АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 4, с. 609 - 612

УДК 534.24

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОТОКЕ АКТИВНОЙ СРЕДЫ

© 1994 г.   Е. Я. Коган, Н. Е. Молевич
Самарский государственный педагогический институт им. В.В. Куйбышева
443099 Самара, ул. Горького, 65/67

Поступила в редакцию 02.12.93 г.

Рассматривается влияние рассеянного звука на поле пульсаций потока в среде с отрицательной вязкостью $\xi < 0$. Показано, что при $\xi < 0$ происходит нарастание возмущений "несжимаемых" дозвуковых потоков механизмом перекачки энергии от неустойчивых акустических мод.

Известно, что звук эффективно рассеивается на неоднородностях, обусловленных пульсациями скоростей и температуры среды распространения [1]. Известно также, что в термодинамически неравновесных средах возможно обращение коэффициента второй вязкости [2, 3].

Отрицательная вторая вязкость ξ влияет на устойчивость звуковых и сверхзвуковых потоков. В настоящей работе показано, что в среде с $\xi < 0$ наряду с этим возможно нарастание флуктуаций "несжимаемых" дозвуковых потоков механизмом перекачки энергии от неустойчивых акустических мод.

Рассмотрим, как влияет рассеянный звук на поле пульсаций потока в среде с отрицательной вязкостью. Для определенности ограничимся случаем газа с неравновесно возбужденными колебательными состояниями молекул, релаксация которых описывается простым уравнением

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{E_K^e - E_K}{\tau} + Q, \tag{1}$$

где E_K, E_K^e – колебательная энергия и ее равновесное значение в расчете на одну молекулу, Q – мощность источника накачки, необходимая для поддержания условий $E_K > E_K^e$, τ – время колебательной релаксации, ρ – плотность газа.

В этом случае наличие медленных процессов установления равновесия ($\tau/\bar{T} < 1$, $\bar{T}$ – характерный период возмущения) макроскопически эквивалентно наличию второй вязкости с коэффициентом

$$\xi = \frac{(u_\infty^2 - u^2)\,\tau\rho C_{V\infty}}{C_V}, \tag{2}$$

а система релаксационной газодинамики имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nabla\xi\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \eta\Delta\mathbf{v}, \tag{3}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\mathrm{div}\,\rho\mathbf{v}, \tag{4}$$

$$C_V\frac{dP}{dt} - C_P\frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \kappa\rho\Delta\frac{P}{\rho}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} E_K = E_K^e + Q\tau_0 + C_K T' + S\hat{\tau}_0 T' + S\check{\tau}_0 T_0\rho'/\rho_0 + \\ + \frac{S\hat{\hat{\tau}}_0 T'^2}{2} + S\check{\hat{\tau}}_0 T'\rho' + S\check{\check{\tau}}_0\rho'^2 + O(\rho'^3, T'^3), \end{gathered} \tag{6}$$

где $\mathbf{v}$, P – газодинамические скорость и давление в среде; κ, η – коэффициенты теплопроводности и сдвиговой вязкости; $C_V = C_{V\infty} + (\partial E_K/\partial T)_V$, $C_P = C_{P\infty} + (\partial E_K/\partial T)_P$ – низкочастотные теплоемкости при постоянных объеме и давлении; $C_{P\infty}$, $C_{V\infty}$ – высокочастотные теплоемкости; $u = (C_P P/C_V\rho)^{1/2}$, $u_\infty = (C_{P\infty}P/C_{V\infty}\rho)^{1/2}$ – скорости низкочастотного и высокочастотного звуков; $S = Q\tau_0/T_0$ – стационарная степень колебательной неравновесности; $\tau_0 = \tau(T_0, \rho_0)$;

$$\hat{\tau} = \frac{T_0}{\tau_0}\frac{\partial\tau_0}{\partial T_0}, \quad \check{\tau} = \frac{\rho_0}{\tau_0}\frac{\partial\tau_0}{\partial\rho_0}, \quad \hat{\hat{\tau}} = \frac{T_0^2}{\tau_0}\frac{\partial^2\tau_0}{\partial T_0^2},$$

$$\check{\hat{\tau}} = \frac{\rho_0 T_0}{\tau_0}\frac{\partial^2\tau_0}{\partial T_0\partial\rho_0}, \quad \check{\check{\tau}} = \frac{\rho_0^2}{\tau_0}\frac{\partial^2\tau_0}{\partial\rho_0^2}.$$

