АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1995, том 41, № 1, с. 164 - 165

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.2

ВЛИЯНИЕ ПОДВИЖНОСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ГРАНИЦЫ И НЕЛИНЕЙНОСТИ СРЕДЫ НА ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ, ВЫЗВАННОЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ПЛОСКОГО ПОРШНЯ

© 1995 г. В. А. Поздеев

Институт импульсных процессов и технологий АН Украины
327018 Николаев, пр. Октябрьский, 43а

Поступила в редакцию 18.05.93 г.
После окончательной доработки 17.08.94 г.

В линейной акустике при постановке задачи излучения граничное условие обычно задается на невозмущенном положении границы [1]. В работах [2 - 4] учтена подвижность границы для линейного волнового уравнения. Нелинейность среды до величин второго порядка и подвижность границы учтены в работах [5, 6]. Решение задачи с учетом подвижности границы в рамках нелинейного волнового уравнения Римана в параметрическом виде приведено в [7], где отмечено, что получение решения в явном виде представляется сложным. Точное решение в названной выше постановке для частного случая равноускоренного движения плоского поршня получено в [8]. В настоящей работе рассматривается вопрос о сравнительном вкладе в решение нелинейности от учета подвижности границы и от нелинейных свойств самой среды.

Рассмотрим идеальную сжимаемую баротропную жидкую среду, движение которой описывается волновым уравнением Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\left(c_0+\frac{n+1}{2}v\right)^{-1}\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

где x – координата, t – время, A, n – постоянные в уравнении состояния среды, v – массовая скорость среды, c_0 – скорость звука в невозмущенной среде. Нестационарное волновое движение среды из состояния покоя вызывается плоским поршнем, движущимся по закону $H_{п}(t)$. Граничное условие непроницаемости поршня задается на подвижной границе в виде

$$v|_{x = H_{п}(t)} = v_{п}(t), \qquad (2)$$

где $v_{п}$ – массовая скорость среды на границе контакта, причем $v_{п} \le \frac{dH_{п}}{dt}$. Начальные условия принимаем нулевыми: $v|_{t=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$v(x, t) = F(t^0), \qquad (3)$$

где F – неизвестная функция волнового аргумента $t^0 = t + \frac{n+1}{2}\frac{tv}{c_0} - \frac{x}{c_0}$. Удовлетворяя решение (3) граничному условию (2), получаем соотношение

$$v_{п} = F(t + f_1(t) + f_2(t)), \qquad (4)$$

где $f_1(t) = \frac{n+1}{2}\frac{tv_{п}(t)}{c_0}$, $f_2(t) = -\frac{H_{п}(t)}{c_0}$. Заметим, что функция f_1 учитывает влияние нелинейных свойств среды, а функция f_2 – влияние нелинейности, обусловленной подвижностью границы. Для качественного анализа вкладов в решение нелинейностей обоих видов достаточно выполнить сравнение между собой функций f_1 и f_2. Как видно из представления (4), при выполнении условия вида $|f_1(t)/f_2(t)| > 1$ больший вклад в решение вносит нелинейность среды, а при выполнении условия $|f_1(t)/f_2(t)| < 1$ больший вклад дает учет подвижности границы. Для конкретности рассмотрим достаточно общий закон движения поршня вида

$$H_{п}(t) = H_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha(t)};$$

$$v_{п}(t) = H_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha(t)}\left(\frac{\alpha}{t} + \frac{d\alpha}{dt}\ln\frac{t}{t_0}\right), \qquad (5)$$

где полагаем, что $\alpha \ge 1$. Тогда получаем, что

$$\left|\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\right| = \frac{n+1}{2}\left|\alpha + t\frac{d\alpha}{dt}\ln\frac{t}{t_0}\right|. \qquad (6)$$

В соответствии с вышесказанным анализ величины (6) позволяет оценить сравнительный вклад в решение задачи обоих видов нелинейности.

