

УДК 534.222:534.213

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА НЕЛИНЕЙНОСТИ И СКОРОСТИ ЗВУКА В АКУСТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТОМОГРАФИИ

© 1994 г. В. А. Буров, И. Е. Гуринович, О. В. Руденко, Е. Я. Тагунов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

119899 Москва, Ленинские горы

Поступила в редакцию 15.12.93 г.

Рассмотрена полная обратная задача нелинейного рассеяния с неизвестным распределением фазовой скорости, плотности среды и нелинейного параметра для среды с однородными линейными параметрами. Получены простые соотношения, связывающие Фурье-образ распределения нелинейного параметра с амплитудами нелинейного рассеяния суммарной и разностной частоты. Избыточность полных данных нелинейного рассеяния позволяет использовать различные сокращенные схемы получения экспериментальных данных.

Широкое применение акустических волн для решения задач неразрушающего контроля, медицинской диагностики, исследования многофазных сред породило обширный круг задач в сравнительно новой научной области – акустической томографии. Сочетание методов, развиваемых в теории обратных задач рассеяния волн, с достижениями реконструктивной вычислительной томографии позволяет восстанавливать поля значений таких важных характеристик неоднородных сред, как локальные величины скорости, коэффициента поглощения, звука, плотности среды.

В последнее время в акустической томографии стали разрабатываться нелинейные методы исследований, направленные на реконструкцию поля значений нелинейного параметра ϵ , обычно вводимого в акустике с помощью соотношения $\epsilon = 1 + \rho_0(dc^2/d\rho)_0/2$. Этот параметр не только определяет эффективность протекания нелинейных процессов, но и косвенно связан с целым рядом других параметров среды, представляющих интерес при диагностических исследованиях. В работах [1, 2], например, предложен метод, использующий измерение нелинейных эффектов, накопленных при распространении сигналов вдоль некоторой совокупности лучей и выражающихся через интегралы от $\epsilon(x, y)$ по этим траекториям. Расчет значений данных интегралов производится либо по результатам измерений амплитуды волны разностной частоты $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, образующейся при взаимодействии волн ω_1 и ω_2 , распространяющихся вдоль рассматриваемого луча [1], либо по амплитуде второй гармоники одной из этих волн [2]. При этом значения других акустических параметров (скорость звука, плотность) полагаются неизменными во всей области распространения, а теоретическое рассмотрение ограничивается рамками лучевого приближения.

Последнее обстоятельство накладывает принципиальные ограничения на разрешающую способность данного метода реконструкции, определяемую поперечными размерами зондирующего пучка.

Ставя перед собой задачу реконструкции полного поля акустических параметров неоднородной среды, следует иметь в виду, что на практике изменение одного из параметров сопровождается, как правило, изменением другого. Поэтому чрезвычайно актуальной является задача определения распределения значений каждого из акустических параметров по данным о рассеянии акустической волны из области локализации неоднородности в случае одновременного изменения всех рассматриваемых параметров.

В данной работе сделан шаг к решению такой задачи при наличии в среде неоднородности скорости звука c , плотности ρ , параметра нелинейности ϵ . Следует особо отметить, что в отсутствие нелинейности разделение неоднородностей скорости и коэффициента поглощения звука не рассматривается как самостоятельная задача, поскольку поглощение может учитываться путем введения комплексного волнового числа или комплексной скорости, зависящей от частоты. Развитые к настоящему времени методы вычислительной томографии, позволяющие разделить ρ - и c -неоднородности, основаны на использовании многочастотного облучения исследуемой области [3]. Поэтому они могут эффективно сочетаться с методами, использующими нелинейное взаимодействие волн тех же частот для восстановления ϵ -неоднородностей. В соответствии с данными [3] "рс-задача" может быть сведена к совокупности "с-задач". Поэтому в качестве следующего шага рассмотрим "с ϵ -задачу", т.е. задачу поэтапного восстановления неоднородностей в значениях

скорости $c(\mathbf{r})$ и параметра нелинейности $\epsilon(\mathbf{r})$, когда области локализации этих неоднородностей полностью или частично перекрываются.

Возможность реконструкции поля распределения параметра нелинейности $\epsilon(\mathbf{r})$ по результатам нелинейного взаимодействия акустических волн, сопровождающегося излучением из области взаимодействия волн комбинационных частот, показана в работе [4]. В отличие от [4] в поставленной задаче необходимо включить в рассмотрение рассеяние акустических волн на c -неоднородностях. При этом необходимо вести учет рассеяния как самих взаимодействующих волн, так и волн комбинационных частот, излучаемых из области нелинейного взаимодействия. В качестве исходной используем систему уравнений Эйлера для сплошной среды:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] &= -\nabla P, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ P &= P(\rho), \end{aligned} \quad (1)$$

где P – давление, ρ – плотность, \mathbf{v} – колебательная скорость частиц.

Во втором приближении эта система с помощью известных математических преобразований может быть сведена к одному уравнению для P и ρ . При использовании в качестве основной переменной акустического давления $p = P - P_0$ система (1) в этом приближении сводится к уравнению:

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -Q. \quad (2)$$

Здесь

$$Q = \frac{\epsilon - 1}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \Delta v^2 + \rho_0 \mathbf{v} \Delta \mathbf{v};$$

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho = \rho_0}; \quad \epsilon = 1 + \frac{B}{2A};$$

$$A = \frac{\rho_0}{P_0} c_0^2; \quad B = \frac{\rho_0^2}{P_0} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\rho = \rho_0}.$$

В случае, когда уравнение состояния может быть записано в форме Тэта $P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$, параметр нелинейности ϵ выражается в виде $\epsilon = (\gamma + 1)/2$. Анализ нелинейного взаимодействия акустических волн на основе уравнения (2), или аналогичного ему уравнения, записанного для ρ' , где $\rho' = \rho - \rho_0$, проводился в целом ряде работ (например, [5, 6]). Для нас представляет интерес, каким образом уравнение (2) может быть использовано для описания генерации волн комбинационных

частот при взаимодействии пересекающихся волновых пучков различных частот.

Поскольку между результатами различных работ имеются расхождения, на их причинах целесообразно остановиться отдельно. С учетом тематики нашей работы коснемся здесь только задач, связанных с расчетами волнового поля комбинационных частот вне области взаимодействия первичных волн. В [5] функция, описывающая плотность вторичных источников на комбинационных частотах, находилась путем подстановки в правую часть уравнения для ρ' , аналогичного уравнению (2), соотношений первого приближения, описывающих каждую из взаимодействующих волн в виде плоской волны. Решение полученного неоднородного уравнения представлялось в виде запаздывающего потенциала. Учет конечной апертуры взаимодействующих волн проводился путем ограничения области, в которой плотность вторичных источников отлична от нуля, областью пересечения пучков. Однако такой подход, используемый и в ряде других работ, приводит к ошибочным и внутренне противоречивым результатам. Так, с учетом связи между p и ρ' , задаваемой уравнением состояния во втором приближении

$$p = c_0^2 \rho' + c_0^2 (\epsilon - 1) \rho'^2 / \rho_0, \quad (3)$$

уравнение (2) и аналогичное ему уравнение для ρ' , используемое в [5], отличаются своими правыми частями. Если следовать упомянутому выше подходу, разность между ними с точностью до постоянного множителя для волны разностной частоты равна

