АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1995, том 41, № 3, с. 415 - 420

УДК 534.21

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ ВОЛН В ГАЗЕ: ПЕРЕХОД ОТ КИНЕТИЧЕСКОГО К ГАЗОДИНАМИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ

© 1995 г. О. Ю. Динариев

Институт физики земли им. О.Ю. Шмидта
123810 Москва, Б. Грузинская, 10

Поступила в редакцию 17.01.94 г.

В работе осуществлен вывод уравнений для слабых волн в газе из линеаризованного кинетического уравнения. Не делается никаких априорных предположений о малости диссипативных членов, пространственных градиентов или интеграла взаимодействия. Найденные уравнения на макроскопические гидродинамические величины являются точными в том смысле, что по произвольному решению этих уравнений можно в принципе восстановить точное решение линеаризованного кинетического уравнения. Материальные соотношения модели оказываются нелокальными по времени и пространству. После вывода определяющих уравнений в приближении малости диссипативных членов найдены выражения для скорости волны и коэффициента затухания, учитывающие влияние релаксации и нелокальности.

Реальные газы удовлетворяют соотношениям модели Навье–Стокса–Фурье вязкого теплопроводного газа с постоянными кинетическими коэффициентами, только когда характерные времена внешних воздействий много больше времени релаксации среды τ_{rel} к локальному термодинамическому равновесию и когда длины волн много больше радиуса корреляции r_{cor} тепловых флуктуаций в системе. Для достаточно высоких частот и достаточно коротких волн необходимо учитывать эффекты наследственности и нелокальности. Это обосновано теоретически в неравновесной статистической термодинамике [1 - 3]. Эффекты релаксации и нелокальности особенно существенны, когда газ находится вблизи критической точки, так как в этом случае τ_{rel} и r_{cor} могут быть сколь угодно велики [4].

В настоящей работе методом, отличным от методов Чепмена–Энскога, Грэда и Гильберта, осуществлен вывод уравнений для слабых волн в газе из линеаризованного кинетического уравнения. Не делается никаких априорных предположений о величине диссипативных членов, пространственных градиентов или интеграла взаимодействия. Материальные соотношения модели оказываются нелокальными по времени и пространству. Ранее такая модель чисто феноменологически рассматривалась в работе [5], где были найдены ограничения на соответствующие ядра, следующие из термодинамики и обратимости во времени на микроуровне (аналог соотношений Онзагера). Теперь эти ограничения получены, как прямое следствие кинетического уравнения. После вывода определяющих уравнений в приближении малости диссипативных членов найдены выражения для скорости волны и коэффициента затухания, учитывающие влияние релаксации и нелокальности.

Связь кинетического и гидродинамического описания, в том числе с учетом эффектов нелокальности, исследовалась ранее в ряде работ [6 - 14]. В работах [15 - 17] было предложено модифицировать интеграл столкновения таким образом, чтобы учесть гидродинамические эффекты и избежать разложения по числу Кнудсена. В настоящей работе использован метод получения гидродинамических уравнений из кинетического уравнения с источниками, не зависящий от конкретного вида интеграла столкновения. Найденные уравнения на макроскопические гидродинамические величины являются точными в том смысле, что по произвольному решению этих уравнений можно в принципе восстановить точное решение линеаризованного кинетического уравнения.

В работе используется система единиц измерения, в которой постоянная Планка $\hbar$ и постоянная Больцмана k равны единице. Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, соответствуя координатам некоторой инерциальной системы отсчета x^α. Римские индексы i, j, k пробегают значения 1, 2, 3, соответствуя пространственным координатам x^i. Римские индексы A, B пробегают значения 0, 1, 2, 3, 4. По повторяющимся индексам производится суммирование, если не оговорено противное.

