АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 40, № 5, с. 809 - 811

УДК 519.62

О ГИПОТЕТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ “ПРОСВЕТЛЕНИЯ” ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД[1]

© 1994 г. В. Ю. Завадский

Акустический институт им. Н.Н. Андреева
117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 31.01.94 г.

Рассмотрена математическая модель слабоотражающего покрытия, представляющего собой слой с границами, на которых заданы специальные локальные условия. Эти условия при их технической реализации с помощью микромеханических конструкций позволяют создать тонкие покрытия, практически не отражающие падающие на них волны под различными углами и на всех частотах.

Проблема слабоотражающих и неотражающих слоев и покрытий представляет большой интерес. Не останавливаясь на конструктивных особенностях подобных покрытий, заметим, что в них используется либо многослойное, либо непрерывно изменяющееся от слоя к слою распределение волновых свойств материалов и обычные краевые условия на границах слоев. При этом потери необходимо вводить плавно от малых значений вблизи внешней среды до максимально больших на задней границе поглощающего слоя (аналогично – плавное изменение свойств согласующего слоя), иначе волна просто не войдет в поглотитель и сразу отразится. Например, металл – идеальный поглотитель с очень сильными потерями для световых и радиоволн, но поверхность металла “блестит”: волны не могут войти внутрь металла. Вводя потери “плавно”, приходится сильно увеличивать толщину поглощающего слоя, его вес, в особенности тогда, когда длина волны велика.

Если бы удалось заставить волны входить в сильный поглотитель, что габариты слоя можно было бы сильнее уменьшить, сделать его всечастотным и не отражающим волновые импульсы.

Этого можно достичь, если ввести новый класс граничных условий, пригодных как для согласования сред с разными волновыми свойствами, так и для создания высокоэффективных поглощающих покрытий.

Рассмотрим пример, когда в декартовой системе координат x, y плоскость $x = 0$ является границей раздела двух однородных сред с одинаковыми плотностями и разными скоростями звука $c_1 (x < 0)$ и $c_2 (x > 0)$, $k_1 = \omega/c_1$, $k_2 = \omega/c_2$. Предположим, что $c_2 > c_1$. Пусть на границу $x = 0$ падает плоская волна

$$p_0(x, y) = \exp(ix(k_1^2 - \zeta^2)^{1/2} + iy\zeta)$$

под углом ϑ: $\zeta = k_1 \sin\vartheta$. В таком случае от границы отразится волна $p_v(x, y) = V\exp(-ix(k_1^2 - \zeta^2)^{1/2} + iy\zeta)$, а во вторую среду пройдет волна $p_2(x, y) = W\exp[ix(k_2^2 - \zeta^2)^{1/2} + iy\zeta]$. В первой среде $(x < 0)$ имеем волновое поле $p_1 = p_0 + p_v$. Поля p_1 и p_2 удовлетворяют двумерным уравнениям Гельмгольца $(\Delta + k_1^2)p_1 = 0$, $(\Delta + k_2^2)p_2 = 0$. Введем обозначения:

$$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad \delta = \frac{1}{2}(k_1 - k_2).$$

Рассмотрим следующие условия на границе $x = 0$

$$D\,(k^2 + k\delta + \partial^2/\partial y^2)\,p_1(0, y) = p_2(0, y),$$
$$D\,(k^2 - k\delta + \partial^2/\partial y^2)\,p_{1,x}(0, y) = p_{2,x}(0, y), \tag{1}$$

где D – некоторая размерная величина, несущественная при нахождении коэффициента отражения V. Учитывая, что дифференцирование по y соответствует умножению на $i\zeta$, имеем,

$$D\,(k^2 + k\delta - \zeta^2)\,(1 + V) = W, \tag{2}$$

$$D\,(k^2 - k\delta - \zeta^2)\,(1 - V)\,(k_1^2 - \zeta^2)^{1/2} = W(k_2^2 - \zeta^2)^{1/2}.$$