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 p^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \right)_{\omega = \Omega} &= p_{01} p_{02}^* \left[(k_1 - k_2)^2 - \frac{\Omega^2}{c_0^2} \right] \times \\ &\times \exp \{ i [\Omega t - (K_1 - K_2) \mathbf{r}] \}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, p_{0j} – комплексная амплитуда волны, заданной в виде:

$$p_j(\mathbf{r}, t) = \{ p_{0j} \exp[i(\omega_j t - K_j \mathbf{r})] / 2 \} + \text{к. с.}$$

При записи решения в виде запаздывающего потенциала на первый взгляд получается, что при таком подходе на частоте Ω акустическое давление p_Ω и плотность ρ_Ω вне области пересечения пучков не только не связаны между собой линейным соотношением $p_\Omega = c_0^2 \rho_\Omega$ (что должно выполняться с точностью до членов второго порядка малости вследствие отсутствия здесь возмущения на частотах ω_1 и ω_2 , но и имеют существенно разные зависимости от угла Θ между волновыми векторами K_1 и K_2 . Вместе с тем, если учитывать зависимость амплитуды каждой из взаимодействующих волн от координаты \mathbf{r} , вместо (4) будет получено выражение, несколько отличающееся от записанного выше. Важно при этом, что его влияние может носить только локальный

характер, так как при конечной апертуре взаимодействующих волн он представляет из себя полный даламбериан от функции с финитным носителем. Таким образом, в дальнем поле (а точнее, уже при выполнении условия $kr \gg 1$, где r – расстояние от некоторой внутренней точки пересечения пучков до точки наблюдения; $k = \Omega/c_0$) вклад этого члена в рассеянное поле равен нулю.

Использование в расчетах выражения Q , в виде, записанном в (2), сопряжено с преобразованиями довольно громоздких соотношений. Однако при изучении поля вне области пересечения взаимодействующих пучков, оно может быть существенно упрощено. Можно показать, что величина $S = Q + (\epsilon/\rho_0 c_0^4)(\partial^2 p^2/\partial t^2)$ представляет собой полный даламбериан от некоторой функции L :

$$S = \nabla^2 L - (1/c_0^2)(\partial^2 L/\partial t^2).$$

В частности, в работе [7] показано, что в качестве функции L может фигурировать Лагранжева плотность акустического поля, вводимая в соответствии с соотношением $L = \rho_0 v^2/2 - p^2/2\rho_0 c_0^2$.

Следовательно, при рассматриваемой постановке задачи уравнение (2) может быть сведено к уравнению Вестервельта:

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\epsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Главное преимущество его перед уравнением (2) и другими уравнениями, к которым можно свести (2), заключается в том, что его правая часть не содержит пространственных производных от рассматриваемых физических величин. Поэтому учет конечной апертуры взаимодействующих волн может быть проведен здесь путем ограничения области взаимодействия с использованием внутри нее представления взаимодействующих пучков в виде плоских скалярных волн.

В соответствии с постановкой задачи предположим, что величины $c \equiv c(\mathbf{r})$ и $\epsilon \equiv \epsilon(\mathbf{r})$ являются функциями пространственной координаты \mathbf{r} и уравнение (5) будем решать методом последовательных приближений. Для этого запишем его в виде:

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -F(p), \quad (6)$$

где

$$F(p) = (\epsilon/\rho_0 c^4) (\partial^2 p^2/\partial t^2) + (\chi/c_0^2) (\partial^2 p/\partial t^2), \\ c \equiv c(\mathbf{r}), \quad \chi \equiv \chi(\mathbf{r}) = c_0^2 [1/c_0^2 - 1/c^2(\mathbf{r})].$$

Первое слагаемое в выражении для F отвечает за генерацию волн комбинационных частот $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ и $\nu = \omega_1 + \omega_2$, и вторых гармоник на частотах $2\omega_1$ и $2\omega_2$, в то время как последнее описывает рассеяние каждой из частотных компонент на

неоднородностях скорости звука. Решение рассматриваемой задачи будем искать в виде суперпозиции волн на частотах ω_1 , ω_2 , Ω и ν , каждая из которых может быть записана в следующей форме:

$$p_{\omega_j}(\mathbf{r}, t) = [p_j(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_j t)/2] + \text{к. с.}; \quad j = 1, 2, \\ p_{\Omega}(\mathbf{r}, t) = [p_-(\mathbf{r}, t) \exp(-i\Omega t)/2] + \text{к. с.}, \quad (7) \\ p_{\nu}(\mathbf{r}, t) = [p_+(\mathbf{r}, t) \exp(-i\nu t)/2] + \text{к. с.}$$

В дальнейшем полагаем $p_-(\mathbf{r}) \equiv p_-$, $p_+(\mathbf{r}) \equiv p_+$, $p_j(\mathbf{r}) \equiv p_j$. Волны на частотах $2\omega_j$, которые в данном приближении необходимо, вообще говоря, включить в рассмотрение, мы отбрасываем, так как они не оказывают влияния на величину амплитуды интересующих нас волн комбинационных частот Ω и ν . Уравнение (6) распадается в этом случае на ряд уравнений для каждой из комплексных амплитуд:

$$\Delta p_1 + \frac{\omega_1^2}{c_0^2} p_1 = \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi p_1, \\ \Delta p_2 + \frac{\omega_2^2}{c_0^2} p_2 = \frac{\omega_2^2}{c_0^2} \chi p_2, \quad (8) \\ \Delta p_- + \frac{\Omega^2}{c_0^2} p_- = \frac{\epsilon \Omega^2}{\rho_0 c^4} p_1 p_2^* + \frac{\Omega^2}{c_0^2} \chi p_-, \\ \Delta p_+ + \frac{\nu^2}{c_0^2} p_+ = \frac{\epsilon \nu^2}{\rho_0 c^4} p_1 p_2 + \frac{\nu^2}{c_0^2} \chi p_+.$$

Первые два уравнения системы (8) позволяют находить амплитуды волн, рассеянных на неоднородностях скорости звука [8]. Интегральная запись первого и второго уравнений системы (8) соответственно имеет вид:

$$p_1(y) = p_1^0(y) + \int_{\mathcal{R}} g_1(y, \mathbf{r}) \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi(\mathbf{r}) p_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (9)$$

$$p_2(y) = p_2^0(y) + \int_{\mathcal{R}} g_2(y, \mathbf{r}) \frac{\omega_2^2}{c_0^2} \chi(\mathbf{r}) p_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (10)$$

Здесь

$$g_j = (-1/4\pi) \exp(ik_j |y - \mathbf{r}|) / |y - \mathbf{r}|, \quad j = 1, 2$$

– функции Грина в однородной безграничной среде; $k_1 = \omega_1/c_0$ и $k_2 = \omega_2/c_0$ – модули волновых векторов; $p_1^0(y)$ и $p_2^0(y)$ – первичные облучающие поля; $p_1(y)$ и $p_2(y)$ – полные поля; y определяет точку наблюдения; \mathcal{R} – область рассеяния, т.е. область локализации неоднородности скорости, которая полагается целиком лежащей в области пересечения взаимодействующих пучков. Уравнения (9) и (10) известны в квантовой теории рассеяния как уравнения Липпмана–Швингера, они справедливы всюду для любого y . Однако полное поле известно

