АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 4, с. 640 - 646

УДК 550.34

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА В НЕОДНОРОДНОЙ РЕЛАКСАЦИОННОЙ СРЕДЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ВДОЛЬ ТРАССЫ

© 1994 г. Г. А. Максимов

Московский инженерно-физический институт
115409 Москва, Каширское ш., 31

Поступила в редакцию 30.12.93 г.

Рассматривается распространение короткого акустического импульса в релаксационной температурно неоднородной среде. Предполагается, что время релаксации экспоненциально зависит от обратной температуры, а последняя логарифмически меняется вдоль трассы распространения. Получено аналитическое решение рассматриваемой задачи. На основе анализа этого решения показано, что даже в рамках ВКБ-приближения могут существовать режимы распространения импульса, которые отличаются от закономерностей, установленных в работе [14]. Эти различия связаны с существованием условий, при которых описание распространения импульсов выходит за границу области применимости результатов работы [14].

Одним из основных методов акустической спектроскопии сред является использование температурно-частотной аналогии, когда вместо определения зависимостей коэффициента поглощения и дисперсии фазовой скорости в широком интервале частот исследуется температурная зависимость этих же величин на фиксированной частоте. Для целей импульсной акустодиагностики температурная зависимость коэффициента поглощения и фазовой скорости не использовалась, поскольку основные усилия исследователей были направлены на изучение закономерностей распространения импульсов в однородных наследственно упругих средах [1 - 11]. При попытках же учесть неоднородность среды [12, 13] предполагалось, что температурная неоднородность трассы распространения может быть эффективно пересчитана в неоднородность распределения плотности и скорости звука в среде. На самом деле это утверждение справедливо только для идеально упругих сред. Наличие у среды неидеальных свойств, обусловленных возможностью протекания релаксационных процессов в поле акустической волны, приводит к зависимости спектра времен релаксации от пространственного распределения температурного поля.

В работе [14] было обращено внимание на то, что импульсными акустическими методами возможна эффективная диагностика температурно неоднородных сред. В этой работе был развит общий подход, позволяющий описывать распространение коротких импульсов в неоднородных (в том числе и температурно-неоднородных) средах, в случае применимости ВКБ-приближения, и были отмечены некоторые общие закономерности распространения импульсов в неоднородных релаксационных средах. Между тем, как показывают результаты работы [15], в которой были получены и исследованы два точных решения для импульса, распространяющегося по неоднородной максвелловской среде, могут существовать такие режимы распространения импульса, которые отличаются от общих закономерностей, описанных в [14].

В этой связи представляет интерес более подробно исследовать распространение импульса в температурно неоднородной среде на примере точно решаемых задач.

В настоящей работе детально исследуется частный случай, допускающий аналитическое описание, когда импульс распространяется по релаксационной среде с Е-памятью [2, 3] при логарифмическом законе изменения обратной температуры вдоль трассы.

Влияние диссипативно-дисперсионных свойств среды на распространение акустических импульсов может быть исследовано в рамках линейной наследственной теории упругости [16, 17]. Свойства среды в таком подходе определяются видом релаксационных ядер в локальном уравнении состояния наследственного типа, связывающего тензор напряжений с тензором деформаций

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int dt' \times$$
$$\times \left[M(\mathbf{r}, t-t')\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t') + \delta_{ij}L(\mathbf{r}, t-t')\varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t')\right].$$

Согласно термодинамическим представлениям о природе релаксационных процессов, протекающих в среде [17], релаксационные модули $M(\mathbf{r}, t)$ и $L(\mathbf{r}, t)$ в общем случае могут быть описаны в тер-

минах локального спектра времен релаксации (СВР) $g(\mathbf{r}, \tau) \geq 0$

$$M(\mathbf{r}, t) \sim L(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) C_\infty^2(\mathbf{r}) \kappa(\mathbf{r}, t),$$

$$\kappa(\mathbf{r}, t) = \left[\delta(t) - \frac{\Delta(\mathbf{r})}{\langle \tau(\mathbf{r}) \rangle} \int_a^b g(\mathbf{r}, \tau) e^{-t/\tau} d\tau \right], \tag{1}$$

где $\langle \tau(\mathbf{r}) \rangle = \int_a^b g(\mathbf{r}, \tau) \tau d\tau$ – среднее локальное время релаксации, $\rho(\mathbf{r})$ – плотность среды, $\Delta(\mathbf{r}) = (C_\infty^2(\mathbf{r}) - C_0^2(\mathbf{r}))/C_\infty^2(\mathbf{r})$ – локальная дисперсия фазовой скорости, $C_\infty(\mathbf{r})$ и $C_0(\mathbf{r})$ – максимальная и минимальная локальные фазовые скорости в среде. Первое слагаемое в (1) соответствует упругому отклику среды, второе – неупругому.

