АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1995, том 41, № 4, с. 572 - 575

УДК 534.1 + 62-752.2

СОГЛАСОВАННЫЙ ТОРЦЕВОЙ ГАСИТЕЛЬ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

© 1995 г. А. И. Весницкий, И. В. Милосердова

Нижегородский филиал института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
603024 Н. Новгород, ул. Белинского, 85

Поступила в редакцию 25.07.94 г.

Рассматриваются изгибные колебания балки как суперпозиция двух бегущих навстречу друг другу волн и двух экспоненциально спадающих по мере удаления от закреплений осцилляций. Найдены условия, которым должны удовлетворять параметры согласованного концевого гасителя, устраняющего отраженные волны и обеспечивающего наименьшую интенсивность колебаний балки.

Исследования динамических процессов в элементах машин и механизмов, проводимые с позиций теории волн, позволили вскрыть принципиально новые подходы к проблеме гашения колебаний пассивными средствами. Так, например, в работе [1] предложен способ определения параметров оптимального гасителя крутильных колебаний в трансмиссиях, основанный на устранении резонанса, возникающего в результате сложения падающей волны возмущения и волны, отраженной от гасителя. В работе [2] на основе идеи устранения отраженных волн показана принципиальная возможность существования оптимального демпфера изгибных колебаний балки.

Реализация такого "чистого" демпфера, содержащего только диссипативные элементы, на практике невозможна, поэтому здесь необходимы дальнейшие теоретические исследования.

В связи с этим в настоящей работе рассматривается задача о гашении изгибных колебаний балки с помощью гасителя, обладающего не только диссипативными, но и инерционно-упругими свойствами. Показано, что существуют разновидности упруго-инерционных гасителей, обеспечивающих отсутствие в системе отраженных волн, но не исключающих экспоненциально спадающих при удалении от гасителя осцилляций. Как известно [3], эти осцилляции существенно влияют на величину прогиба балки лишь в пограничной зоне вблизи гасителя, ширина которой не превышает длины волны. Поэтому гаситель, устраняющий отраженные волны, обеспечивает наименьшую интенсивность колебаний балки и, по существу, является оптимальным.

Рассмотрим полубесконечную балку Бернулли, на конце которой установлен гаситель колебаний, включающий в себя диссипативные, а также упругие и инерционные элементы, учитывающие поперечное смещение и поворот концевого сечения балки (рисунок).

Изгибные колебания балки описываются уравнением

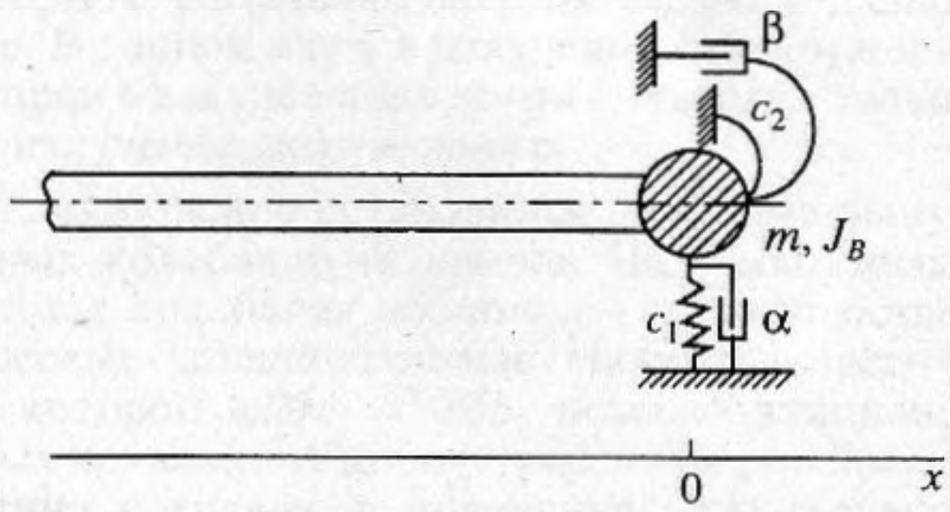
$$\rho F u_{tt} + EJ u_{xxxx} = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющим следующим граничным условиям [4]