лишь в области измерения и неизвестно в области рассеяния \mathcal{R} . Учитывая это, уравнение (9) можно записать более наглядно, разбив его на систему из двух уравнений:

$$p_1(y) = p_1^0(y) + \int_{\mathcal{R}} g_1(y, r) \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi(r) p_1(r) dr, \quad (11)$$

$$p_1(r) = p_1(r) + \int_{\mathcal{R}} g_1(r, r') \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi(r') p_1(r') dr',$$

где $y \notin \mathcal{R}$; $r, r' \in \mathcal{R}$. Если ввести оператор $\hat{g}_1(y, r)$, который переводит источники, возникающие в области \mathcal{R} , в рассеянное поле $p_1(y) - p_1^0(y)$ и оператор $\hat{g}_1(r, r')$ - вторичные источники, возникающие в области \mathcal{R} , в поле $p_1(r) - p_1^0(r)$, то систему (11) можно записать в альтернативной форме:

$$p_1(y) - p_1^0(y) = \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \hat{g}_1(y, r) \chi(r) p_1(r), \quad (12)$$

$$p_1(r) - p_1^0(r) = \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \hat{g}_1(r, r') \chi(r') p_1(r')$$

или

$$p_1 = p_1^0 + \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \hat{g}_1(y, r) \left[E - \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_1(r, r') \right]^{-1} \chi p_1^0. \quad (13)$$

Здесь E - единичный оператор на \mathcal{R} , для которого

$$E\psi(r') = \int_{\mathcal{R}} \delta(r - r') \psi(r') dr' = \psi(r).$$

Аналогично для (10) имеем

$$p_2 = p_2^0 + \frac{\omega_2^2}{c_0^2} \hat{g}_2(y, r) \left[E - \frac{\omega_2^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_2(r, r') \right]^{-1} \chi p_2^0. \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) связывают первичные облучающие поля с рассеянным измеряемым полем с помощью нелинейных по χ операторов, основанных на функциях Грина неоднородной среды,

$$\hat{G}_1 = \hat{g}_1(y, r) \left[E - \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_1(r, r') \right]^{-1} \chi, \quad (15)$$

$$\hat{G}_2 = \hat{g}_2(y, r) \left[E - \frac{\omega_2^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_2(r, r') \right]^{-1} \chi.$$

Форма записи (13) и (14) удобна для ведения записи, расчетов и оценки $\chi(r)$. Рассеянные на неоднородностях скорости звука волны взаимодействуют, образуя волны комбинационных частот, которые, в свою очередь, рассеиваются на неоднородностях скорости звука, что описывается

двумя последними уравнениями системы (8). Таким образом, для волны разностной частоты можно записать:

$$p_-^0 = \frac{\Omega^2}{\rho_0} \hat{g}_{-(y, r)} [\beta p_1 p_2^*], \quad (16)$$

где $\beta = \beta(r) = \varepsilon(r)/c^4(r)$.

С учетом (13) и (14), уравнение (16) имеет вид:

$$p_-^0 = \frac{\Omega^2}{\rho_0} \hat{g}_{-(y, r)} \left\{ [\beta p_1^0 p_2^{0*}] + \frac{\omega_1^2}{c_0^2} [\beta (\hat{G}_1 p_1^0) p_2^{0*}] + \right. \\ \left. + \frac{\omega_2^2}{c_0^2} [\beta p_1^0 (\hat{G}_2^* p_2^{0*})] + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{c_0^4} [\beta (\hat{G}_1 p_1^0) (\hat{G}_2^* p_2^{0*})] \right\}. \quad (17)$$

Наконец, полное рассеянное поле разностной частоты представляется в виде:

$$p_- = p_-^0 + \frac{\Omega^2}{c_0^2} \hat{g}_{-(y, r)} \left[E - \frac{\Omega^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_{-(r, r')} \right]^{-1} \chi p_-^0 \quad (18)$$

или

$$p_- = \mathcal{A}_1^- \hat{g}_{-(y, r)} [\beta p_1^0 p_2^{0*}] + \mathcal{A}_2^- \hat{g}_{-(y, r)} \times \\ \times [\beta (\hat{G}_1 p_1^0) p_2^{0*}] + \mathcal{A}_3^- \hat{g}_{-(y, r)} [\beta p_1^0 (\hat{G}_2^* p_2^{0*})] + \\ + \mathcal{A}_4^- \hat{g}_{-(y, r)} [\beta (\hat{G}_1 p_1^0) (\hat{G}_2^* p_2^{0*})] + \mathcal{A}_5^- \hat{G}_{-(y, r)} \times \\ \times \{ \hat{g}_{-(r, r')} [\beta p_1^0 p_2^{0*}] \} + \mathcal{A}_6^- \hat{G}_{-(y, r)} \times \\ \times \{ \hat{g}_{-(r, r')} [\beta (\hat{G}_1 p_1^0) p_2^{0*}] \} + \mathcal{A}_7^- \hat{G}_{-(y, r)} \times \\ \times \{ \hat{g}_{-(r, r')} [\beta p_1^0 (\hat{G}_2^* p_2^{0*})] \} + \mathcal{A}_8^- \hat{G}_{-(y, r)} \times \\ \times \{ \hat{g}_{-(r, r')} [\beta (\hat{G}_1 p_1^0) (\hat{G}_2^* p_2^{0*})] \}, \quad (19)$$

где

$$\hat{G}_{-(y, r)} = \hat{g}_{-(y, r)} \left[E - \frac{\Omega^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_{-(r, r')} \right]^{-1} \chi.$$

Аналогичные вычисления для амплитуды волны суммарной частоты приводят к следующему результату:

$$p_+ = \mathcal{A}_1^+ \hat{g}_{+(y, r)} [\beta p_1^0 p_2^0] + \mathcal{A}_2^+ \hat{g}_{+(y, r)} [\beta (\hat{G}_1 p_1^0) p_2^0] + \\ + \mathcal{A}_3^+ \hat{g}_{+(y, r)} [\beta p_1^0 (\hat{G}_2^0)] + \mathcal{A}_4^+ \hat{g}_{+(y, r)} \times \\ \times [\beta (\hat{G}_1 p_1^0) (\hat{G}_2^0)] + \mathcal{A}_5^+ \hat{G}_{+(y, r)} \times \\ \times \{ \hat{g}_{+(r, r')} [\beta p_1^0 p_2^0] \} + \mathcal{A}_6^+ \hat{G}_{+(y, r)} \times \\ \times \{ \hat{g}_{+(r, r')} [\beta (\hat{G}_1 p_1^0) p_2^0] \} + \mathcal{A}_7^+ \hat{G}_{+(y, r)} \times \\ \times \{ \hat{g}_{+(r, r')} [\beta p_1^0 (\hat{G}_2^0)] \} + \mathcal{A}_8^+ \hat{G}_{+(y, r)} \times \\ \times \{ \hat{g}_{+(r, r')} [\beta (\hat{G}_1 p_1^0) (\hat{G}_2^0)] \}. \quad (20)$$