Поле давлений в случае одной пространственной координаты подчиняется следующему уравнению волнового типа:

$$\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2} - \int_0^t dt' M(x, t - t') \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x} P(x, t') = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим как будет распространяться импульс давления в полупространстве $x > 0$, если на границе $x = 0$ задано граничное условие

$$P(x, t)|_{x=0} - P_0(t). \tag{3}$$

Такое граничное условие соответствует заданию силы, приложенной к точке $x = 0$.

Переходя к лапласовскому представлению по времени $t \longrightarrow p$ в уравнении (2), перепишем его в виде

$$p^2 P(x, p) - M(x, p) \frac{\partial}{\partial x} \rho^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x} P(x, p) = 0. \tag{4}$$

Отметим, что если, как это сделано в [18], ввести функцию

$$\psi(x, p) = -\rho^{-1/2}(x) P(x, p), \tag{5}$$

то для $\psi(x, p)$ вместо (4) получается уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, p) - K^2(x, p) \psi(x, p) = 0, \tag{6}$$

где квадрат волнового числа $K(x, p)$ определяется выражением

$$K^2(x, p) = \frac{p^2 \rho(x)}{M(x, p)} + \sqrt{\rho(x)} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}. \tag{7}$$

Аналитические выражения для $\psi(x, p)$ известны лишь для небольшого числа законов изменения функции $K(x, p)$, поэтому возникает необходимость в использовании приближенных методов. Так в частности, если длина волны, соответствующая волновому числу $K(x, p = i\omega)$, оказывается малой по сравнению с характерными масштабами изменения параметров среды в рассматриваемой задаче, то может быть использовано приближение геометрической оптики (ВКБ-приближение), применимое при условии [18]

$$\left| K^{-2}(x, p) \frac{\partial}{\partial x} K(x, p) \right| \ll 1. \tag{8}$$

При выполнении условия (8) для функции $\psi(x, p)$ из (6) получается выражение [18]

$$\Psi(x, p) = \frac{P_0(p)}{\rho^{1/2}} \left(\frac{K(x = 0, p)}{K(x, p)} \right)^{1/2} \times \exp\left\{ -\int_0^x dx' K(x', p) \right\}. \tag{9}$$

Здесь нормировочный коэффициент выбран так, чтобы удовлетворять граничному условию при $x = 0$ (3).

Пространственно-временное представление поля давлений на основании соотношения (5) может быть записано в виде

$$P(x, t) = \int_0^t dt' Q(x, t - t') \tilde{I}(t', x), \tag{10}$$

где фундаментальное решение $\tilde{I}(t, x)$ уравнения (6) дается интегралом Меллина

$$\tilde{I}(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp \exp\left\{ pt - \int_0^x dx' K(x', p) \right\}, \tag{11}$$

а эффективная функция источника $Q(x, t)$ записывается в виде

$$Q(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dp e^{pt} P_0(p) \left(\frac{\kappa(x, p)}{\kappa(x = 0, p)} \right)^{1/2}, \tag{12}$$

$$\gamma = (-i\infty, i\infty).$$

В настоящей работе мы будем рассматривать влияние на распространение импульса только пространственной неоднородности поля температур, предполагая, что распределение плотности и скорости звука в пространстве является однородным. Хотя, вообще говоря, такое предположение не является безупречным, поскольку пространственная неоднородность температуры обязатель-

но привела бы в неподвижной среде к пространственной неоднородности распределений плотности и скорости звука, однако, как можно показать, влияние температурной неоднородности будет заметно проявляться уже тогда, когда вызванное ею изменение плотности еще не сказывается на динамике распространения импульса. Кроме того, даже если в статическом состоянии перераспределение плотности и скорости звука вследствие пространственной неоднородности температуры является существенным, данная постановка задачи, когда учитывается только температурная неоднородность среды, может быть применима для описания распространения импульса в нестационарных средах, лишь бы скорость течений, возникающих из-за пространственной неоднородности температуры, была бы много меньше скорости звука, а длина трассы распространения была бы не слишком большой.