Рассмотрим газ бесструктурных частиц с массой m, состояние которого описывается функцией распределения $f = f(x^\alpha, v^i)$. Функция распределения удовлетворяет динамическому уравнению

$$\partial_0 f + v^i \partial_i f = \mathrm{St}\,[f]\,. \tag{1}$$

Здесь $\mathrm{St}[f]$ – в общем случае нелинейный оператор в пространстве функций от скоростей v^i, который мы не будем конкретизировать. Этот оператор удовлетворяет ряду условий [18 - 21]:

$$\int \mathrm{St}\,[f]\,(x^\alpha, v^j)\,dv^j = 0 \tag{2}$$

(сохранение числа частиц при столкновениях),

$$\int v^i \mathrm{St}\,[f]\,(x^\alpha, v^j)\,dv^k = 0 \tag{3}$$

(сохранение импульса частиц при столкновениях),

$$\int v^i v^j \mathrm{St}\,[f]\,(x^\alpha, v^j)\,dv^k = 0 \tag{4}$$

(сохранение кинетической энергии частиц при столкновениях),

$$\mathrm{St}[f_e] = 0, \tag{5}$$

где f_e – равновесное распределение

$$f_e(v^j) = (2\pi)^{-3} \times \\ \times \exp\left(\left(\mu - \frac{m}{2}(v^j - U^j)(v^j - U^j)\right)/T\right). \tag{6}$$

По функции распределения можно вычислить плотность и вектор потока массы

$$\rho(x^\beta) = m\int f(x^\beta, v^j)\,dv^k, \tag{7}$$

$$j^i(x^\beta) = m\int v^i f(x^\beta, v^j)\,dv^k, \tag{8}$$

тензор потока импульса

$$\pi^{ij}(x^\beta) = m\int v^i v^j f(x^\beta v^j)\,dv^k, \tag{9}$$

а также плотность и поток энергии

$$E = \frac{m}{2}\int v^i v^i f(x^\beta, v^j)\,dv^k, \tag{10}$$

$$Q^i = \frac{m}{2}\int v^i v^j v^j f(x^\beta, v^j)\,dv^k. \tag{11}$$

Согласно (1) - (4) имеют место законы сохранения

$$\begin{aligned} &\partial_0 \rho + \partial_i j^i = 0, \\ &\partial_0 j^i + \partial_j \pi^{ij} = 0, \\ &\partial_0 E + \partial_i Q^i = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим теперь динамику линейных возмущений равновесного распределения

$$f_0(v^j) = (2\pi)^{-3} \exp\left(\left(\overset{0}{\mu} - \frac{m}{2} v^j v^j\right)/\overset{0}{T}\right),$$

причем предположим, что возмущения вызваны слабыми внешними силами и источниками частиц и энергии.

Будем использовать обычное представление функции распределения при линеаризации [18 - 21]: $f = f_0(1 + \varphi)$.

С учетом источников уравнение (1) преобразуется к виду

$$\partial_0 \varphi + v^i \partial_i \varphi - L\varphi = S, \tag{13}$$

где $S = S(x^\alpha, v^i)$ – функция источников, L – линейный оператор, определяемый через производную от интеграла столкновений:

$L\varphi = f_0^{-1}\,\mathrm{DSt}[f_0](f_0\varphi)$. Функции φ, рассматриваемые с точки зрения зависимости от аргументов v^i, принадлежат гильбертову пространству H_m со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int f_0 \varphi_1^* \varphi_2\,dv^j.$$

Определим в пространстве H_m операцию I обращения пространственных компонент импульса: $(I\varphi)(v^i) = \varphi(-v^i)$.

Без конкретизации вида интеграла столкновения можно утверждать, что оператор L удовлетворяет ряду условий [18 - 21]:

$$L^+ = ILI \tag{14}$$

(следствие обратимости на микроуровне),

$$(L\varphi)^* = L\varphi^* \tag{15}$$

(действительность),

$$L^+ + L \le 0 \tag{16}$$

(диссипативность).

В широком классе случаев оператор L коммутирует с оператором I, и потому вместо (14) справедливо более сильное условие: $L^+ = L$.

Кроме того, из (2) - (4), (9) или при дифференцировании (5) по свободным параметрам получаются равенства

$$Le^A = 0, \tag{17}$$

где $e^4 = 1$, $e^i = v^i$, $e^0 = (v^i v^i)/2$.