Здесь

$$\hat{G}_{+(y,r)} = \hat{g}_{+(y,r)} \left[E - \frac{v^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_{+(r,r')} \right]^{-1} \chi$$

и $\mathcal{A}_i^{-(+)}$; $i = \overline{1, 8}$ – коэффициенты, имеющие вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^{-(+)} &= \frac{\Omega^2(v^2)}{\rho_0}; & \mathcal{A}_2^{-(+)} &= \frac{\Omega^2(v^2) \omega_1^2}{\rho_0 c_0^2}; \\ \mathcal{A}_3^{-(+)} &= \frac{\Omega^2(v^2) \omega_2^2}{\rho_0 c_0^2}; & \mathcal{A}_4^{-(+)} &= \frac{\Omega^2(v^2) \omega_1^2 \omega_2^2}{\rho_0 c_0^4}; \\ \mathcal{A}_5^{-(+)} &= \frac{\Omega^2(v^2) \Omega^2(v^2)}{\rho_0 c_0^2}; & \mathcal{A}_6^{-(+)} &= \frac{\Omega^2(v^2) \Omega^2(v^2) \omega_1^2}{\rho_0 c_0^4}; \\ \mathcal{A}_7^{-(+)} &= \frac{\Omega^2(v^2) \Omega^2(v^2) \omega_2^2}{\rho_0 c_0^4}; \\ \mathcal{A}_8^{-(+)} &= \frac{\Omega^2(v^2) \Omega^2(v^2) \omega_1^2 \omega_2^2}{\rho_0 c_0^2 c_0^4}. \end{aligned}$$

Выражения в скобках относятся к (20).

Рассмотрим первые слагаемые в суммах (19) и (20). В дальнем поле, где выполняются приближенно равенства

$$\begin{aligned} g_-(y, r) &= g_-(y) \exp(-ik_{s-}r), \quad k_{s-} = \frac{\Omega}{c_0} \frac{y}{|y|}; \\ g_+(y, r) &= g_+(y) \exp(-ik_{s+}r), \quad k_{s+} = \frac{v}{c_0} \frac{y}{|y|}, \end{aligned}$$

имеем соответственно:

$$\begin{aligned} p_-(y) &= \frac{\Omega^2}{\rho_0} p_{01} p_{02}^* g_-(y) \tilde{\beta}(\mathbf{K}_-), \\ \mathbf{K}_- &= \mathbf{k}_{s-} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2; \end{aligned} \tag{21}$$

и

$$\begin{aligned} p_+(y) &= \frac{v^2}{\rho_0} p_{01} p_{02} g_+(y) \tilde{\beta}(\mathbf{K}_+), \\ \mathbf{K}_+ &= \mathbf{k}_{s+} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\tilde{\beta}(\mathbf{K})$ – Фурье-образ функции $\beta(\mathbf{r})$; $p_1^0 = p_{01} \exp(ik_1 r)$, $p_2^0(\mathbf{r}) = p_{02} \exp(ik_2 r)$.

Характерно, что задача нелинейного рассеяния волн в среде с рефракционными неоднородностями в рассмотренной постановке является обратимой. Обратимость в данном случае означает, что процесс нелинейной генерации волн разностной частоты $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, характеризуемый волновыми векторами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_{s-}$, и процесс нелинейного взаимодействия волн с волновыми векторами $-\mathbf{k}_2$ и $-\mathbf{k}_{s-}$ с генерацией волны суммарной частоты ω_1 в направлении, задаваемом волновым век-

тором $-\mathbf{k}_1$, как следует из выражений (21) - (22), в пространстве волновых векторов \mathbf{K} описываются одними и теми же функциональными соотношениями. Выражения для p_- и p_+ при этом с точностью до постоянного множителя совпадают.

Если $c(\mathbf{r}) = c_0$, то для амплитуд волн, рассеянных на разностной и суммарной частотах, имеем соответственно:

$$p_-(y) = \frac{\Omega^2}{\rho_0 c_0} p_{01} p_{02}^* g_-(y) \tilde{\epsilon}(\mathbf{K}_-), \tag{23}$$

$$p_+(y) = \frac{v^2}{\rho_0 c_0} p_{01} p_{02} g_+(y) \tilde{\epsilon}(\mathbf{K}_+). \tag{24}$$

Уравнения (23) и (24) являются основными для анализа $\tilde{\epsilon}(\mathbf{K})$. Практическая реализация различных схем сбора экспериментальных данных для решения обратной задачи нелинейного рассеяния на основе выражений (23) и (24) приводит к существенной избыточности данных. Рассмотрим сначала случай фиксированных частот ω_1 и ω_2 , но произвольных ориентаций векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 ; в каждом отдельном измерении $\tilde{\epsilon}(\mathbf{K})$ может быть определено для значений \mathbf{K} , лежащих на поверхности сферы радиуса \mathbf{k}_{s-} для разностной частоты и \mathbf{k}_{s+} для суммарной частоты, центры которых задаются соответственно векторами $-(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ и $-(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ (рис. 1 и рис. 2, где для простоты изображено двумерное сечение). При коллинеарном взаимодействии доступными для измерения являются значения \mathbf{K} внутри сферы радиуса $2\mathbf{k}_{s-}$ при работе на разностной частоте, а при работе на суммарной частоте доступными для измерения являются значения \mathbf{K} внутри сферы радиуса $2\mathbf{k}_{s+}$. Выполнение соотношения $\Omega \ll \omega_1, \omega_2$ означает при этом, что работа на разностной частоте обеспечивает измерение низкочастотной части пространственного спектра $\epsilon(\mathbf{r})$. В предельном случае использования всех возможных направлений \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 можно восстановить $\tilde{\epsilon}(\mathbf{K})$ для всех \mathbf{K} , лежащих внутри сферы радиуса $2\mathbf{k}_1$ при работе на разностной частоте; и внутри сферы радиуса $2\mathbf{k}_{s+}$ при работе на суммарной частоте. Очевидно, что использование всех направлений облучения приводит к избыточности информации. Использование же согласованным образом выбранного множества направлений облучения обеспечивает определенное $\tilde{\epsilon}(\mathbf{K})$ оптимальным образом. Для дальнейшего анализа зададим вектора $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_{s-}$ и \mathbf{k}_{s+} следующими координатами:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \{k_1 \cos \alpha; k_1 \sin \alpha; 0\}; & \mathbf{k}_2 &= \{k_2 \cos \beta; k_2 \sin \beta; 0\}; \\ \mathbf{k}_{s-} &= \{k_{s-} \cos \varphi; k_{s-} \sin \varphi; 0\}; \\ \mathbf{k}_{s+} &= \{k_{s+} \cos \varphi; k_{s+} \sin \varphi; 0\}, \end{aligned}$$

т.е. будем рассматривать двумерную задачу. Для однозначного восстановления $\epsilon(\mathbf{r})$ можно предло-