Итак, если учитывается только температурная неоднородность трассы распространения импульса, то волновое число, как это следует из (1) и (7), запишется в виде

$$K(x,p) = \frac{p}{C_\infty} \times \left[1 - \frac{\Delta}{\langle\tau(x)\rangle}\int_a^b \frac{g(\tau,x)}{(p+1/\tau)}d\tau\right]^{-1/2}. \quad (13)$$

В случае малой дисперсии фазовой скорости $\Delta \ll 1$ (это условие выполняется практически для всех реально существующих сред, для которых справедливо релаксационное описание), волновое число $K(x,p)$ может быть разложено по этому параметру и записано в виде

$$K(x,p) = \frac{p}{C_\infty} + \frac{\Delta}{2C_\infty\langle\tau(x)\rangle}\int_a^b \frac{g(\tau,x)}{(p+1/\tau)}d\tau. \quad (14)$$

Аналогичные разложения справедливы и для эффективной функции источника. В Приложении к работе [19] показано, что ее отличием от истинного граничного условия в большинстве случаев можно пренебречь.

Рассмотрим распространение импульса в температурно-неоднородной среде, в которой имеется единственный релаксационный механизм. В этом случае СВР имеет вид $g(\tau,x) = \delta(\tau - \tau_1(x))$, где, согласно закону Аррениуса [17], зависимость $\tau_1(x)$ имеет вид

$$\tau_1(x) = \tau_0 \exp\{U_0/T(x)\}, \quad (15)$$

где U_0 – энергия активации, τ_0 – время релаксации при температурах, превышающих энергию активации.

Все остальные параметры, характеризующие среду, будем считать постоянными. Тогда в случае малой дисперсии фазовой скорости $\Delta \ll 1$ для фундаментального решения $\tilde{I}(t,x)$ будем иметь согласно (11) и (14) следующее представление:

$$\tilde{I}(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dp \exp\{pt' - p\int_0^x dx' \frac{\Delta}{2C_\infty\tau_1(x')}\frac{1}{(p+1/\tau_1(x'))}\}, \quad (16)$$

где $t' = t - x/C_\infty$.

Если бы параметры СВР не менялись вдоль трас-сы распространения, то зависимость (16) соответствовала бы модели среды с Е-памятью [2, 3]. Такая модель, как показано Ашенбахом и Чао в работе [7], физически эквивалентна введению небольшой инерционной поправки в уравнение состояния стандартного неупругого тела. Распространение импульса в такой модели рассмотрено в работах [3, 6, 8, 11], так что фундаментальное решение (16) при независящем от координаты СВР хорошо известно и имеет вид:

$$I(t,x) = e^{-\beta} \times \left[\delta(t') + e^{-t'/\tau}\left(\frac{\beta}{t'\tau}\right)^{1/2} I_1(2\sqrt{\beta t'/\tau})\,\vartheta(t')\right], \quad (17)$$

где $t' = t - x/C_\infty$, $\beta = \Delta x/(2C_\infty\tau)$, $I_\nu(z)$ – функция Бесселя мнимого аргумента, $\vartheta(z)$ – единичная функция Хевисайда.

Поскольку нас интересуют закономерности распространения импульса в температурно неоднородных средах, то далее мы рассмотрим случай, когда время релаксации линейно меняется вдоль трассы распространения. Этому соответствует логарифмический закон изменения обратной температуры вдоль трассы

$$U_0/T(x) = \ln(\alpha + x/x_0), \quad (18)$$

где параметр α определяет время релаксации в точке с координатой $x = 0$: $\tau(x=0) = \alpha\tau_0$; параметр x_0 определяет градиент изменения времени релаксации вдоль трассы. Значениям $x_0 > 0$ соответствует уменьшение температуры и рост времени релаксации вдоль трассы, а отрицательным значениям $x_0 < 0$, наоборот, соответствует рост температуры и уменьшение времени релаксации. В последнем случае область расстояний, на которых можно пользоваться соотношением (18), ограничена величиной $x < (\alpha - 1)|x_0|$, при которой температура достигает бесконечности, а время релаксации уменьшается до своего нижнего предела $\tau = \tau_0$.

