таким образом в дальней зоне рассеивателя однонаправленность излучения в целом сохраняется, а полная амплитуда рассеяния на нулевой угол будет теперь по порядку величины равна

$$F(0) \simeq ka^2 [1 + Ck^2a^2 (\mathbf{Mn}_0)], \tag{21}$$

где C – числовая константа, не зависящая в нулевых приближениях по M и ka от этих параметров. Полное сечение рассеяния на движущейся сфере, соответствующее амплитуде (21) (которое одно только и имеет реальный физический смысл), будет равно

$$\sigma = 2\pi a^2 [1 + Ck^2a^2 (\mathbf{Mn}_0)]^2. \tag{22}$$

Отсюда следует, в частности, что поправка к нулевому по M значению σ_0, вызванная движением тела, будет в $(ka)^2$ раз превышать аналогичную поправку для сферы малого радиуса. Отметим также, что учет волны $\psi_{sp}^{(1)}$, связанной с перерассеянием падающей волны $\psi_i^{(0)}$ вначале на течении, а затем на поверхности тела, не вносит существенных изменений в порядок полученных оценок для полной амплитуды рассеяния (21) и полного сечения (22).

В заключение рассмотрим вопрос о пределах применимости полученных выше результатов. Во-первых, при постановке задачи, т.е. при записи управляющего уравнения (6) вместе с граничными условиями (7) и (8), была использована малость числа Маха, что соответствовало требованию $M \ll 1$. Во-вторых, при решении интегрального уравнения (12) для рассеянного поля ψ_{sp} было использовано условие $ka \gg 1$. В-третьих, при формулировке уравнения (10) для рассеянного поля ψ_{sf} использовалось условие малости его амплитуды по сравнению с амплитудами полей $\psi_i^{(0)}$ и $\psi_{sp}^{(0)}$. Найденное в работе решение уравнения (10) имело на поверхности сферы порядок ма-

лости Mk^2a^2. Поэтому для справедливости уравнения (10) и полученного его решения на произведение малого числа M и большого параметра ka необходимо, строго говоря, наложить дополнительное условие: $Mk^2a^2 \ll 1$.

Однако учитывая отброшенный ранее в правой части уравнения (10) член с производной $\partial\psi_{sf}^{(1)}/\partial x$ и перенося его в левую часть уравнения, можно произвести перенормировку волнового числа k. В этом случае уравнение для $\psi_{sf}^{(1)}$ записывается в форме, аналогичной (10), но в его левой части вместо k^2 стоит квадрат перенормированного эффективного волнового числа. Новое волновое число $k_{эф}$ отличается от прежнего числа k на малую величину, которая пропорциональна M, но является теперь медленно меняющейся функцией пространственных переменных. Используя соответствующую функцию Грина с $k_{эф} \simeq k$, можно записать решение уравнения (10) в форме, аналогичной (11). Тогда оценка амплитуды рассеянного поля $\psi_{sf}^{(1)}$ будет иметь, в основном, прежний вид, но ограничения по величине на параметр Mk^2a^2 теперь не возникает. Поэтому полученные выше оценки и, в частности, формула (21) могут применяться при значении параметра Mk^2a^2, достигающем единицы и, возможно, даже при большем его значении. Однако последнее утверждение требует дополнительного исследования.

Подытоживая теперь главный результат настоящей работы, необходимо еще раз подчеркнуть, что при рассмотрении задачи дифракции звука на движущемся в жидкости теле учет сопутствующего течения среды крайне важен. Поправки к полю, связанные с рассеянием звука на сопутствующем течении жидкости и найденные в рамках уравнения Лайтхилла, значительно превосходят аналогичные поправки, связанные только с движением поверхности тела и найденные исключительно в рамках однородного волнового уравнения (уравнения Гельмгольца). Более того, возможно, что эти поправки могут быть сравнимыми с самим полем, рассеянным неподвижным телом, и даже превышать его. С учетом рассмотренного ранее в работе [2] явления фокусировки поля возникает, как нам кажется, настоятельная необходимость пересмотра целого ряда задач по дифракции волн произвольной природы на движущихся телах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.Н., Семенов А.Г.* Рассеяние звука движущейся сферой // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 5. С. 789 - 797.
2. *Алексеев В.Н., Римский-Корсаков А.В., Семенов А.Г.* Особенности распространения звука в окрестности движущегося тела // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 4. С. 581 - 587.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
4. *Alexeyev V.N., Semenov A.G., Skvortsov A.T.* On sound scattered by potential flow near moving sphere. European conference on Underwater Acoustics. Ed. by Weydert. London; N. Y., 1992. P. 439 - 442.
5. *Алексеев В.Н., Семенов А.Г.* Влияние вязкости на рассеяние звука движущимся телом //Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 2.
6. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.
7. *Морз Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

Diffraction of Sound on a Moving, Large-Radius Sphere

V. N. Alekseev and A. G. Semenov

This papers deals with a theoretical investigation of sound scattering from a large-radius sphere moving in a liquid. The system of equations and boundary conditions are formulated in the linear approximation for the hydrodynamical Mach number. The problem is solved by quadratures, and estimations are made. The significance of flow is also shown. Taking the flow into account turns out to be more important than making corrections connected with only the motion of the sphere's surface found from the Helmholz equation