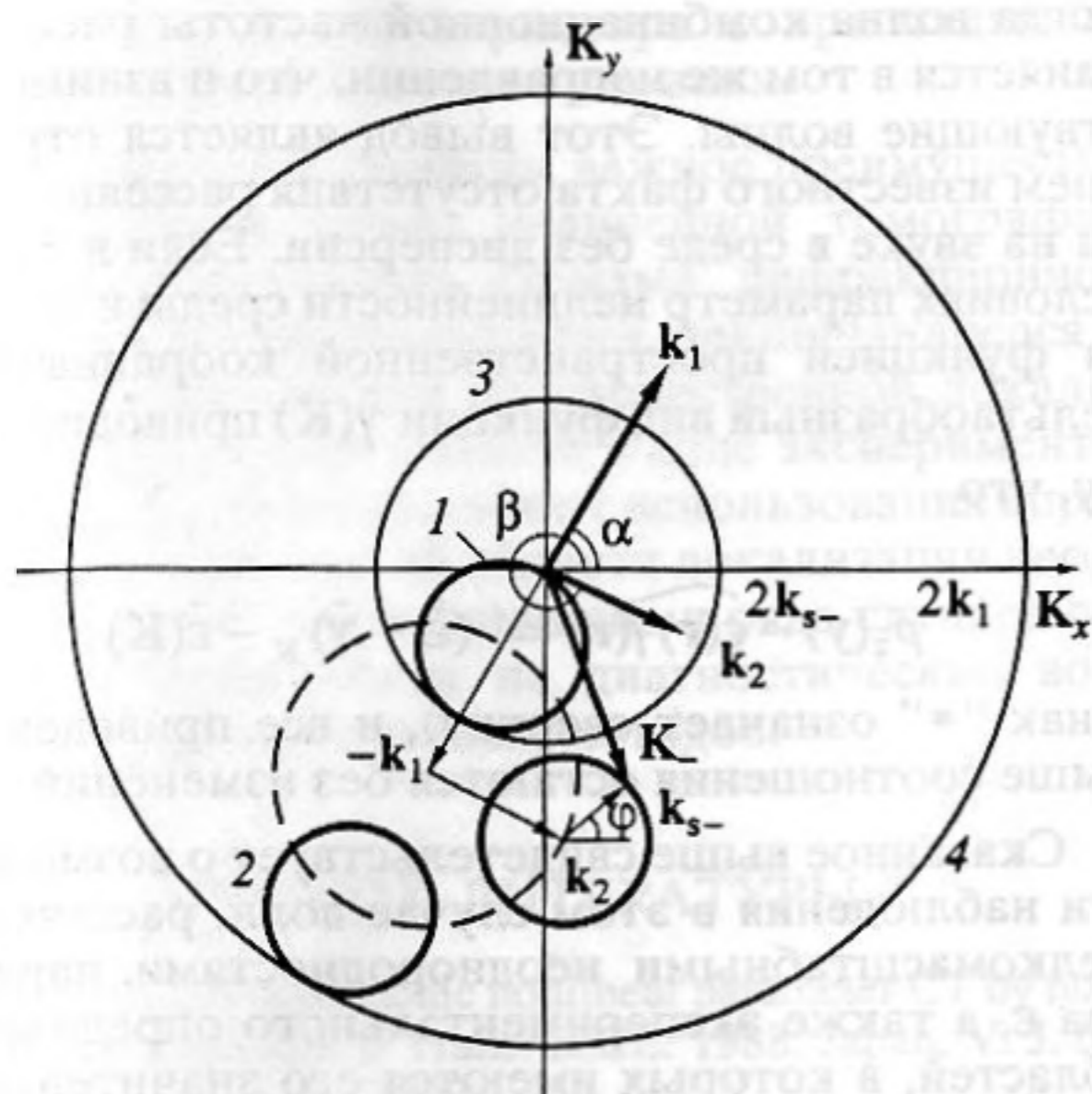


Рис. 1. Диаграмма волновых векторов процесса нелинейного рассеяния на разностной частоте. Толстые линии – множество векторов K_- , для которых измеряется Фурье-образ $\tilde{\epsilon}(K_-)$ для различных направлений k_1 и k_2 : $1 - \beta = \alpha$, $2 - \beta = \alpha + \pi$. Тонкие линии – границы информационных областей: $3 - \beta = \alpha$, $4 -$ использование всех возможных направлений k_1 и k_2 .