Для произвольной функции g координат пространства–времени будем обозначать g_F преобразование Фурье

$$g_F(k_\alpha) = \int \exp(-ik_\alpha x^\alpha) g(x^\alpha)\,dx^\alpha.$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (13), получаем линейное операторное уравнение

$$G\varphi_F = S_F,$$
$$G = ik_0 + ik_i v^i - L. \tag{18}$$

Для дальнейшего удобно ввести ряд обозначений. Пусть H_h – подпространство гильбертова пространства H_m, натянутое на семейство векторов e^A, H_a – ортогональное дополнение к $H_h : H_m = H_h \oplus H_a$. Обозначим P_h; $H_m \longrightarrow H_h$, $P_a : H_m \longrightarrow H_a$ – соответствующие проекторы. $I_h : H_h \longrightarrow H_m$, $I_a : H_a \longrightarrow H_m$ – соответствующие вложения. В пространстве H_h определен метрический тензор $\eta^{AB} = (e^A, e^B)$, с помощью которого можно поднимать и опускать прописные латинские индексы. В частности, определено семейство векторов e_A, для которых $(e_A, e^B) = \delta_A^B$. Отметим, что согласно (9), (12) $LH_h = 0$, $LH_a \subseteq H_a$.

Предположим, что источниковый член в [8] как функция скоростей принимает значения в пространстве H_h. С точки зрения гидродинамики такой член создает источники частиц $m(e^4, S) = \nu$, энергии $m(e^0, S) = F^0$ и внешних сил $m(e^i, S) = F^i$. Уравнения гидродинамики (7) превращаются в уравнения с источниками

$$\partial_0\rho + \partial_i j^i = \nu,$$
$$\partial_0 j^i + \partial_j \pi^{ij} = F^i, \tag{19}$$
$$\partial_0 E + \partial_i Q^i = F^0.$$

Легко найти формальное решение уравнения (18). Действительно, введем обозначения

$$h = P_h\varphi = e^A(e_A, \varphi), \quad a = P_a\varphi = \varphi - h, \tag{20}$$
$$G_{hh} = P_h G I_h, \quad G_{ah} = P_a G I_h,$$
$$G_{ha} = P_h G I_a, \quad G_{aa} = P_a G I_a.$$

"Гидродинамическая" часть функции распределения очевидным образом находится из системы линейных уравнений

$$(G_{hh} - G_{ha}G_{aa}^{-1}G_{ah})\, h_F = S_F,$$

а "негидродинамическая" часть – из соотношения

$$a_F = -G_{aa}^{-1}G_{ah}h_F. \tag{21}$$

В этом подходе скорость газа определяется из соотношения $j^i = \rho u^i$ по формулам

$$u^i = \rho^{-1} j^i. \tag{22}$$

Плотность энергии, тензор потока импульса и вектор потока энергии представляются в виде

$$E = \frac{1}{2}\rho u^i u^i + \varepsilon,$$
$$\pi^{ij} = \rho u^i u^j + p\delta^{ij} - \tau^{ij}, \tag{23}$$
$$Q^i = Eu^i + (p\delta^{ij} - \tau^{ij})\, u^j + q^i.$$

Здесь ε – внутренняя энергия среды, p – гидростатическое давление, задаваемое, например, зависимостью $p = p(\rho, \varepsilon)$, которая вычисляется в классе равновесных распределений (6) (см. Приложение), τ^{ij} – тензор вязких напряжений, q^i – вектор потока тепла.

Чтобы получить замкнутую газодинамическую модель, необходимо выразить τ^{ij} и q^i через гидродинамические переменные, в качестве которых мы будем использовать плотность, внутреннюю энергию и скорость.

Обсудим физическую интерпретацию компонент h^A при разложении h по базису e_A. Для этого положим, что для всякой физической величины A в рассматриваемой задаче имеет место разложение по порядку малости $A = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}$, где $\overset{0}{A}$ – значение величины в равновесном состоянии, $\overset{1}{A}$ – ее линейное возмущение. В частности, $\overset{0}{u}{}^i = 0$.

Пусть φ – решение уравнения (13) и справедливы соотношения (20). Легко видеть, что $h^A = (e^A, h) = (e^A, \varphi)$.

Отсюда и из соотношений (7), (8), (10) с учетом (22), (23) находим

$$h^4 = m^{-1}\overset{1}{\rho}, \quad h^i = m^{-1}\overset{0}{\rho}\overset{1}{u}{}^i, \quad h^0 = m^{-1}\overset{1}{\varepsilon}.$$

Найдем теперь выражения для вектора потока тепла $\overset{1}{q}{}^i$ и тензора вязких напряжений $\overset{1}{\tau}{}^{ij}$.