Для бинарных столкновений $\tau \sim 1/\rho$,

$$\check{\tau}_0 = -1, \quad \check{\hat{\tau}}_0 = -\hat{\tau}_0, \quad \check{\check{\tau}}_0 = 2,$$

$$C_V = C_{V\infty} + S\hat{\tau}_0 + \frac{S\hat{\hat{\tau}}_0}{T_0}T' - \frac{S\hat{\tau}_0}{\rho_0}\rho' + O(T'^2, \rho'^2);$$

$$C_P = 1 + C_V + \left(\frac{\partial E_K}{\partial\rho}\right)_T\frac{\rho}{T},$$

где T_0, ρ_0, T', ρ' – стационарные значения температуры и плотности и их возмущения.

Представим возмущения параметров среды в виде

$$P' = P^{(0)} + P^{(s)} + P^{(1)},$$
$$\rho' = \rho^{(0)} + \rho^{(s)} + \rho^{(1)}, \qquad (7)$$
$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(s)} + \mathbf{v}^{(1)},$$

где индексами 0, s, 1 обозначены флуктуации в падающей звуковой волне, в рассеянной звуковой волне и в потоке соответственно.

Будем считать, что пульсации скорости дозвукового потока $\mathbf{v}^{(1)}$ и давления $P^{(1)}$ зависят от времени посредством множителя $\exp(-i\Omega t)$, причем

$$\Omega = \omega_0 - \omega_s \ll \omega_0, \omega_s. \qquad (8)$$

Здесь $\omega_0, \omega_s < \tau_0^{-1}$ – частоты падающего и рассеянного звука. Предположение (8) вместе с условием $W/u \ll 1$, где W – невозмущенная скорость потока, позволяет считать основное течение несжимаемым: $\rho^{(1)} = 0$.

Задачу рассеяния будем решать в приближении заданного поля падающей звуковой волны $P^{(0)} \gg P^{(1)}, P^{(s)}$ и в приближении медленно меняющихся амплитуд рассеянной акустической волны $P^{(s)}(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{k}_s\mathbf{r} - i\omega_s t)$ и флуктуаций потока $\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r})\exp(-i\Omega t)$, $P^{(1)}(\mathbf{r})\exp(-i\Omega t)$, причем

$$\left|\frac{\nabla P^{(1),(s)}}{P}\right|, \quad \frac{1}{v}\left|\frac{\partial \mathbf{v}^{(1),(s)}}{\partial \mathbf{r}}\right| \ll k_0, k_s, \qquad (9)$$

где $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{k}_s$ – волновые векторы падающего и рассеянного звуков. Таким образом, масштабы неоднородности потока значительно больше акустических длин волн.

Подставим (7) в систему уравнений (3) - (6) и пренебрежем слагаемыми второго порядка малости по амплитудам возмущений. После этого получим последовательно три уравнения, описывающих эволюцию возмущений $P^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$ и $P^{(s)}$ в поле мощной волны накачки $P^{(0)}$.

Из уравнения (5) следует, что эволюция возмущений $P^{(1)}$ в несжимаемом потоке описывается уравнением

$$W\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} - i\Omega P^{(1)} - \kappa\Delta P^{(1)} =$$
$$= -\frac{2i\Omega(\psi_0 - 1)}{\gamma_0 P_0} P^{(0)} P^{(s)^*} e^{i\mathbf{qr}}, \qquad (10)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s$; ось x выбрана в направлении потока;

$$\gamma_0 = C_{P0}/C_{V0}; \quad C_{P0} = C_{P\infty} + C_K + S(\hat{\tau}_0 + 1),$$
$$C_{V0} = C_{V\infty} + C_K + S\hat{\tau}_0$$

– не зависящие от амплитуды возмущений части теплоемкостей C_P, C_V;

$$\psi_0 = \frac{1}{C_{V0}}\left[\frac{S\hat{\tau}_0(1+S)}{C_{P0}} + \frac{1+2C_{V0}}{2} - \frac{S(1+S)^2}{2C_{P0}C_{V0}}\hat{\hat{\tau}}_0\right].$$

Этот коэффициент совпадает с коэффициентом нелинейности в уравнении Бюргерса [2, 4].