Подставляя (18) в (15), а затем в (16), для фундаментального решения $\tilde{I}(t, x)$ получим следующее представление:

$$\tilde{I}(t, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} dp e^{pt'} \left(\frac{1 + p\tau_0(\alpha + x/x_0)}{1 + p\tau_0\alpha}\right)^{-\Omega_0}, \quad (19)$$

где $t' = t - x/C_\infty$, $\Omega_0 = \Delta x_0/(2C_\infty\tau_0)$.

Применяя теорему Эфроса об обобщенной свертке [20], выражение (19) можно преобразовать к виду

$$\tilde{I}(t, x) = \int_0^\infty d\zeta F(\Omega_0, \zeta) G(t', \zeta), \quad (20)$$

где функции $G(t', \zeta)$ и $F(\Omega_0, \zeta)$ имеют вид

$$G(t', \zeta) = \exp\{-\frac{t'}{\alpha\tau_0} - \zeta(1 + x/\alpha x_0)\} \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial t'}\{I_0(2\sqrt{\zeta(x/\alpha x_0)t'/(\alpha\tau_0)})\vartheta(t')\},$$

$$F(\Omega_0, \zeta) = \zeta^{\Omega_0 - 1}/\Gamma(\Omega_0).$$

Выполнив в (20) интегрирование [21], можно показать, что ему соответствует гипергеометрическое описание изменения профиля импульса при распространении

$$\tilde{I}(t, x) = \exp\{-t'/(\alpha\tau_0)\}(1 + x/\alpha x_0)^{-\Omega_0} \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial t'}\{{}_1F_1(\Omega_0, 1, \gamma(x)t'/(\alpha\tau_0))\vartheta(t')\}, \quad (21a)$$

где через $\gamma(x)$ обозначена величина

$$\gamma(x) = 1 - 1/(1 + x/\alpha x_0).$$

Отметим, что структурно выражение (21а) соответствует детально исследованному в [9] решению, описывающему распространение импульса в среде с распределением СВР вида $g(\tau) \sim 1/\tau$, которое, в свою очередь, эквивалентно распространению импульса в среде с Ei-памятью [3]. Однако независимость параметра Ω_0 от координаты x (в отличие от линейной зависимости этого параметра для однородной среды с Ei-памятью) приводит к несколько отличной картине распространения импульса.

Эту картину можно легко понять, рассмотрев частный случай целых значений параметра Ω_0: $\Omega_0 = n$. Значение этого параметра, как следует из (21а), контролируется распределением температуры вдоль трассы через величину x_0, и, следовательно, может быть легко создано экспериментально. Гипергеометрическая функция в (21а) при целых $\Omega_0 = n$ вырождается в экспоненту, умноженную на полином Лагерра степени n [22]:

$${}_1F_1(n + 1, 1, z) = e^z L_n^0(-z),$$

и может быть представлена в виде [22]

$${}_1F_1(n + 1, 1, z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n} z^n e^z.$$

Так, например, в частных случаях $\Omega_0 = 1$ и $\Omega_0 = 2$ эволюция профиля импульса описывается выражениями:

для $\Omega_0 = 1$

$$I(t, x) = (1 + x/\alpha x_0)^{-1} \times$$
$$\times \left[\delta(t') + \frac{\gamma(x)}{\alpha\tau_0}\exp\{-(1 - \gamma(x))\frac{t'}{\alpha\tau_0}\}\vartheta(t')\right], \quad (22a)$$

для $\Omega_0 = 2$

$$I(t, x) = (1 + x/\alpha x_0)^{-1}\left[\delta(t') + \frac{\gamma(x)}{\alpha\tau_0} \times\right.$$
$$\left.\times\left(2 + \gamma(x)\frac{t'}{\alpha\tau_0}\right)\exp\{-(1 - \gamma(x))\frac{t'}{\alpha\tau_0}\}\vartheta(t')\right]. \quad (23a)$$

Из выражения (22а) следует, что при значении параметра $\Omega_0 = 1$ тело импульса на всех расстояниях от источника имеет вид экспоненциально спадающего во времени хвоста, характерная ширина которого линейно растет с пройденным расстоянием. На рис. 1 приведены профили импульса давления в зависимости от безразмерного времени $t_{ret} = t'/(\alpha\tau_0)$ на различных безразмерных расстояниях $z = x/(\alpha x_0)$, полученные сверткой выражения (22а) с функцией источника вида

$$P_0(t) = P_0(t/T_0)\exp\{-(t/T_0)^2\}, \quad (24)$$

которые иллюстрируют указанную динамику эволюции импульса.