Используя соотношения (11), (23), (21), получаем

$$\overset{1}{q}{}^i_F = \frac{m}{2}\,(v^i v^j v^j,\ (1 - G_{aa}^{-1}G_{ah})\, h_F) - \tag{24}$$
$$- m\overset{0}{\kappa} h \overset{0}{\rho}{}^{-1}\,(v^i, h_F),$$

где $\kappa = \varepsilon + p$ – энтальпия. Заметим, что справедливо тождество

$$\left(\left(\frac{1}{2}v^i v^i v^j - \overset{0}{\kappa}\overset{0}{\rho}{}^{-1} v^j\right), h\right) = 0,$$

которое легко проверить, варьируя параметры в классе равновесных распределений (6). С учетом этого тождества получаем из (24)

$$\overset{1}{q}{}^i_F = -\frac{m}{2}\,(v^i v^j v^j,\ G_{aa}^{-1}G_{ah}h_F). \tag{25}$$

Аналогичным образом из (9), (23), (21) следует представление

$$\overset{1}{\tau}{}_F^{ij} = m\left((-v^i v^j),\ (1 - G_{aa}^{-1} G_{ah})\, h_F\right) + \overset{1}{p}_F \delta^{ij},$$

которое с учетом тождества

$$\frac{m}{2}\left((-v^i v^j), h\right) + \overset{1}{p}\delta^{ij} = 0$$

преобразуется к виду

$$\overset{1}{\tau}{}_F^{ij} = m\left(v^i v^j, G_{aa}^{-1} G_{ah} h_F\right). \qquad (26)$$

Введем вспомогательные величины

$$A^{ABC} = A^{ABC}(k_\gamma) = \left(e^A e^B, G_{aa}^{-1} G_{ah} e^C\right).$$

Тогда соотношения (25), (26) переписываются в компактном виде

$$\overset{1}{q}{}_F^i = -\frac{m}{2} A^{i0A} h_{AF}, \quad \overset{1}{\tau}{}_F^{ij} = -m A^{ijA} h_{AF}. \qquad (27)$$

Исследуем свойства коэффициентов A^{ABC}, вытекающие из соображений симметрии и ограничений на оператор L (14) – (17).

Отметим сразу, что поскольку $G_{ah} e^4 = P_a i k_i v^i = 0$, то $A^{\alpha A4} = 0$. Таким образом, выражения для диссипативных потоков не зависят от функции h_4. Аналогичным образом, $A^{i4A} = 0$.

Из инвариантности относительно 3-мерной ортогональной группы SO (3) следует представление:

$$A^{000} = X_0, \quad A^{00i} = X_1 i k_i, \quad A^{0i0} = X_2 i k_i,$$

$$A^{0ij} = X_3 i k_i i k_j + X_4 \delta_{ij}, \quad A^{ji0} = X_5 i k_i i k_j + X_6 \delta_{ij}, \qquad (28)$$

$$A^{ijk} = X_7 i k_i i k_j i k_k + X_8 i k_k \delta_{ij} + X_9 (i k_i \delta_{jk} + i k_j \delta_{ik}),$$

где X_a, $a = 0, 1, \ldots 9$ – функции компонент k_α, инвариантные относительно действия группы SO (3). Из (15) следует $(X_a(k_\alpha))^* = X_a(-k_\alpha)$, что позволяет интерпретировать функции X_a, как фурье-образы некоторых действительных ядер $Y_a = Y_a(x^\alpha) : X_a = Y_{aF}$. В комплексной полуплоскости $\mathrm{Im} k_0 < 0$ функции X_a аналитичны, так как согласно (16) имеет место неравенство

$$G^+ + G = 2\,\mathrm{Im}\, k_0 - (L^+ + L) < 0,$$

и потому по теореме Пэли–Винера ядра $Y_a(x^\alpha)$ обращаются в нуль при $x^0 < 0$ (причинность).

В силу определения $e^0 = (v^i v^i)/2$ имеем: $A^{ii\alpha} = 0$, поэтому из (28) вытекают два тождества:

$$k_i k_i X_5 - 3X_6 = 0, \quad k_i k_i X_7 - 3X_8 - 2X_9 = 0. \qquad (29)$$

Напомним, что диссипативные потоки определяются величинами

$$h_0 = \overset{0}{\eta}_{00} \overset{1}{n} + \overset{0}{\eta}_{04} h^4, \quad h_i = \overset{0}{\eta}_{iA} h^A. \qquad (30)$$

Подставляя в (30) компоненты метрики η_{AB} (см. Приложение) и выражения для величин h^A, получаем:

$$h_0 = m\overset{1}{T}/\overset{0}{T}{}^2, \quad h_i = \overset{1}{u}{}^i/\overset{0}{T}, \qquad (31)$$

где температура определяется зависимостью $T = T(\rho, \varepsilon)$, найденной в классе равновесных состояний (см. Приложение). Выражения (31) показывают, что диссипативные потоки (27) могут быть определены через поля температуры и скорости.