$$\begin{gathered} -EJ u_{xxx} + m u_{tt} + c_1 u + \alpha u_t|_{x=0} = 0, \\ EJ u_{xx} + J_0 u_{xtt} + c_2 u_x + \beta u_{xt}|_{x=0} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $u(x, t)$ – прогиб балки, x, t – продольная координата и время, ρ, E – плотность материала балки и модуль Юнга, F, J – площадь и момент инерции поперечного сечения балки, m – масса гасителя, J_0 – его момент инерции, c_1, c_2 – коэффициенты жесткости упругих элементов на смещение и поворот соответственно, α, β – коэффициенты вязких потерь при поперечном смещении и повороте.

Будем считать, что колебания балки возбуждаются периодическим источником, который находится в бесконечности и имеет заданную частоту ω.



Полубесконечная балка с упруго-инерционным гасителем на конце.

Как известно, решение уравнения (1) может быть представлено в виде суперпозиции двух бегущих волн и двух экспоненциально спадающих осцилляций

$$u(x,t) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i(\omega t + kx)} + \\ + B_1 e^{i\omega t - kx} + B_2 e^{i\omega t + kx}, \tag{3}$$

где A_1, A_2 – амплитуды падающей и отраженной от гасителя бегущих волн, B_1, B_2 – амплитуды осцилляций, ω, k – частота и волновое число.

Входящие в решение (3) частота возмущения ω и волновое число k удовлетворяют дисперсионному уравнению

$$\omega = (EJ/\rho F)^{1/2} k^2. \tag{4}$$

Так как прогибы балки должны быть ограничены, в решении (3) необходимо положить $B_1 = 0$. Подставляя (3) при $B_1 = 0$ в краевые условия (2), находим коэффициент отражения волны A_2/A_1 и относительную амплитуду осцилляции B_2/A_1 на границе балки $x = 0$:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2}, \quad \frac{B_2}{A_1} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1 + \Phi_2},$$

$$\Phi_1 = -2\gamma\alpha_0 + \alpha\beta - \gamma\delta + \alpha_0\beta_0 + i(\alpha\gamma + \delta\beta + 2\beta\alpha_0),$$

$$\Phi_2 = 2\alpha\beta_0 - \alpha\gamma - \delta\beta + i(\alpha\beta - \delta\gamma + 2\delta\beta_0 + \alpha_0\beta_0),$$

$$\Phi_3 = 2(\alpha_0\beta_0 - \alpha\beta + \gamma\delta - i(\beta\delta + \alpha\gamma)),$$

$$\gamma = J_0\omega - c_2/\omega, \quad \delta = m\omega - c_1/\omega,$$

$$\alpha_0 = EJk^3/\omega, \quad \beta_0 = EJk/\omega.$$

Определим гаситель как согласованный, если энергия падающей волны полностью им поглощается, т.е. в этом случае отраженная волна и осцилляция отсутствуют:

$$A_2/A_1 = 0, \quad B_2/A_1 = 0. \tag{5}$$

Условия (5) выполняются, если параметры гасителя удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\alpha\gamma + \beta\delta = 0, \quad \alpha\beta - \gamma\delta = \alpha_0\beta_0, \\ \alpha + \gamma k^2 = \alpha_0, \quad \beta k^2 - \delta = \alpha_0. \tag{6}$$

Анализ условий согласования (6) показывает, что отраженная волна и приграничная осцилляция отсутствуют либо в резонансном случае, либо в случае "чистого" демпфера, т.е. безынерционного гасителя, не обладающего упругими свойствами:

$$\alpha = \alpha_0 = \rho F(EJ/\rho F)^{1/4}\omega^{1/2}, \\ \beta = \beta_0 = EJ(\rho F/EJ)^{1/4}\omega^{-1/2}, \tag{7}$$

$$m = c_1 = 0 \quad (\text{либо} \quad m/c_1 = \omega^2),$$

$$J_0 = c_2 = 0 \quad (\text{либо} \quad J_0/c_2 = \omega^2).$$

Заметим, что решение (7) совпадает с результатом работы [2], в которой рассматривается задача о демпфировании изгибных колебаний на примере балки Тимошенко.