Такая эволюция импульса отличается от общей закономерности, установленной в работе [14], где предсказывается наличие максимума на теле импульса для достаточно больших расстояний.

Качественно другая картина эволюции профиля импульса, соответствующая общей закономерности, установленной в работе [14], следует из выражения (23а) для $\Omega_0 = 2$ (и, как можно показать, для всех больших значений параметра Ω_0). Именно: на малых расстояниях $x < 2\alpha x_0$ тело импульса имеет вид экспоненциально спадающего хвоста. Однако на больших расстояниях $x > 2\alpha x_0$

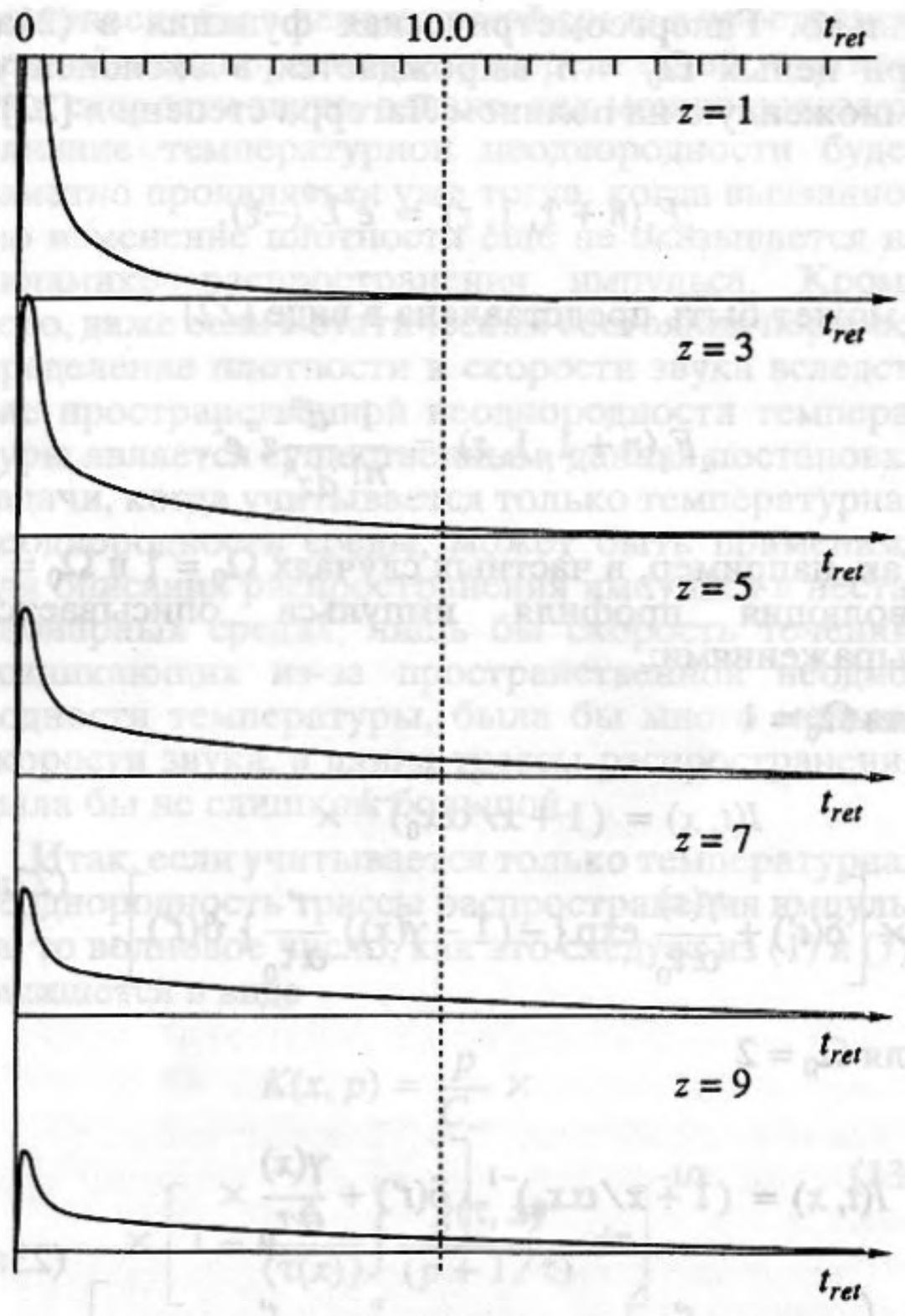

Рис. 1. Профили импульса давления в зависимости от безразмерного времени $t_{ret} = (t - x/C_\infty)/(\alpha\tau_0)$ на разных безразмерных расстояниях от источника $z = x/(\alpha x_0)$: $z = 1; 3; 5; 7; 9$, при значении параметра $\Omega_0 = 1$. Обезразмеренная длительность исходного импульса (24) равна $T_0/(\alpha\tau_0) = 0.2$.