Пусть $\delta/k \ll 1$, что означает малое отличие c_2 от c_1: $(c_2 - c_1)/(c_2 + c_1) = \varepsilon \ll 1$. Тогда, вводя обозначение $a = 1 - \zeta^2/k^2$ в предположении $\zeta \neq k$, находим из (2):

$$\frac{1 - V}{1 + V} = \frac{(a + \varepsilon)\,(1 + (\varepsilon^2 - 2\varepsilon)/a)^{1/2}}{(1 - \varepsilon)\,(1 + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)/a)^{1/2}} = \frac{f(\varepsilon)}{f(-\varepsilon)},$$

где $f(\varepsilon) = (a + \varepsilon)(1 + (\varepsilon^2 - 2\varepsilon)/a)^{1/2}$,

и

$$V(\varepsilon) = \frac{f(-\varepsilon) - f(\varepsilon)}{f(-\varepsilon) + f(\varepsilon)}. \tag{3}$$

---

1 Более подробное изложение доклада В.Ю. Завадского на XI Всесоюзной Акустической конференции, 1991 г., см. тр. XI Всес. Акуст. конф., секц. А. М.: 1991. с. 87 - 89.

Из (3) видно, что $V(\varepsilon)$ – нечетная функция аргумента ε: $V(\varepsilon) = E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^3 + \ldots$. Поскольку

$$f(\varepsilon) = a + \frac{a-3}{2a}\varepsilon^2 - \frac{1-a}{a^2}\varepsilon^3 + 0(\varepsilon^4),$$

то

$$V(\varepsilon) = \frac{2\dfrac{1-a}{a^2}\varepsilon^2 + 0\,(\varepsilon^5)}{2a + 0\,(\varepsilon^2)}, \tag{4}$$

$$E_1 = 0, \quad E_2 = (1-a)\,/\,a^3.$$

Следовательно, $V(\varepsilon) \approx E_2\varepsilon^3$.

Если в левой части (1) положить $D(k^2 \pm k\delta + \partial^2/\partial y^2) \equiv 1$, то мы получим обычные условия непрерывности давлений и скоростей

$$p_1(0, y) = p_2(0, y), \quad p_{1,x}(0, y) = p_{2,x}(0, y),$$

из которых находим:

$$\frac{1-V}{1+V} = \frac{(1 + (\varepsilon^2 - 2\varepsilon)\,/\,a)^{1/2}}{(1 + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)\,/\,a)^{1/2}}. \tag{5}$$

Отсюда $V = \varepsilon/a$.

Таким образом, из (4) и (5) следует, что при малом отличии сред граница между средами отражает плоскую волну, падающую под любым углом ϑ, значительно слабее при условиях (1), чем при обычных условиях непрерывности на границе.

Условия (1) являются локальными, т.е. выполняются в любой точке границы, как и обычные условия. Тогда $V \sim \varepsilon^3$ справедливо для любого угла падения плоской гармонической волны, а следовательно, для любого поля, которое можно представить в виде суммы плоских гармонических волн. Выбирая в (1) величину D соответствующим образом, можно записать условия (1) без частотной зависимости, т.е. справедливыми для любой негармонической волны. Пусть негармоническая плоская волна характеризуется функцией f: $U_1(x, y, t) = f((x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)/c_1 - t)$. Подставляя в (1) k и δ, выраженные через c_1, c_2, имеем:

$$D\omega^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) + \delta^2/\partial y^2\right] U_1(0, y, t) = U_2(0, y, t),$$
$$D\omega^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) + \delta^2/\partial y^2\right] U_{1,x}(0, y, t) = U_{2,x}(0, y, t), \tag{6}$$

Поскольку аргумент функции f имеет размерность времени, то дифференцирование по y даст размерность скорости, т.е. выйдет множитель $c_1^{-2}\sin^2\vartheta$. Выбрав $D = 1/k_1^2$, будем иметь (6) в безразмерной записи:

$$(A + c_1^2\partial^2/\partial y^2)\, U_1(0, y, t) = U_2(0, y, t),$$
$$(B + c_1^2\partial^2/\partial y^2)\, U_{1,x}(0, y, t) = U_{2,x}(0, y, t), \tag{7}$$

где $A = \gamma(1+\gamma)/2$, $B = (1+\gamma)/2$, $\gamma = c_1/c_2$. Очевидно, что оценка $V \sim \varepsilon^3$ остается справедливой как для любого угла ϑ, так и для любой функции f.