Гашение колебаний с помощью одного только демпфирующего устройства невозможно реализовать на практике. Поставим задачу отыскания гасителей, обладающих инерционными или упругими элементами, т.е. практически реализуемых и, вместе с тем, осуществляющих гашение колебаний, близкое к оптимальному.

Экспоненциально спадающая осцилляция $B_2 e^{i\omega t + kx}$, входящая в решение (3), описывает динамический краевой эффект в пограничной зоне вблизи гасителя, ее вклад в решение незначителен по сравнению со смещением, создаваемым бегущими волнами вне этой области. Ширина области динамического краевого эффекта L определяется расстоянием, на котором амплитуда осцилляции уменьшается в e раз, и не превышает длины волны ($L \le k^{-1}$). Поэтому гаситель будет близок к согласованному, если он обеспечивает отсутствие отраженной волны ($A_2/A_1 = 0$), хотя и не ликвидирует спадающей осцилляции ($B_2/A_1 \ne 0$).

Коэффициент отражения волны A_2/A_1 обращается в ноль, если выполняются равенства:

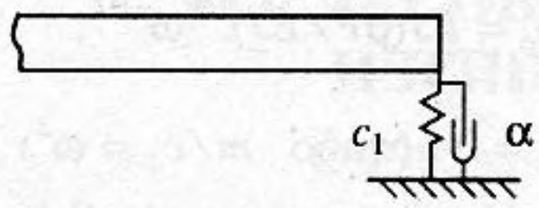
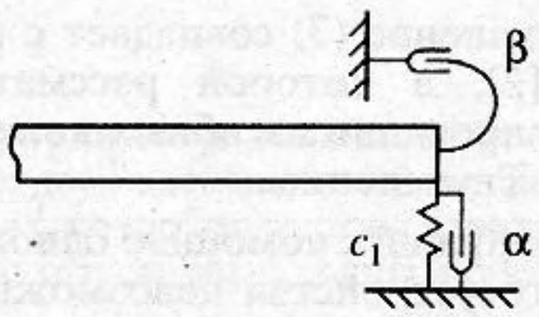
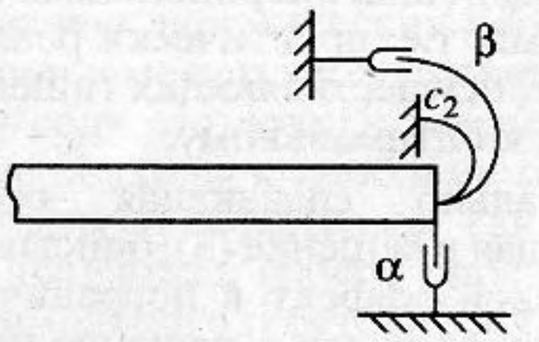
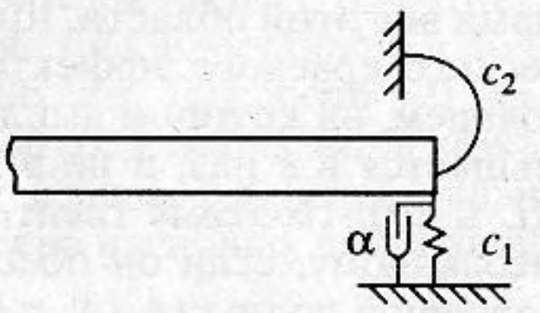
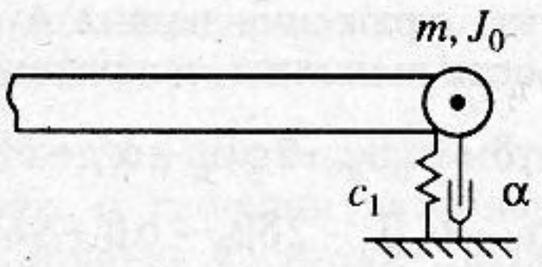
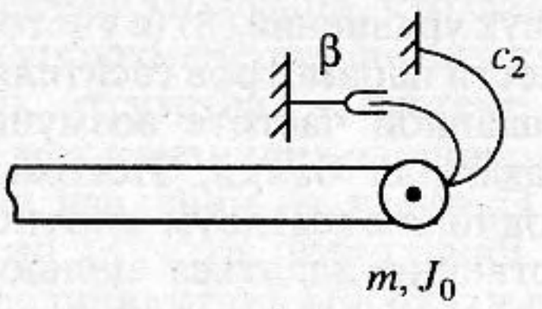
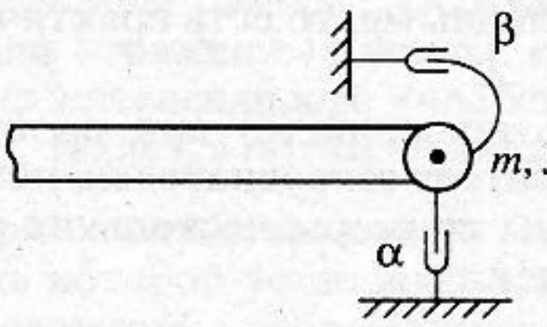
$$-2\gamma\alpha_0 + \alpha\beta - \gamma\delta + \alpha_0\beta_0 - 2\alpha\beta_0 + \alpha\gamma + \delta\beta = 0, \\ \alpha\gamma + \delta\beta + 2\beta\alpha_0 - \alpha_0\beta_0 - 2\delta\beta_0 - \alpha\beta + \gamma\delta = 0. \tag{8}$$