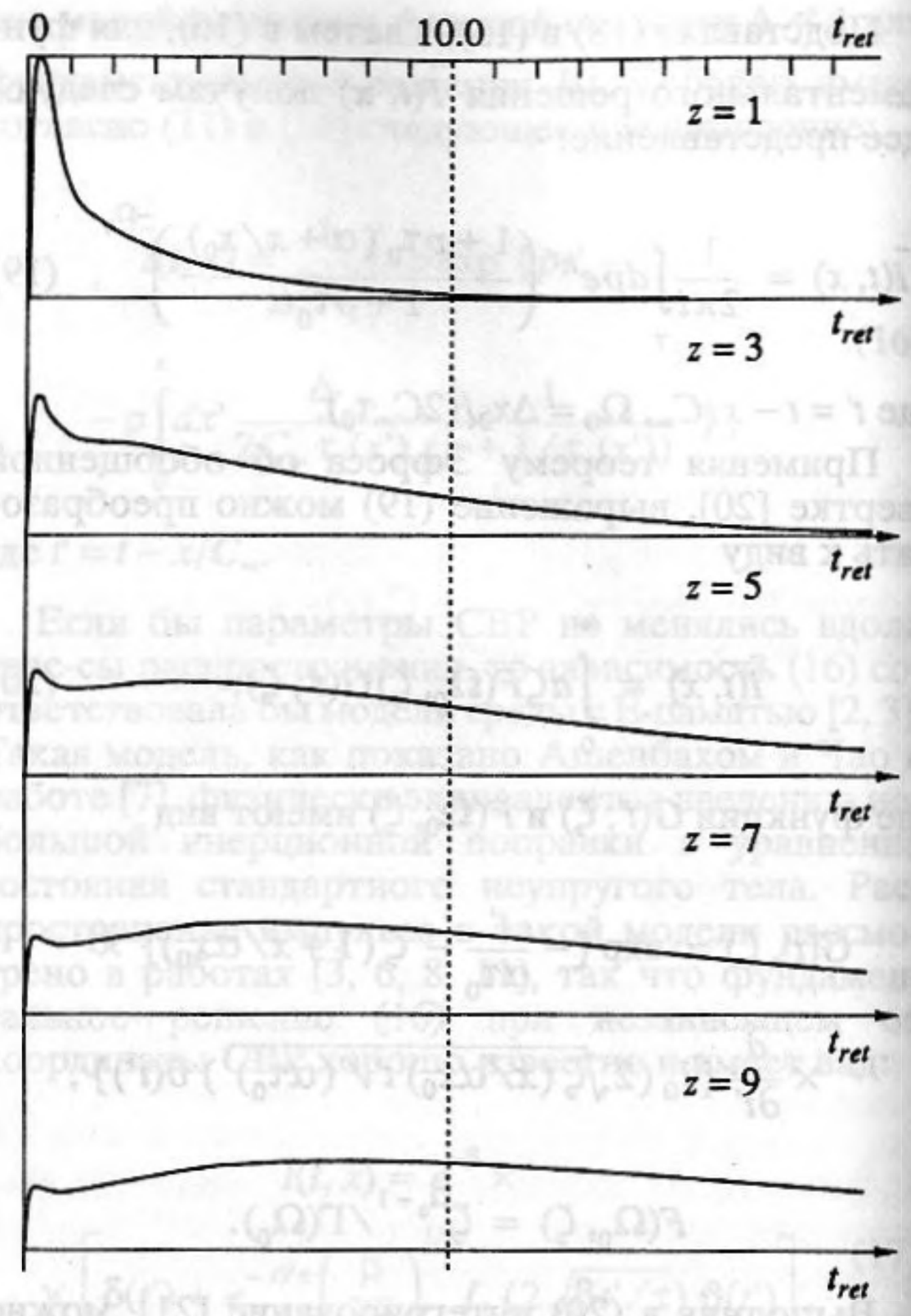

Рис. 2. То же, что и на рис. 1 при тех же значениях параметров, но для $\Omega_0 = 2$. Вертикальный масштаб по сравнению с рис. 1 уменьшен в два раза.