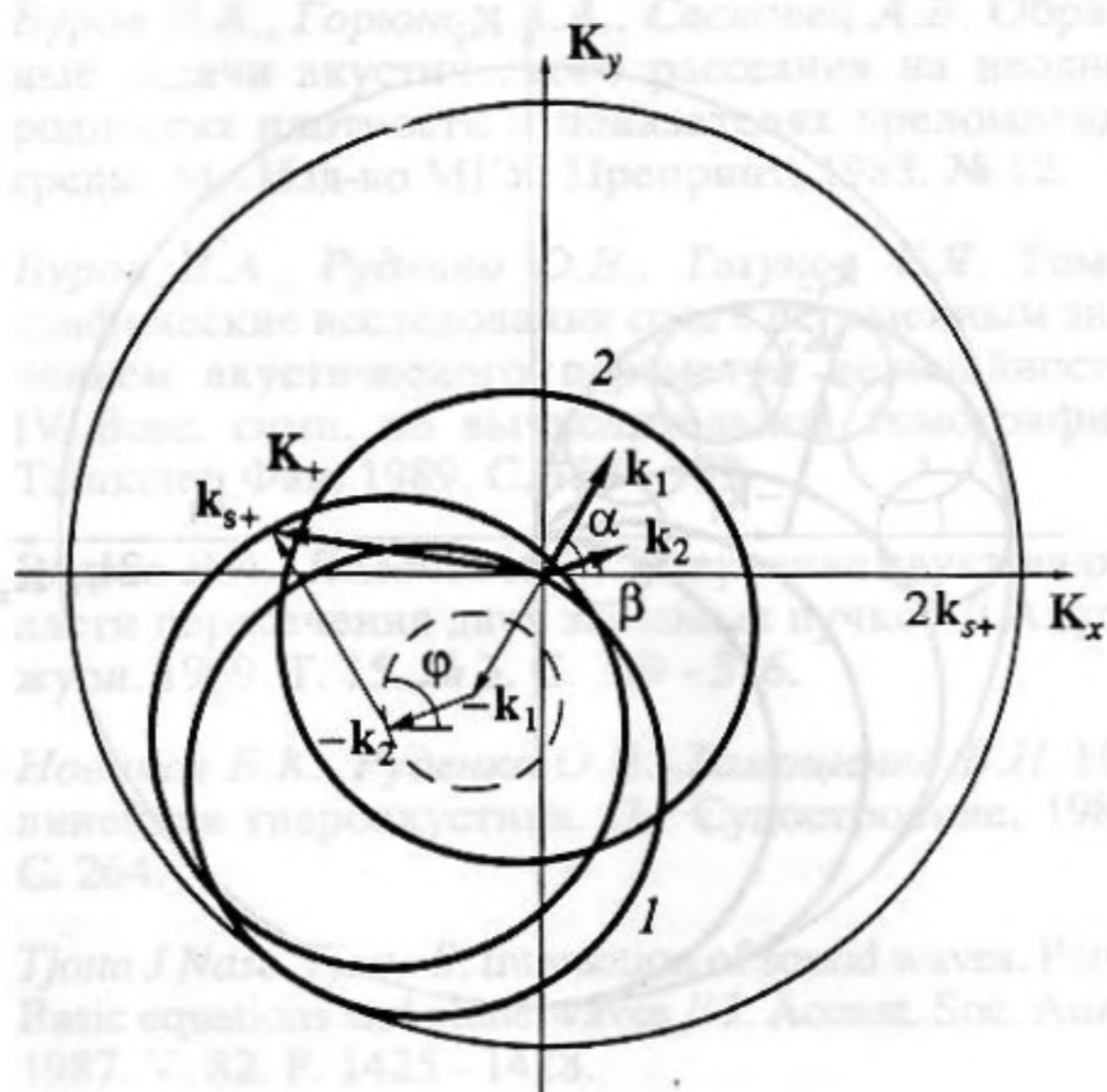


Рис. 2. Аналогичная диаграмма для рассеяния на суммарной частоте. Толстые линии – множество векторов K_+ , для которых измеряется Фурье-образ $\tilde{\epsilon}(K_+)$ для различных направлений k_1 и k_2 и фиксированных частот ω_1 и ω_2 : $1 - \beta = \alpha$, $2 - \beta = \alpha + \pi$. Сплошная тонкая линия – граница информационной области для $\beta = \alpha$ и всех возможных направлений k_1 и k_2 .

жить следующую схему организации эксперимента на разностной частоте. Зафиксировать α , а углы β и φ выбрать так, что $\beta = \varphi$, при этом β изменять от нуля до π , тогда точки измерения будут находиться на полуокружности радиуса k_1 , центр которой определяется вектором k_1 . При изменении α от нуля до 2π эта полуокружность “заметает” все точки круга радиуса $2k_1$ (рис. 3). Организация эксперимента для суммарной частоты аналогична. Точки измерения будут находиться на полуокружности радиуса k_{s+} , центр которой определяется вектором $-k_{s+}$ для $\alpha = \beta$ и изменении φ от нуля до π . При изменении α от нуля до 2π эта полуокружность “заметает” все точки круга $2k_{s+}$. В случае, если направления облучения и приема фиксируются, т.е. фиксируются углы α , β и φ , а частота облучения ω_2 варьируется от нуля до ω_1 как для разностной, так и для суммарной частот, доступными для измерения являются точки, лежащие на прямой (рис. 4) вида:

$$K_y = AK_x + B, \quad (25)$$

где

$$A = \frac{\sin \varphi - \sin \beta}{\cos \varphi - \cos \beta},$$

$$B = k_1 \left[(\sin \varphi - \sin \alpha) - (\sin \varphi - \sin \beta) \frac{\cos \varphi - \cos \alpha}{\sin \varphi - \sin \beta} \right].$$

Эта прямая проходит через начало координат, если $B = 0$, т.е. если $\beta = \alpha$ или $\varphi = \alpha$. Причем, когда φ фиксировано, $\beta = \alpha$ и α изменяется от нуля до 2π , информация снимается в круге радиуса $\sqrt{2}k_1(1 - \cos(\varphi - \alpha))^{1/2}$, в предельном случае $\varphi = \alpha + \pi$ – в круге радиуса $2k_1$ (рис. 5). В другом случае, когда β – фиксировано и α изменяется от нуля до 2π , информация снимается в круге радиуса $\sqrt{2}k_1(1 - \cos(\beta - \alpha))^{1/2}$, в предельном случае $\beta = \alpha + \pi$ – в круге радиуса $2k_1$.

Поскольку во всех полученных выше соотношениях использовалось представление взаимодействующих возмущений в виде плоских волн, необходимо особо остановиться на учете конечной апертуры каждого из взаимодействующих пучков. Такой учет может быть произведен путем замены функции $\epsilon(r)$ на произведение двух функций $\gamma(r)\epsilon(r)$, где $\gamma(r)$ – функция, задающая область пересечения взаимодействующих пучков:

$$\gamma(r) = \begin{cases} 1 & \text{– внутри области пересечения,} \\ 0 & \text{– вне области пересечения.} \end{cases}$$

В частном случае $\epsilon(r) = \epsilon_0$ амплитуда рассеянной волны на комбинационной частоте рассматривается как функция, заданная в пространстве волновых векторов K , с точностью до постоянного множителя представляет собой Фурье-образ функции $\gamma(r)$, $p_{\mp}(y) \sim \epsilon_0 \tilde{\gamma}(K)$. При этом, в случае, когда характерные размеры области пересечения