Следовательно, задача сводится к исследованию системы двух уравнений (8) (с учетом (4)) для определения шести параметров гасителя m, J_0, c_1, c_2, α, β при заданной частоте возмущения ω и заданных параметрах балки. Искомые шесть параметров подчиняются двум соотношениям, поэтому естественно задаться целью определить значения оставшихся четырех свободных параметров так, чтобы все они были положительно определенными, то есть практически реализуемыми.

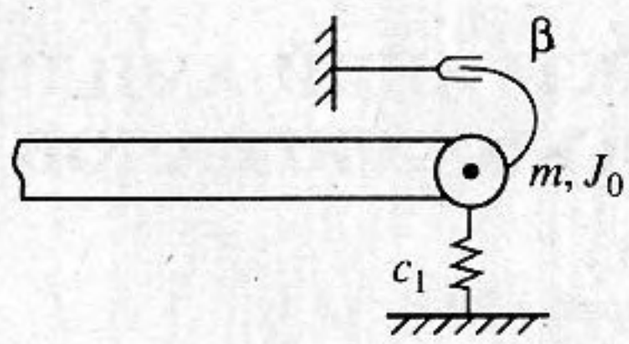
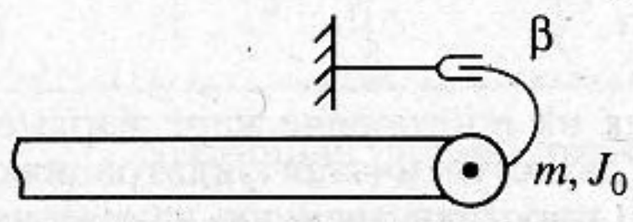
Анализ соотношений (8) при произвольных параметрах гасителя затруднителен, поэтому ниже рассмотрены примеры нескольких разновидностей гасителей.