на профиле импульса появляется максимум, положение которого определяется выражением

$$\frac{t'}{\alpha\tau_0} = \frac{3\gamma(x) - 2}{\gamma(x)\,(1 - \gamma(x))}.$$

Из этого выражения следует, что на расстояниях $x \gg 2\alpha x_0$ этот максимум движется с постоянной скоростью $C_0 < C_\infty$, где $C_0^{-1} = C_\infty^{-1} + \tau_0/x_0 \equiv C_\infty^{-1}(1 + \Delta/4)$, а характерная ширина импульса линейно растет с пройденным расстоянием. На рис. 2 показаны временные профили импульса давления на различных расстояниях, полученные сверткой выражения (23) с функцией источника (24), иллюстрирующие указанную динамику.

Как было отмечено выше, при $x_0 < 0$ в области расстояний $x < (\alpha - 1)|x_0|$ импульс будет распространяться в направлении возрастания температу-ры, и соответственно уменьшения времени релаксации. Можно показать, выполнив преобразования, аналогичные (19), (20), что справедливо аналитическое продолжение выражения (21) на отрицательные значения $x_0 < 0$ и, соответственно, $\Omega_0 < 0$. Имея это в виду и используя соотношение [22]

$${}_1F_1(a, b, -z) = e^{-z}\,{}_1F_1(b - a, b, z),$$

фундаментальное решение для импульса давления при $x_0 < 0$ может быть записано в виде

$$\tilde{I}(t, x) =$$

$$= (1 - x/\alpha|x_0|)^{|\Omega_0|} \exp\left\{-(1 - \gamma(x))\frac{t'}{\alpha\tau_0}\right\} \times \quad (21б)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial t'}\left\{{}_1F_1(|\Omega_0|, 1, \gamma(x)t'/(\alpha\tau_0))\vartheta(t')\right\},$$

где $\gamma(x) = 1 - 1/(1 - x/\alpha|x_0|)$. В частных случаях $|\Omega_0| = 1$ и $|\Omega_0| = 2$ эволюция профиля импульса описывается выражениями:

для $|\Omega_0| = 1$

$$\tilde{I}(t, x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha|x_0|}\right)\delta(t') + \frac{(x/\alpha|x_0|)}{(\alpha\tau_0)} \exp\{-\frac{t'}{\alpha\tau_0}\}\,\vartheta(t'), \tag{22б}$$

для $|\Omega_0| = 2$

$$\tilde{I}(t, x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha|x_0|}\right)^2 \delta(t') + \frac{1}{\alpha\tau_0}\left(2\gamma(x) + \frac{t'}{\alpha\tau_0} \times \left(\frac{x}{\alpha|x_0|}\right)^2\right)\exp\{-\frac{t'}{\alpha\tau_0}\}\,\vartheta(t'). \tag{23б}$$

Нетрудно видеть, что в обоих случаях тело импульса имеет вид экспоненциально спадающего хвоста. В общем случае можно показать, что при логарифмическом возрастании обратной температуры вдоль трассы на всех допустимых в этом случае расстояниях $x < (\alpha - 1)|x_0|$ тело импульса имеет вид экспоненциально спадающего хвоста без характерного максимума, предсказываемого общей теорией [14].

Таким образом приведенное исследование показывает, что в температурно неоднородной релаксационной среде могут существовать такие режимы распространения импульсов, которые отличаются от общей закономерности, установленной в работе [14].

Наличие таких режимов распространения объясняется следующим образом: результаты работы [14] основаны на обобщении результатов работы [10], где интегралы типа (11) оценивались методом перевала и использовалось взаимно однозначное соответствие между перевальной точкой и точками профиля импульса. При этом применимость метода перевала в случае однородной среды определялась параметром, пропорциональным пройденному расстоянию, что обусловливало требуемое его большое значение на достаточно больших пройденных расстояниях. В рассмотренном выше случае температурно неоднородной среды этот параметр фактически заменяется на $\Omega_0 = \Delta x_0/(2C_\infty\tau_0)$, значение которого уже не зависит от пройденного расстояния. Поэтому при малых значениях этого параметра метод перевала оказывается неприменим, и, соответственно, основанные на нем результаты работы [14] также будут некорректными, что и демонстрируют выражения (22а), (22б).

