

УДК 539.3

## О НЕЛИНЕЙНОМ РАССЕЯНИИ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ НА ТРЕЩИНЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

© 1995 г. Л. К. Зарембо, А. В. Шанин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 10.10.94 г.

Рассмотрена задача о генерации второй гармоники неглубокой трещиной, расположенной на поверхности тонкой пластины. Для этого строится функция действия для пластины с трещиной, а затем с помощью обобщенных функций выводятся уравнения движения. В первом борновском приближении найдено решение уравнений в виде ряда Фурье и проанализировано слагаемое, отвечающее второй гармонике.

В современной акустической дефектоскопии все чаще возникают задачи контроля ранних стадий усталости материалов. Трудности и актуальность этих задач не требуют пояснения. В этой связи представлялось интересным рассмотреть вопрос о возможности выявления микротрещин на поверхности пластин, используя нелинейные эффекты на нулевой моде лэмбовских мод – изгибной волне.

Как показано в [1], на однородной, лишенной дефектов пластине генерации второй гармоники изгибной волны не происходит. Это связано с сильной дисперсией изгибной волны. Кроме того, генерации второй гармоники препятствуют свойства симметрии пластины и мод на ней, существующих при отражении относительно центральной плоскости пластины. Эти свойства приводят к тому, что изгибная волна может породить на частоте второй гармоники только симметричную моду, которая на низкой частоте испытывает экспоненциальное затухание.

Всякое нарушение симметрии пластины позволяет рассчитывать на появление второй гармоники изгибной волны. Трещина на поверхности представляет собой один из возможных типов нарушения симметрии.

Таким образом, появление в спектре изгибных волн второй гармоники при прохождении изгибной волны будет свидетельствовать о наличии дефектов. Важным фактором является отсутствие помех, вызванных геометрической и физической нелинейностью и не связанными с дефектом.

С точки зрения механики, генерация второй гармоники поверхностной трещиной вызвана следующим. Пластина, имеющая трещину, обладает различными упругими свойствами при изгибе, соответствующем раскрытию трещины, и при изгибе, соответствующем закрытию. Следовательно, трещина может рассматриваться как со-

средоточенный источник изгибной волны, промодулированный ступенчатой функцией. Поскольку период ступенчатой функции равен периоду основной частоты, спектр источника содержит вторую гармонику сигнала.

Дальнейшее рассмотрение посвящено теоретическим оценкам рассмотренного эффекта.

Опишем постановку задачи (рис. 1). В плоскости координат  $(x, y)$  располагается упругая пластина толщины  $H$ , обладающая плотностью  $\rho$ , модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\sigma$ . Поперечное смещение пластины описывается функцией  $z = \xi(x, y)$ . Вдоль оси  $y$  на верхней стороне пластины расположена трещина постоянной глубины  $a$ , перпендикулярная плоскости пластины.

Из области  $x < 0$  на трещину падает плоская изгибная волна  $\xi^{in}$  частоты  $\omega_0$ . Фронт этой волны параллелен трещине. Необходимо найти рассеянное поле  $\xi^{sc}$  на частоте  $2\omega_0$ .

К постановке задачи необходимо добавить некоторые разумные ограничения. Во-первых, длина падающей волны существенно больше толщины пластины или, в терминах волнового числа,

$$k_0 H \ll 1. \quad (1)$$

Во-вторых, глубина трещины существенно меньше

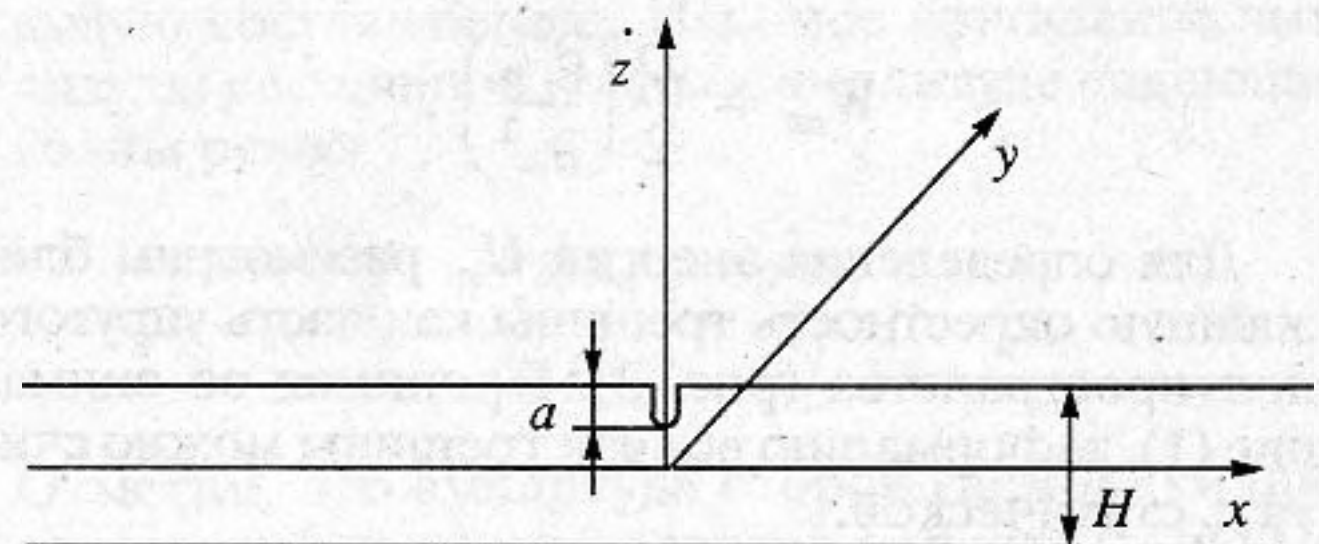


Рис. 1. Геометрия задачи.