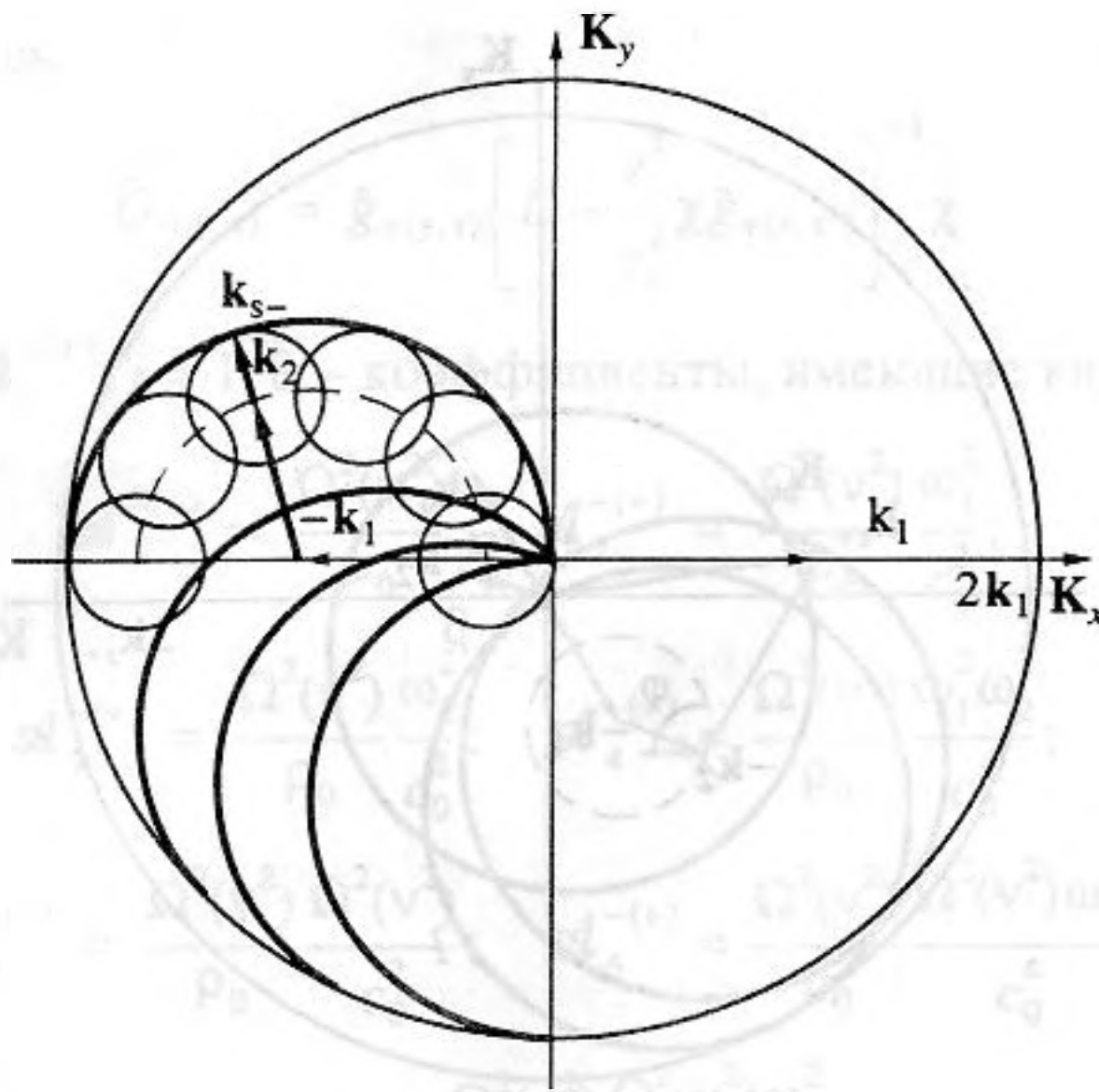


Рис. 3. Волновая схема организации минимального информативного эксперимента на разностной частоте. Толстыми линиями обозначены полуокружности, на которых находятся точки измерения.

взаимодействующих пучков много больше длины волны каждой из включенных в рассмотрение акустических волн, значения функции $\tilde{\gamma}(\mathbf{K})$ практически равны нулю везде, за исключением малой окрестности точки $\mathbf{K} = 0$, т.е. при $k_s = k_1 \mp k_2$. Последнее соотношение может выполняться лишь в случае коллинеарного взаимодействия,

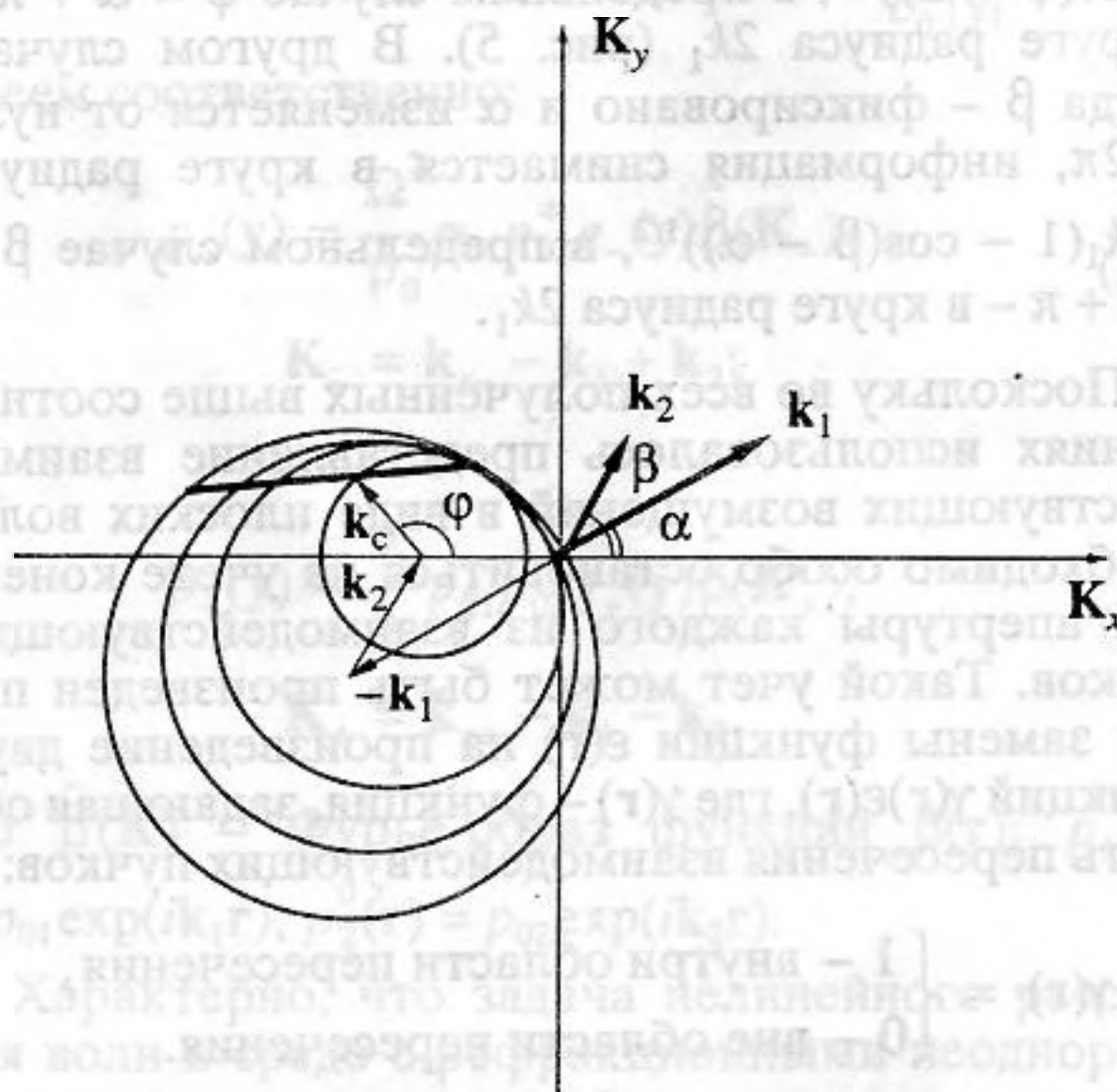


Рис. 4. Волновая схема эксперимента для фиксированных направлений k_1 и k_2 и направления наблюдения и частоты ω_1 , при варьировании частоты ω_2 от 0 до ω_1 . Толстой линией обозначено множество векторов \mathbf{K} , для которых измеряется Фурье-образ $\tilde{\epsilon}(\mathbf{K})$.

когда волна комбинационной частоты распространяется в том же направлении, что и взаимодействующие волны. Этот вывод является отражением известного факта отсутствия рассеяния звука на звуке в среде без дисперсии. Если в тех же условиях параметр нелинейности среды ϵ является функцией пространственной координаты \mathbf{r} , дельтаобразный вид функции $\tilde{\gamma}(\mathbf{K})$ приводит к тому, что

$$p_{\mp}(\mathbf{y}) - \tilde{\epsilon}(\mathbf{r})\tilde{\gamma}(\mathbf{r}) = (\tilde{\epsilon} * \tilde{\gamma})_{\mathbf{K}} - \tilde{\epsilon}(\mathbf{K})$$

(знак “*” означает свертку), и все приведенные выше соотношения остаются без изменений.

Сказанное выше свидетельствует о возможности наблюдения в этом случае волн, рассеянных мелкомасштабными неоднородностями параметра ϵ , а также экспериментального определения областей, в которых имеются его значительные градиенты.