Продолжим исследование функций X_a.

В широком классе случаев оператор L коммутирует с оператором I, и потому вместо (1.10) справедливо более сильное условие: $L^+ = L$.

Рассмотрим $B^{\alpha\beta} = -i k_\gamma A^{\alpha\gamma\beta}$. Как легко видеть, справедливо представление

$$B^{\alpha\beta} = \left(G_{ah} e^\alpha, G_{aa}^{-1} G_{ah} e^\beta\right), \qquad (32)$$

откуда с учетом (1.10) получаем соотношения симметрии Онзагера:

$$B^{\alpha\beta}(k_0, k_i) = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta B^{\beta\alpha}(k_0, -k_i), \qquad (33)$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_i = -1$. Подставляя в (33) выражения (28) для случая, когда $\alpha = 0$, $\beta = i$, получаем одно нетривиальное соотношение

$$-i k_0 X_2 + k_j k_j X_5 - X_6 + i k_0 X_1 - k_j k_j X_3 + X_4 = 0. \qquad (34)$$

Получим теперь ограничения, вытекающие из условия диссипативности (16). Имеет место представление

$$\mathrm{Re}\, B^{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\left(G_{ah} e^\alpha, (G_{aa}^{-1} + G_{aa}^{+-1})\, G_{ah} e^\alpha\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(G_{aa}^{-1} G_{ah} e^\alpha, (L^+ + L)\, G_{aa}^{-1} G_{ah} e^\alpha\right).$$

Отсюда вытекает неравенство $\mathrm{Re} B^{\alpha\alpha} \geq 0$, где суммирование по α не производится. Подставляя в это неравенство выражения (28) для случаев $\alpha = 0, i$, получаем неравенства

$$\mathrm{Re}(-i k_0 X_0 + k_k k_k X_2) \geq 0,$$

$$\mathrm{Re}\,(-(k_i k_i)(k_k k_k) X_7 + k_k k_k X_8 + \qquad (35)$$

$$+ X_9 (k_k k_k + k_i k_i) + i k_0 k_i k_i X_3 - i k_0 X_4) \geq 0,$$

где в последней формуле суммирование по i отсутствует.

Поскольку диссипативные потоки должны обоащаться в нуль при поступательном движении однородной среды, должно выполняться равенство

$$X_0|_{k_\alpha = 0} = 0, \quad X_4|_{k_\alpha = 0} = 0, \quad X_6|_{k_\alpha = 0} = 0.$$

На этом газодинамическую модель можно считать построенной. Газодинамические переменные $\overset{1}{\rho}$, $\overset{1}{\varepsilon}$, $\overset{1}{u}{}^{i}$ подчиняются уравнениям (19). Диссипативные потоки определяются выражениями (27) с помощью набора скалярных функций (28). Эти функции связаны тождествами (29), (30), (34) и удовлетворяют неравенствам (35), обусловленным диссипативностью системы. Отметим, что для достаточно медленных процессов и длинных волн (т.е. в пределе $k_\alpha \longrightarrow 0$) рассматриваемая нелокальная модель переходит в модель Навье–Стокса–Фурье. При этом величину $\zeta = m^2 (2\overset{0}{T}{}^2)^{-1} X_2\Big|_{k_\alpha = 0}$ следует отождествить с коэффициентом теплопроводности, а величину $\mu = 2m\overset{0}{T}{}^{-1} X_9|_{k_\alpha = 0}$ с коэффициентом сдвиговой вязкости. Объемная вязкость, так же как и в теории Чепмена–Энскога, равна нулю для одноатомного газа [21].