Для численной сеточной реализации граничных условий (7) введем в среде при $x > 0$ сетку с шагами h и l по x и y соответственно. Удобнее всего, чтобы в среде при $x > 0$ узлов сетки было как можно меньше в каждом краевом условии. Это позволит явно производить все вычисления при продвижении вдоль координаты x. Следовательно, опуская зависимость от t, из (7) можно вычислить явно $U_2(0, y)$, $U_{2,x}|_{x=0}$. Конечно, поскольку необходимо вычислять производную по x при $x = 0$, то в случае сетки лучше отступить от границы $x = 0$ на расстояние $\pm h$. Тогда имеем

$$(B + c_1^2 L_{l,y}^2)\;[U_1(h, y) - U_1(-h, y)] =$$
$$= U_2(h, y) - U_2(-h, y), \tag{8}$$

где $L_{l,y}^2$ – разностный аналог оператора $\partial^2/\partial y^2$. Заметим, что $U_2(x, y)$ в сеточной среде удовлетворяет разностному уравнению Гельмгольца

$$[U_2(h, y) + U_2(-h, y) - 2U_2(0, y)]\,/\,h^2 + [U_2(0, y+l) +$$
$$+ U_2(0, y-l) - 2U_2(0, y)\,]\,/\,l^2 + k_2^2 U_2(0, y) = 0. \tag{9}$$

Следовательно, найдя из (7) величины $U_2(0, y + nl)$, $n = 0, 1, \ldots$, а из (8) и (9) разность и сумму $U_2(h, y)$, $U_2(-h, y)$, имеем:

$$U_2(h, y) - U_2(-h, y) =$$
$$= (B + c_1^2 L_{l,y}^2)[U_1(h, y) - U_1(-h, y)] = \alpha,$$

$$U_2(h, y) + U_2(-h, y) = 2U_2(0, y) - \frac{h^2}{l^2}[U_2(0, y+l) +$$
$$+ U_2(0, y-l) - 2U_2(0, y) = \beta.$$

Получаем окончательно

$$U_2(-h, y) = (\beta - \alpha)/2, \quad U_2(h, y) = (\beta + \alpha)/2.$$

Таким образом, выполняя только явные вычисления, удается "пройти" численно слабоотражающую гипотетическую границу с условиями (7). Затем, если при $x > x_0$ $(x_0 \geq h)$ расположена среда со скоростью звука c_3, всю эту процедуру можно повторить, добиваясь достаточно малого коэффициента отражения между двумя средами со скоростями c_1 и c_2.

Оценим погрешность, которая возникает при прохождении плоской волны из непрерывной среды в сеточную. Для этого положим, что среды характеризуются одним и тем же волновым числом k. Волна $\exp[ix(k^2 - \zeta^2)^{1/2} + iy\zeta]$ падает на границу $x = 0$ и отражается с коэффициентом $\hat{V}$. В сеточной среде возникает прошедшая волна $\hat{W}\exp(ix\kappa + iy\zeta)$. Чтобы последняя удовлетворяла уравнению (9), необходимо, чтобы величина κ удовлетворяла характеристическому уравнению:

$$-4\sin^2(\xi l/2)/l^2 - 4\sin^2(\kappa l/2)/l^2 + k^2 = 0. \qquad (10)$$

Если $l \longrightarrow 0$, то $\kappa^2 = k^2 - \zeta^2$. Для малых l, записав (10) в виде