В общем случае Фурье-образ $\tilde{\epsilon}(\mathbf{K})$ в выражениях (23) - (24) должен быть заменен на свертку $(\tilde{\epsilon} * \tilde{\gamma})_{\mathbf{K}}$. Некоторую сложность для расчетов представляет тот факт, что $\tilde{\gamma}(\mathbf{r})$ зависит как от апертуры, так и направления распространения каждой из взаимодействующих волн. Однако, в большинстве случаев $\tilde{\gamma}(\mathbf{r})$ может считаться заданной, что позволяет внести коррективы в расчет. В эксперименте наиболее надежным способом корректировки данных является измерение рассеянного поля в некоторой модельной среде с

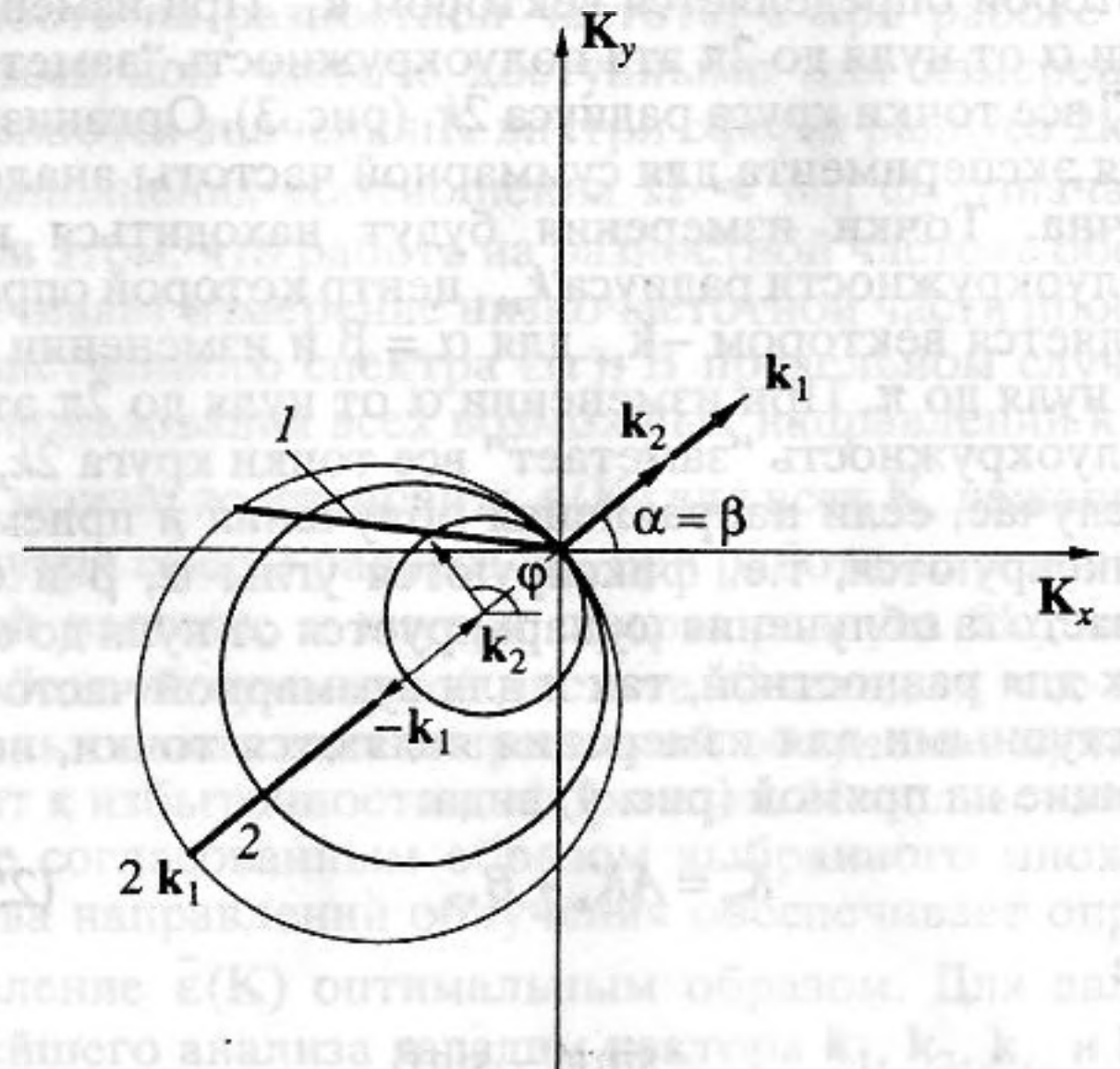


Рис. 5. Волновая схема эксперимента для фиксированной частоты ω_1 и варьирования частоты ω_2 от 0 до ω_1 : 1 - $\beta = \alpha$, $\phi \in [0; 2\pi)$, $\phi \neq \alpha + \pi$; 2 - $\beta = \alpha$; $\phi = \alpha + \pi$. Толстыми линиями обозначено множество векторов \mathbf{K} , для которых измеряется Фурье-образ $\tilde{\epsilon}(\mathbf{K})$.

однородным полем параметра ϵ при заданной апертуре взаимодействующих волн.

В заключение отметим важное преимущество предложенной схемы нелинейной томографии перед классическими схемами дифракционной вычислительной томографии, заключающееся в возможности строгой пространственной локализации исследуемой области в ходе эксперимента. Это позволяет отказаться от использования априорной информации об области локализации неоднородности, накладывающего в ряде случаев серьезные ограничения на диагностические возможности разработанных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nakagava Y. Ultrasonic nonlinear parameter CT by nonlinear interaction // Trans. IEECE. 1988. Japan. V. J. 69. D. № 8. P. 1215 - 1222.
2. Nakagava Y., Aou W., Cai A. et al. Imaging the acoustic nonlinearity parameter with sound waves // Trans. IEECE. 1988. V. E. 71. № 8. P. 799 - 808.
3. Буров В.А., Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи акустического рассеяния на неоднородностях плотности и показателях преломления среды. М.: Изд-во МГУ. Препринт, 1983. № 12.
4. Буров В.А., Руденко О.В., Тагунов Е.Я. Томографические исследования сред с переменным значением акустического параметра нелинейности. IV Всес. симп. по вычислительной томографии. Ташкент: Фан, 1989. С. 158 - 159.
5. Зверев В.А., Калачев А.И. Излучение звука из области пересечения двух звуковых пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 3. С. 369 - 376.
6. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.Н. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. С. 264.
7. Tjotta J Nase, Tjotta S. Interaction of sound waves. Part I. Basic equations and plane waves // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82. P. 1425 - 1428.
8. Буров В.А., Горюнов А.А., Сасковец А.В., Тихонова Т.А. Обратные задачи рассеяния в акустике // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 433 - 449.

Reconstruction of the Spatial Distribution of the Nonlinearity Parameter and Sound Velocity in Acoustic Nonlinear Tomography

V. A. Burov, I. E. Gurinovich, O. V. Rudenko, and E. Ya. Tagunov

The full inverse problem of nonlinear scattering with unknown distributions of phase velocity, medium density, and nonlinear parameter is considered for a medium with uniform linear parameters. Simple relations connecting the Fourier transform of the nonlinear parameter distribution with the nonlinear scattering amplitudes of sum and difference frequencies are derived. The redundancy of nonlinear scattering data allows the use of various reduced schemes of experimental data reception.