Для получения количественной оценки названных вкладов получим точные аналитические решения задачи излучения для закона движения поршня в виде $H_{п}(t) = v_0 t + a_0 t^2/2$, $v_{п}(t) = v_0 + a_0 t$ и для следующих вариантов математической постановки задачи: линейное волновое уравнение, неподвижная граница ($v|_{x=0} = v_{п}(t)$); линейное волновое уравнение, подвижная граница ($v|_{x=H_{п}} = v_{п}(t)$); нелинейное уравнение Римана, неподвижная граница ($v|_{x=0} = v_{п}(t)$); нелинейное уравнение Римана, подвижная граница ($v|_{x=H_{п}} = v_{п}(t)$).

Решение линейной задачи тривиально и имеет вид

$$\bar{v} = M_0 + \frac{a_0}{c_0}\left(t - \frac{x}{c_0}\right), \quad \bar{v} = \frac{v}{c_0}, \quad M_0 = \frac{v_0}{c_0}. \quad (7)$$

Далее воспользуемся методом нелинейного преобразования времени [4], с помощью которого получим: решение задачи для линейного волнового уравнения с заданием граничного условия на подвижной границе

$$\bar{v} = M_0 + (1 - M_0)\left[1 - \left(1 - \frac{2a_0\left(t - \frac{x}{c_0}\right)}{c_0(1 - M_0)}\right)^{1/2}\right]; \quad (8)$$

решение для уравнения Римана с граничным условием на фиксированном положении границы

$$\bar{v} = M_0 - \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{n-1}{2}M_0 - \frac{n+1}{2}\frac{a_0 t}{c_0}\right)\times \quad (9)$$
$$\times\left\{1 - \left[1 + \frac{2a_0(n+1)\left(t - \frac{x}{c_0} + (n+1)\frac{M_0 t}{2}\right)}{c_0\left(1 + \frac{n-1}{2}M_0 - \frac{n+1}{2}\frac{a_0 t}{c_0}\right)^2}\right]^{1/2}\right\};$$

решение для уравнения Римана с граничным условием на подвижной границе

$$\bar{v} = M_0 - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-1}{2}M_0 - \frac{n+1}{2}\frac{a_0 t}{c_0}\right)\times$$
$$\times\left\{1 - \left[1 - \frac{2a_0 n\left(t - \frac{x}{c_0} + (n+1)\frac{M_0 t}{2}\right)}{c_0\left(1 + \frac{n-1}{2}M_0 - \frac{n+1}{2}\frac{a_0 t}{c_0}\right)^2}\right]^{1/2}\right\}. \quad (10)$$

Отметим, что при $M_0 = 0$ решение (10) переходит в решение, полученное в [8]. По известному волновому полю массовой скорости $v(x, t)$ можно найти волновое поле давления в виде

$$p - p_0 = A\left[\left(1 + \frac{n-1}{2}\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1\right],$$

где p_0 – давление в невозмущенной среде.

Из анализа формул (5) - (10) можно сделать вывод, что корректность математической постановки задачи излучения плоским поршнем в смысле выбора линейного или нелинейного волновых уравнений и способа задания граничного условия на подвижной или фиксированной границе определяется как фундаментальными свойствами среды (величиной параметра n), так и видом функции, определяющей закон движения поршня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 336 с.
2. *Гринберг Г. А.* Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и подобных им явлений при наличии движущихся границ и о некоторых иных приложениях // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31. С. 193 - 203.
3. *Крутиков В.С.* Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами // Прикл. математика и механика. 1991. № 6. С. 1058 - 1062.
4. *Поздеев В.А.* Метод нелинейного преобразования времени в краевых задачах теории потенциала с подвижными границами для линейного волнового уравнения // Прикл. математика и механика. 1991. № 6. С. 1055 - 1058.
5. *Андреев В.А.* О некоторых величинах второго порядка в акустике // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С.3 - 11.
6. *Островский Л.А.* К теории волн в нестационарных сжимаемых средах // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27. № 5. С. 924 - 929.
7. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1975. 288 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.