$$\cos\zeta l + \cos\kappa l + k^2 l^2/2 - 2 = 0,$$

имеем приближенно

$$-\zeta^2/2 - \kappa^2/2 + \zeta^4 l^2/4! + \kappa^4 l^2/4! + k^2/2 = 0,$$

откуда $\kappa^2 \simeq k^2 - \zeta^2 + l^2[\zeta^4/12 + (k^2 - \zeta^2)^2/12]$ и

$$\kappa \simeq (k^2 - \xi^2)^{1/2} + l^2(2\xi^4 + k^4 - 2k^2\xi^2)/(24\sqrt{k^2 - \xi^2}).$$

Приравнивая при $x = 0$ поля и их производные (конечные разности) в сплошной и сеточной средах, находим:

$$1 + \hat{V} = \hat{W},$$

$$i(k^2 - \xi^2)^{1/2}(1 - \hat{V}) = \hat{W}(e^{i\kappa l} - e^{-i\kappa l})/2l =$$

$$= i\hat{W}\sin\kappa l/l.$$

Отсюда

$$\frac{1 - V}{1 + V} = \frac{l^{-1}\sin\kappa l}{(k^2 - \zeta^2)^{1/2}} \simeq$$

$$\simeq \frac{\kappa - l^2\kappa^3/6}{(k^2 - \zeta^2)^{1/2}} \simeq \frac{(k^2 - \zeta^2)^{1/2} + l^2 M}{(k^2 - \zeta^2)^{1/2}},$$

где

$$M = (2\zeta^4 + k^4 - 2k^2\zeta^2)/(24\sqrt{k^2 - \zeta^2}) - (k^2 - \zeta^2)^{3/2}/6.$$

Поскольку $k^2 - \zeta^2 = k^2\cos^2\vartheta$, $\zeta = k\sin\vartheta$, то окончательно находим:

$$|\hat{V}| = l^2 M(2k\cos\vartheta)^{-1} =$$

$$= k^2 l^2(\sin^2\vartheta\,\mathrm{tg}^2\vartheta - 3\cos^2\vartheta)/48.$$

Если исключить малые скользящие углы, для которых $\cos\vartheta \longrightarrow 0$, то можно приближенно считать, что коэффициент отражения на границе сплошной и сеточной сред имеет порядок $k^2 l^2/48$. Для того, чтобы погрешность аппроксимации граничных условий сеточными была одного порядка с величиной $E_2\varepsilon^3$ из (4), нужно выбрать шаг сетки l из условия $k^2 l^2 = 48\varepsilon^3$.

Теперь можно перейти к рассмотрению возможного механизма реализации, например, условия

$$(A + c_1^2\partial^2/\partial y^2)\,U_1(0, y) = U_2(0, y)$$

или его разностного аналога

$$AU_1(0, y) + l^{-2}\,[U_1(0, y + l) + U_1(0, y - l) - 2U_1(0, y)] = U_2(0, y). \qquad (11)$$

В левой части (11) выполняются только операции сложения (вычитания) и умножения волнового поля в соседних узлах на оси y. Такие операции легко реализуются в микромеханике рычажной системой: рычаги с разной длиной плеч (умножение), простой рычажный механизм для сложения величин. Если p и q – смещения в одном измерении, то рычажный микромеханизм реализует их умножение и сложение. Затем полученные смещения передаются во вторую среду согласно (11). Совершенно аналогичным образом может быть реализовано второе условие в (7), или его разностный аналог может быть реализован при замене производных $U_{1,x}$, $U_{2,x}$ конечными разностями.

Hypothetical Conditions of Antireflection of Interface between Media

 V. Yu. Zavadskii

A mathematical model is treated of a weakly reflecting coating fashioned as a layer with boundaries, on which special local conditions are preassigned. These conditions, when realized by means of micromechanical systems, enable one to create thin coatings that give practically no reflection of waves incident on these coatings at different angles and at all frequencies.