Исследуем теперь распространение свободных волн в приближении слабой диссипации. Линеаризуем уравнения (12) и вычислим детерминант Δ полученной линейной системы уравнений. В результате несложных вычислений находим:

$$\Delta = ik_0 P_1 P_2^2,$$

$$P_1 = \left(\frac{9}{2}\overset{0}{\rho} m^{-1} ik_0 + C_1\right)\left(\overset{0}{\rho} ik_0 + C_4 + s\left(C_5 + \overset{0}{\rho}\overset{0}{T} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times m^{-1} (ik_0)^{-1}\right)\right) + s\left(C_2 + \overset{0}{\rho}\overset{0}{T} m^{-1}\right)\left(\overset{0}{\rho} m^{-1} + C_3\right),$$

$$P_2 = ik_0 \overset{0}{\rho} + sC_4,$$

$$s = k_i k_i,\ C_1 = \frac{1}{2} m^2 s \overset{0}{T}{}^{-2} X_2,\ C_2 = \frac{1}{2} ms \overset{0}{T}{}^{-1} (sX_3 - X_4),$$

$$C_3 = 2m^2 \overset{0}{T}{}^{-2} X_6,\ C_4 = ms \overset{0}{T}{}^{-1} X_9,$$

$$C_5 = -(2X_8 + X_9)\, m \overset{0}{T}{}^{-1}.$$

Поэтому дисперсионное уравнение $\Delta = 0$ распадается на уравнение $P_1 = 0$, соответствующее продольным модам, и $P_2 = 0$, соответствующее поперечным модам. В приближении малой диссипации ($C_4 \longrightarrow 0$) поперечные моды не распространяются, хотя если диссипация не мала, это становится возможным [22]. Для продольных мод рассмотрим, например, волны, распространяющиеся вдоль оси $0x^1$ с некоторой фиксированной частотой $\omega = k_0$, и обозначим $n = k_1$ – волновое число. Тогда $v = |\omega/\mathrm{Re}\, n|$ – скорость волны, $\delta = -\mathrm{Im}\, n\, \mathrm{sign}(\mathrm{Re}\, n)$ – ее декремент. В низшем бездиссипативном приближении из уравнения $P_1 = 0$ имеем $\overset{0}{v} = \left(\frac{5}{3}\overset{0}{T} m^{-1}\right)^{1/2}$, $\overset{0}{\delta} = 0$, $\overset{0}{n} = \overset{0}{v}{}^{-1}\omega$. В следующем приближении получаем $\overset{1}{v} = \overset{0}{v}(1 - \overset{0}{n}{}^{-1}\mathrm{Re}\,\Lambda)$, $\overset{1}{\delta} = \mathrm{Im}\Lambda$, где

$$\Lambda = \frac{2}{9}\overset{0}{v}{}^{-1}\overset{0}{\rho}{}^{-1} miC_1 + \frac{5}{6}\overset{0}{v}{}^{-1}\overset{0}{\rho}{}^{-1} i(C_4 + sC_5) +$$

$$+ \frac{5}{9}\overset{0}{n}\overset{0}{v}{}^{-2}\overset{0}{\rho}{}^{-1}(C_2 + \overset{0}{T} C_3).$$

Итак, получены определяющие соотношения и динамические уравнения для гидродинамической модели, следующей из линеаризованного кинетического уравнения с источниками. Эта модель эквивалентна исходной кинетической модели, поскольку по произвольному решению уравнений гидродинамически с помощью соотношений (31), а затем (21) можно восстановить решение исходного кинетического уравнения. На основе гидродинамических уравнений найдены поправки к скорости волны и коэффициенту поглощения, обусловленные эффектами нелокальности и наследственности в одноатомном газе.

Приложение

В настоящем приложении приводятся формулы, используемые в тексте статьи. По равновесному распределению (6) можно взятием стандартных гауссовских интегралов вычислить термодинамические функции:

$$\rho = m(2\pi m/T)^{-3/2}\exp(\mu/T),\quad p = \rho T m^{-1} = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\rho T m^{-1},\quad T = \frac{2}{3}\rho^{-1}\varepsilon m.$$

Используя определения термодинамических функций в равновесном покоящемся состоянии, несложно вычислить компоненты метрики η^{AB}:

$$\eta^{00} = \frac{15}{4}T^2\rho m^{-3},\ \eta^{04} = \eta^{40} = \frac{3}{2}T\rho m^{-2},$$

$$\eta^{44} = \rho m^{-2},$$

$$\eta^{ij} = \delta^{ij} p m^{-1},\ \eta^{i0} = \eta^{i4} = \eta^{0i} = \eta^{4i} = 0.$$