Так, в случае упруго-инерционного гасителя поперечных смещений ($\beta = c_2 = 0$), если в качестве

Параметры согласованных гасителей изгибных колебаний балки

Схема закрепления	Параметры гасителя
	$\alpha = c_1 = \alpha_0/2$
	$\alpha = \alpha_0(\beta^2 - \beta_0\beta + \beta_0^2)/X$ $C_1 = (\beta - \beta_0)^2/X$
	$c_2 = 0, \alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$
	$C_1 = \alpha_0(C_2^2 + \beta_0 C_2 + \beta_0^2)/Y$ $\alpha = \alpha_0(C_2 + \beta_0)^2/Y$
	$\alpha = \alpha_0(I - \beta_0)^2/Z$ $C_1 = M + \alpha_0(I^2 - I\beta_0 + \beta_0^2)/Z$ $I \neq \beta_0$
	$\beta = \beta_0(M + \alpha_0)^2/N$ $C_2 = I - (M\beta + \alpha_0\beta_0)/(2\alpha_0 + M)$
	$\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha + M^2 + \alpha_0(M + \alpha_0)(\beta_0 - 2I)/(\beta_0 - I) = 0$ $\beta^2 - 2\beta_0\beta + I^2 - \beta_0(I - \beta_0)(2M + \alpha_0)/(\alpha_0 + M) = 0$ $I \geq M\beta_0/(M + \alpha_0), I \neq \beta_0$

(Окончание)

Схема закрепления	Параметры гасителя
	$\beta^2 - \beta_0\beta + (I - \beta_0)^2 = 0$ $C_1 = M - \alpha_0(2I - \beta_0)/(\beta - I)$ $\beta_0/2 \le I \le 3\beta_0/2,\ I \ne \beta_0$
	$\beta = \beta_0(M + \alpha_0)^2/N$ $I = \beta_0[(M + \alpha_0)^3 - \alpha_0^3)]/N$

Примечание. В таблице приняты обозначения: $I = J_0\omega$, $M = m\omega$, $C_1 = c_1/\omega$, $C_2 = c_2/\omega$, $X = \beta^2 - 2\beta_0\beta + 2\beta_0^2$, $Y = C_2^2 + 2\beta_0 C_2 + 2\beta_0^2$, $Z = I^2 - 2I\beta_0 + 2\beta_0^2$, $N = M^2 + 2M\alpha_0 + 2\alpha_0^2$.

свободных параметров выбрать массу m и момент инерции гасителя J_0, коэффициент вязких потерь α и жесткость c_1 определяются соотношениями:

$$\alpha = \alpha_0(I - \beta_0)^2/Z, \quad C_1 = M + \alpha_0(I^2 - I\beta_0 + \beta_0^2)/Z,$$

$$Z = I^2 - 2I\beta_0 + 2\beta_0^2,$$

где приняты обозначения: $I = J_0\omega$, $M = m\omega$, $C_1 = c_1/\omega$.

В случае инерционного гасителя ($c_1 = c_2 = 0$) значения коэффициентов вязких потерь α, β определяются из решения квадратных уравнений

$$\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha + M^2 + \alpha_0(M + \alpha_0)(\beta_0 - 2I)/(\beta_0 - I) = 0,$$

$$\beta^2 - 2\beta_0\beta + I^2 - \beta_0(I - \beta_0)(2M + \alpha_0)/(M + \alpha_0) = 0,$$

причем величина момента инерции гасителя подчиняется неравенству

$$I \ge M\beta_0/(M + \alpha_0), \quad I \ne \beta_0.$$

Параметры других возможных разновидностей гасителей представлены в таблице.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Весницкий А.И., Милосердова И.В.* Нерезонансные трансмиссии // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 3. С. 550 - 554.
2. *Весницкий А.И., Романов Н.Д.* К построению демпфера гашения изгибных колебаний балки // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 6. С. 122 - 124.
3. *Болотин В.В.* Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок // Инж. сб. 1961. № 31. С. 3 - 14.
4. *Весницкий А.И., Крысов С.В., Уткин Г.А.* Постановка краевых задач динамики упругих систем, исходя из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Горький: Изд. ГГУ, 1983. 65 с.

Matched End Damper of Flexural Vibrations of a Beam

A. I. Vesnitskii and I. V. Miloserdova

Flexural vibrations of a beam are treated as a superposition of two waves traveling toward each other and two oscillations exponentially decreasing with the distance from the end anchorage. The parameters of a matched-end damper are determined to suppress reflected waves and minimize the intensity of beam vibrations.