Взяв градиент от обеих частей уравнения (10), получим после подстановки в (3) и преобразований

$$W\frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}}{\partial x} - \frac{i\Omega}{2}\mathbf{v}^{(1)} - \frac{\eta}{2}\Delta\mathbf{v}^{(1)} =$$
$$= \frac{i\mathbf{q}}{2\gamma_0}\left(3 - 2\psi_0 - \frac{\mathbf{k}_0\mathbf{k}_s}{k_0 k_s}\right)e^{i\mathbf{qr}}\frac{P^{(0)}P^{(s)^*}}{P_0\rho_0}. \qquad (11)$$

Изменение рассеянного акустического поля можно найти после выполнения следующих процедур.

Подставим (4) в (5) и выразим $\operatorname{div}\mathbf{v}^{(s)}$. Затем, применив оператор div к обеим частям (3) и подставив соотношение для $\operatorname{div}\mathbf{v}^{(s)}$, получим после преобразований с учетом (8), (9)

$$u_0\left(\frac{\mathbf{k}_s\nabla}{k_s}\right)P^{(s)^*} + W\frac{\partial P^{(s)^*}}{\partial x} + \alpha_0 u_0 P^{(s)^*} =$$
$$= i(\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{k}_0)P^{(0)^*}e^{-i\mathbf{qr}} + \qquad (12)$$
$$+ e^{-i\mathbf{qr}}\frac{i\omega_0}{2P_0}\left[1 - \frac{S\hat{\hat{\tau}}_0(C_{P0} - C_{V0})}{C_{P0}C_{V0}} + \frac{S(\hat{\tau}_0 - 1)}{C_{P0}}\right],$$

где $u_0 = (C_{P0}T_0/C_{V0}m)^{1/2}$ – низкочастотная скорость линейного звука;

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\rho_0}\left[\xi_0 + \frac{4}{3}\eta + \kappa\left(\frac{1}{C_{V0}} - \frac{1}{C_{P0}}\right)\right]\frac{k_s^2}{u_0} \qquad (13)$$

– коэффициент поглощения;

$$\xi_0 = \frac{(u_\infty^2 - u_0^2)\,\tau_0 C_{V\infty}\rho_0}{C_{V0}} \qquad (14)$$

– коэффициент второй вязкости для линейного низкочастотного звука.

Из (14) можно получить известное условие обращения объемной вязкости $\xi_0 < 0$ [2, 3]:

$$S > \frac{C_K}{C_{V\infty} - \hat{\tau}_0}, \quad C_{V\infty} - \hat{\tau}_0 > 0.$$

Система уравнений (10), (11), (12) описывает стационарное рассеяние звука на пульсациях потока.

Рассмотрим простейшую геометрию рассеяния – рассеяние вперед вдоль направления потока. Система (10), (11), (12) в этом случае становится одномерной и имеет вид

$$\frac{\partial P^{(s)^*}}{\partial x} + \alpha_0 P^{(s)^*} = A_1 e^{-i\frac{\Omega}{u_0}x} P^{(1)} + A_2 e^{-i\frac{\Omega}{u_0}x} v^{(1)}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} - i\frac{\Omega}{W}P^{(1)} - \frac{\kappa}{W}\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} = A_3 e^{i\frac{\Omega}{u_0}x} P^{(s)^*}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} - \frac{i\Omega}{2W}v^{(1)} - \frac{\eta}{2W}\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} = A_4 e^{i\frac{\Omega}{u_0}x} P^{(s)^*}, \quad (17)$$

где

$$A_1 = \frac{i\omega_0 P^{(0)^*}}{2\left(1+\frac{W}{u_0}\right)u_0 P_0} \times$$

$$\times\left[1 - S\hat{\hat{\tau}}_0\frac{C_{P0}-C_{V0}}{C_{P0}C_{V0}} + \frac{S}{C_{P0}}(\hat{\tau}_0 - 1)\right],$$

$$A_2 = \frac{ik_0 P^{(0)^*}}{u_0}, \quad A_3 = \frac{-2i\Omega(\psi_0 - 1)}{\gamma_0 W P_0}P^{(0)},$$

$$A_4 = -\frac{i\Omega(\psi_0 - 1)P^{(0)}}{\gamma_0 W P_0 \rho_0 u_0}.$$

После преобразования Лапласа системы (15) - (17) с граничными условиями $P^{(s)^*}(0) = P_s$, $P^{(1)}(0) = P_1$, $v^{(1)}(0) = v_1$, $\frac{dv^{(1)}(0)}{dx} = \frac{dP^{(1)}(0)}{dx} = 0$ найдем следующие связи:

$$\mathcal{F}(p) = \frac{P_1\left(1-\frac{\kappa}{W}p\right)}{p-\frac{i\Omega}{W}-\frac{\kappa}{W}p^2} + \frac{A_3\mathcal{P}\left(p-\frac{i\Omega}{u_0}\right)}{p-\frac{i\Omega}{W}-\frac{\kappa}{W}p^2}, \quad (18)$$

$$\mathcal{W}(p) = \frac{v_1\left(1-\frac{\eta}{2W}p\right)}{p-\frac{i\Omega}{2W}-\frac{\eta}{2W}p^2} + \frac{A_4\mathcal{P}\left(p-\frac{i\Omega}{u_0}\right)}{p-\frac{i\Omega}{2W}-\frac{\eta}{2W}p^2}, \quad (19)$$

$$\mathcal{P}(p) = \frac{P_s}{p+\alpha_0} +$$

$$+\frac{A_1\mathcal{F}\left(p+\frac{i\Omega}{u_0}\right)}{p+\alpha_0} + \frac{A_2\mathcal{W}\left(p+\frac{i\Omega}{u_0}\right)}{p+\alpha_0}, \quad (20)$$

где $\mathcal{F}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{P}$ – изображения по Лапласу $P^{(1)}$, $v^{(1)}$ и $P^{(s)^*}$ соответственно.

Из (13) - (15) следует

$$\mathcal{P}(p) = \frac{P_s f_1(p) + v_1 f_2(p) + P_1 f_3(p)}{D(p)}, \quad (21)$$

где многочлены

$$f_1 = \left(p - \frac{i\Omega}{W} - \frac{\kappa p^2}{W}\right)\left(p - \frac{i\Omega}{2W} - \frac{\eta}{2W}p^2\right),$$

$$f_2 = A_2\left(p - \frac{i\Omega}{W} - \frac{\kappa p^2}{W}\right)\left(1 - \frac{\eta}{2W}p\right),$$

$$f_3 = A_1\left(p - \frac{i\Omega}{2W} - \frac{\eta}{2W}p^2\right)\left(1 - \frac{\kappa}{W}p\right), \quad (22)$$

$$D = (p+\alpha_0)\left(p - \frac{i\Omega}{2W} - \frac{\eta}{2W}p^2\right)\left(p - \frac{i\Omega}{W} - \frac{\kappa}{W}p^2\right) -$$

$$-A_1A_3\left(p - \frac{i\Omega}{2W} - \frac{\eta}{2W}p^2\right) - A_2A_4\left(p - \frac{i\Omega}{W} - \frac{\kappa p^2}{W}\right).$$

Обратное преобразование Лапласа значительно облегчается в условиях малой диссипации энергии флуктуаций потока за время Ω^{-1} и большого коэффициента затухания звука по сравнению с коэффициентами нелинейного взаимодействия, т.е. $A_2A_4, A_1A_3 \ll \alpha_0$.

В этом случае методом итераций получим

$$D \approx (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3), \quad (23)$$

где

$$p_1 = -\alpha_0 - \frac{A_2A_4}{\alpha_0 + \frac{i\Omega}{2W}} - \frac{A_1A_3}{\alpha_0 + \frac{i\Omega}{W}}, \quad (24)$$

$$p_2 = \frac{i\Omega}{2W} + \frac{A_2A_4}{\alpha_0 + \frac{i\Omega}{2W}} - \frac{\eta\Omega^2}{8W^3}, \quad (25)$$

$$p_3 = \frac{i\Omega}{W} + \frac{A_1A_3}{\alpha_0 + \frac{i\Omega}{W}} - \frac{\kappa\Omega^2}{W^3}. \quad (26)$$

С учетом (23) обратное преобразование (21) приводит к сумме трех экспонент: $\exp(p_1x)$, $\exp(p_2x)$, $\exp(p_3x)$. Если хотя бы один из корней (23) имеет положительную реальную часть, то будет наблюдаться параметрическая неустойчивость $P^{(s)}$, а, согласно (18), (19), с тем же инкрементом будут нарастать флуктуации потока. Подчеркнем, что с учетом приближения медленно меняющихся амплитуд (9) выражения (24) - (26) справедливы при $W/u_0 \gg \Omega/\omega_0$.

Ниже рассматриваются два случая положительного и отрицательного коэффициента второй вязкости.