Обращая матрицу η^{AB}, получаем ковариантные компоненты метрики:

$$\eta_{00} = \frac{2}{3}T^{-2}\rho^{-1}m^2,\ \eta_{04} = \eta_{40} = -T^{-1}\rho^{-1}m^2,$$

$$\eta_{44} = \frac{5}{2}\rho^{-1}m,$$

$$\eta_{ij} = \delta^{ij} p^{-1} m,\ \eta_{i0} = \eta_{i4} = \eta_{0i} = \eta_{4i} = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубарев Д.Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 416 с.
2. *Зубарев Д.Н., Сергеев М.В.* Неравновесная статистическая термодинамика простых сред с памятью // Дэй У.А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. С. 167 - 186.
3. *Рудяк В.Я.* Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Наука, 1987. 272 с.
4. *Анисимов М.А.* Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. М.: Наука, 1987. 272 с.
5. *Динариев О.Ю.* О материальных соотношениях для жидкости с наследственностью и нелокальностью // Доклады АН СССР. 1991. Т. 316. № 1. С. 67 - 71.
6. *Грэй П.* Кинетическая теория явлений переноса в простых жидкостях // Физика простых жидкостей. М.: Мир, 1971. С. 136 - 192.
7. *Резибуа П., Де Ленер М.* Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир, 1980. 423 с.
8. *Андреев А.Ф.* Поправки к гидродинамике жидкостей // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. Вып. 3 (9). С. 1132 - 1139.
9. *Зубарев Д.Н., Морозов В.Г.* Методы нелокальной статистической термодинамики в динамической теории нелинейных флуктуаций // Проблемы современной статистической физики. Киев: Наукова думка, 1985. С. 120 - 128.
10. *Адхамов А.А., Асоев А.* Кинетическая теория вязкоупругих свойств многокомпонентных жидкостей // Проблемы современной статистической физики. Киев: Наукова думка, 1985. С. 19 - 27.
11. *Morosov V.G.* Nonlocal hydrodynamics and dispersion of transport coefficients in simple fluid // Physica. 1983. V. 117A. № 2 - 3. P. 511 - 530.
12. *Белый В.В.* О гидродинамических флуктуациях в неоднородно нагретом газе // ТМФ. 1984. Т. 58. № 3. С. 421 - 435.
13. *Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В.* О кинетических уравнениях для плотных газов и жидкостей // ТМФ. 1991. Т. 87. № 1. С. 113 - 129.
14. *Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В.* Объединение кинетического и гидродинамического подходов в теории плотных газов и жидкостей // ТМФ. 1993. Т. 96. № 3. С. 325 - 350.
15. *Климонтович Ю.Л.* Кинетическое обоснование уравнений гидродинамики с учетом самодиффузии. Влияние самодиффузии на распространение звука и ударных волн // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. С. 1516 - 1520.
16. *Климонтович Ю.Л.* О необходимости и возможности единого описания кинетических и гидродинамических процессов // ТМФ. 1992. Т. 92. № 2. С. 312 - 330.
17. *Klimontovich Yu.L.* From the hamiltonian mechanics to a continuous media. Dissipative structures. Criteria of self-organization // ТМФ. 1993. Т. 96. № 3. С. 385 - 416.
18. Некоторые вопросы кинетической теории газов. М.: Мир, 1965. 270 с.
19. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов М.: Мир, 1973. 245 с.
20. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
21. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
22. *Динариев О.Ю.* О скорости распространения волн для процессов переноса с релаксацией // Доклады АН СССР. 1988. Т. 301. № 5. С. 1095 - 1097.

Propagation of Weak Waves in Gas: Transition from the Kinetic Description to the Gasodynamic Description

O. Yu. Dinariev

Equations for weak waves in gas are derived from a linearized kinetic equation. No prior assumptions on the smallness of dissipative terms, spatial gradients, and collision integral have been made. The equations obtained for macroscopic hydrodynamic quantities are exact in the sense that one can, in principle, reconstruct the exact solution of the linearized kinetic equation from an arbitrary solution of these equations. The constitutive relations of the model prove to be nonlocal both in time and in space. From the derived governing equations, in the approximation of small dissipative terms, expressions for the wave velocity and attenuation coefficient are obtained. These expressions allow for the effects of relaxation and nonlocal behavior.