В случае же (23б), когда рассматривается распространение импульса в направлении возрастания температуры, то при логарифмическом законе ее изменения, ограниченной оказывается область расстояний $x < (\alpha - 1)|x_0|$, где полученное решение имеет физический смысл, так что режим распространения, соответствующий общей закономерности [14] просто не успевает проявиться на конечном интервале расстояний.

Таким образом, помимо явных выражений, описывающих распространение импульса в температурно неоднородной среде, одним из результатов настоящей работы является вывод о возможности, даже в условиях применимости ВКБ-приближения, существования режимов распространения импульсов в температурно неоднородных средах, которые отличаются от общей закономерности, установленной в работе [14], что связано с учетом более тонких обстоятельств, связанных с зависимостью определяющих параметров задачи от свойств неоднородной среды, и появляющейся вследствие этого возможностью выхода за границы применимости приближений, использованных в [14].

Работа выполнена при финансовой поддержке Специального фонда выплаты персональных стипендий и грантов талантливым молодым ученым (грант А1.25), а также в рамках межвузовской научно-технической программы "ФИЗМАТ".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигул У.К.* Нелинейная акустодиагностика. Л.: Судостроение, 1981.
2. *Нигул У.К.* Аналитическое решение одномерной обратной задачи импульсной акустодиагностики наследственной среды // В кн.: Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984.
3. *Nigul U.* The modified theory of viscoelasticity / Preprint Tallinn: Academy of Sciences of Estonian SSR, 1983.
4. *Зверев И.К.* Распространение возмущений в вязкоупругом и вязкопластичном стержне // ПММ. 1950. Т. 14. С. 295 - 302.
5. *Morrison J.A.* Wave propagation in rods of Voigt material and visco-elastic materials with three parameter models // Quart. Appl. Math. 1956. V. 14. № 2. P. 153 - 169.
6. *Achenbach J.D., Chao C.C.* A three parameter visco-elastic model particulary suited for dynamic problems // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. P. 245 - 252.
7. *Локшин А.А., Суворова Ю.В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982.
8. *Дунин С.З.* Распространение волн в слабо диспергирующих средах // ПМТФ. 1986. № 1. С. 138 - 141.
9. *Дунин С.З., Максимов Г.А.* Распространение импульсов в средах с малой дисперсией скоростей и спектром времен релаксации 1/τ. Точное решение. // ПММ. 1990. Т. 54. № 3. С. 480 - 484.
10. *Дунин С.З., Максимов Г.А.* Распространение импульсов в средах, обладающих спектром времен релаксации // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 6. С. 1048 - 1055.
11. *Кельберт М.Я., Сазонов И.А.* Распространение импульсов в жидкостях. М.: Наука, 1991.
12. *Равасоо А.А.* Распространение одномерных волн в неоднородной наследственно упругой среде с Е-памятью // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 147 - 152.
13. *Нигул У.К., Равасоо А.А.* Нестационарные продольные волны в линейных неоднородных средах с Ei-памятью // Изв. АН СССР, МТТ. 1991. № 2. С. 66 - 74.

14. *Максимов Г.А.* Распространение коротких акустических импульсов в неоднородных релаксационных средах // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 4. С. 703 - 714.
15. *Максимов Г.А.* О двух точных решениях задачи распространения акустического импульса в неоднородной максвелловской среде // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 1 - 5.
16. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
17. *Новик А., Берри Б.* Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975.
18. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
19. *Максимов Г.А.* Закономерности изменения энергии короткого импульса, распространяющегося в среде с одним релаксационным механизмом // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 5. С. 866 - 871.
20. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
21. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
22. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.

Propagation of a Pulse in a Temperature-Inhomogeneous Relaxation Medium

G. A. Maksimov

Propagation of a short acoustic pulse in a relaxation, temperature-inhomogeneous medium is considered. It is assumed that relaxation time depends exponentially upon inverse temperature, which varies logarithmically along the propagation track. An analytical solution is found. An analysis of this solution demonstrates that even in the WKB approximation there may exist pulse propagation modes that deviate from regularities established earlier [14]. These differences are associated with the existence of conditions that carry the description of pulse propagation beyond the limits of applicability of the results in [14].