1. $\xi > 0$, тогда $\alpha_0 > 0$ и $\mathrm{Re}\,p_1 < 0$. Два других решения будут иметь положительную реальную часть при

$$\frac{A_2 A_4 \alpha_0}{\alpha_0^2 + \dfrac{\Omega^2}{4W^2}} > \frac{\eta\Omega^2}{8W^3} \quad (\mathrm{Re}\,p_2 > 0) \qquad (27)$$

или

$$\frac{A_1 A_3 \alpha_0}{\alpha_0^2 + \dfrac{\Omega^2}{4W^2}} > \frac{\kappa\Omega^2}{W^3} \quad (\mathrm{Re}\,p_3 > 0). \qquad (28)$$

Так как $A_2A_4 \sim A_1A_3 \sim |P_0|^2$, то условия (22), (23) являются пороговыми условиями наблюдения вынужденного рассеяния.

2. $\xi < 0$. В этом случае при $|\xi| > \frac{4}{3}\eta + \left(\frac{1}{C_{V0}} - \frac{1}{C_{P0}}\right)\kappa$ в неравновесных средах будет наблюдаться акустическая неустойчивость ($\alpha_0 < 0$).

При $\alpha_0 < 0$ инкремент вынужденного рассеяния $p_1 < 0$ при любых интенсивностях заданного акустического поля, т.е. порог отсутствует. Причем из (24) следует, что максимум инкремента будет наблюдаться при $\Omega \sim \alpha_0 W$.

Таким образом, в неравновесных средах акустическая неустойчивость может сопровождаться неустойчивостью газодинамических потоков.

Выше рассматривалось рассеяние низкочастотного звука. Аналогично можно рассмотреть случай $\omega_s, \omega_0 > \tau_0^{-1}$.

В этом случае коэффициент поглощения звука

$$\alpha_\infty = \frac{\xi_0 C_{V0}^2}{2u_\infty^3 C_{V\infty}^2 \tau_0^2 \rho_0} + \frac{k_s^2}{2\rho_0 u_\infty}\left[\frac{4}{3}\eta + \kappa\left(\frac{1}{C_{V\infty}} - \frac{1}{C_{P\infty}}\right)\right],$$

коэффициент нелинейности

$$\psi_\infty = \frac{\gamma_\infty + 1}{2},$$

где $\gamma_\infty = C_{P\infty}/C_{V\infty}$, скорость звука $u_\infty = (\gamma_\infty T_0/m)^{1/2}$ [3].

Система, описывающая рассеяние высокочастотного звука, сохранит вид (15) - (17), но с соответствующей заменой в коэффициентах A_1, A_2, A_3, A_4 величин $\alpha_0, \gamma_0, u_0, \psi_0$ на $\alpha_\infty, \gamma_\infty, u_\infty, \psi_\infty$ и при отсутствии последних двух слагаемых в коэффициенте A_1. Тогда все выводы данной работы можно распространить и на высокочастотный предел. Единственное замечание, что при $\xi_0 < 0$ коэффициент $\alpha_\infty < 0$ только для частот

$$\omega_s < \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}\tau_0}\sqrt{\frac{\xi_0}{\frac{4}{3}\eta + \kappa\left(\dfrac{1}{C_{V\infty}} - \dfrac{1}{C_{P\infty}}\right)}}.$$

Именно для этих частот возможно беспороговое рассеяние, о котором шла речь выше.

В акустически неустойчивой среде падающая волна $P^{(0)}$ также будет усиливаться, что не учтено в приближении заданного поля. Однако в данном случае это может привести лишь к увеличению инкремента рассеянной волны.

Заметим, что, согласно (11), рассмотренный механизм приводит к нарастанию только потенциальных возмущений, так как rot от правой части (11) равен нулю. Ситуация может измениться, если учесть неоднородность среды и потоков, что представляет собой отдельную задачу, заслуживающую, на наш взгляд, внимания.

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. С. 182.
2. *Коган Е.Я., Молевич Н.Е.* Коллапс акустических волн в неравновесном молекулярном газе // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 5. С. 941 - 943.
3. *Молевич Н.Е., Ораевский А.Н.* Волны в среде с отрицательной второй вязкостью. Тр. ФИАН. Т. 222. М.: Наука, 1993. С. 45 - 95.
4. *Коган Е.Я., Молевич Н.Е.* Ударные волны разрежения в неравновесно колебательно-возбужденном газе // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 5. С. 951 - 954.

Parametric Excitation of Low-Frequency Oscillations in a Stream of an Active Medium

E. Ya. Kogan and N. E. Molevich

The influence of scattered sound on a field of stream fluctuations in a medium with negative viscosity is considered. It is shown that perturbations of "incompressible" subsonic streams grow because of energy transfer from unstable acoustic modes.