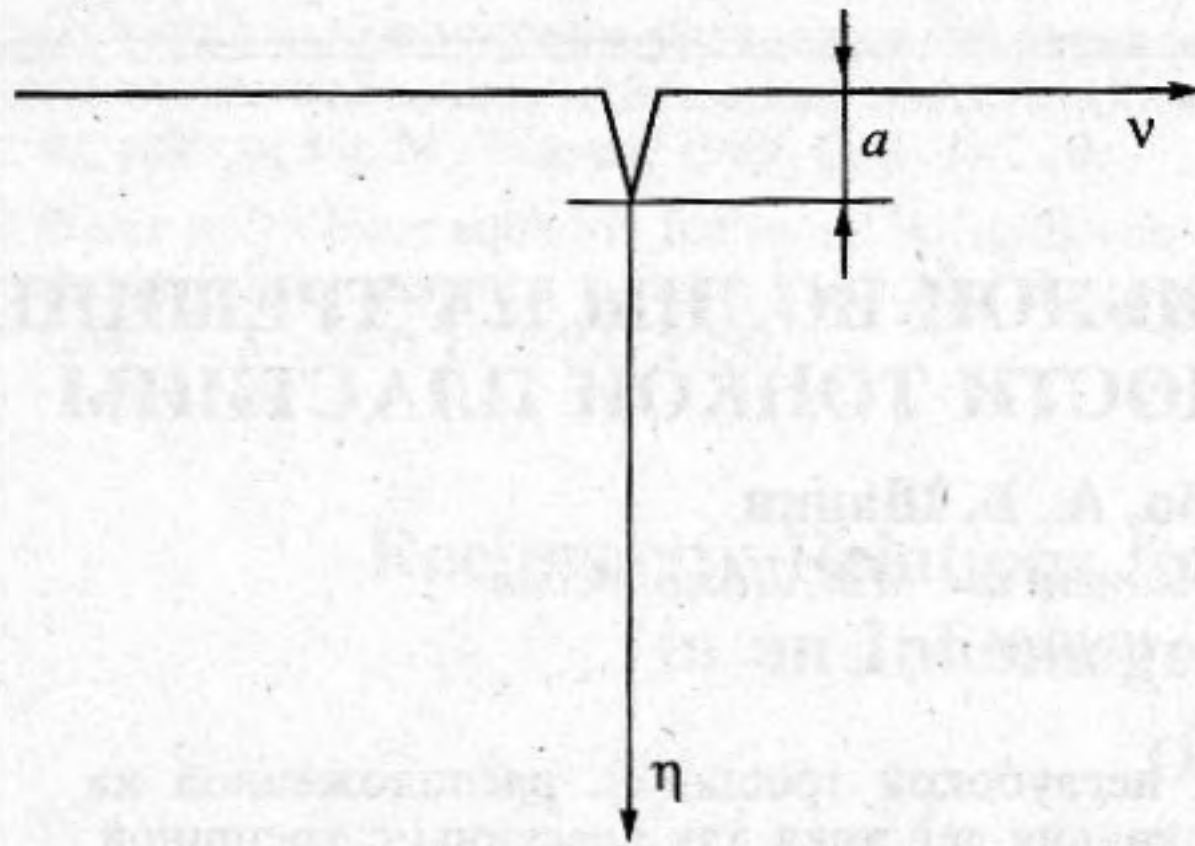


Рис. 2. К вычислению энергии трещины.

толщины пластины:

$$a/H \ll 1. \quad (2)$$

Отметим, что в поставленной задаче нет величин, зависящих от  $y$ , а зависимость от  $z$  учитывается уравнениями теории тонких пластин. Поэтому неизвестная величина  $\xi^{sc}$  зависит только от  $x$ .

Для вывода уравнений, описывающих поведение пластины с трещиной, воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. Действие может быть записано в виде:

$$S = \iint \left\{ \frac{1}{2} \rho H (\dot{\xi})^2 - W_{пл} + W_{тр} \right\} dx dt. \quad (3)$$

Здесь  $W_{пл}$  — плотность упругой энергии пластины без трещины,  $W_{тр} = \delta(x) U_{тр}$ ,  $U_{тр}$  — энергия, высвобождаемая при образовании трещины,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $t$  — время.

В соответствии с [2],

$$W_{пл} = \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \sigma) \times \right. \\ \left. \times \left( \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \right],$$

где  $D = EH^3/12(1 - \sigma^2)$ . В нашем случае независимости всех величин от  $y$ :

$$W_{пл} = \frac{D}{2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2.$$

Для определения энергии  $U_{тр}$  рассмотрим ближайшую окрестность трещины как часть упругого полупространства (рис. 2). Принимая во внимание (1), деформацию вблизи трещины можно считать статической.

Легко проверить, что в случае закрытой трещины  $U_{тр} = 0$ . Поэтому дальнейшие рассуждения

о вычислении  $U_{тр}$  будут относиться к открытой трещине.

На свободной границе упругого полупространства, включая поверхность трещины, выполняются граничные условия равенства нулю действующих на поверхность сил.

В связи с малостью глубины трещины по сравнению с толщиной пластины (2), на значительном удалении от трещины смещения  $u_i$  можно считать однородными. Следовательно, компоненты тензора деформаций  $u_{ij}$  стремятся к соответствующим величинам на поверхности тонкой пластины [2]:

$$u_{vv} \rightarrow -\frac{H}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, \\ u_{\eta\eta} \rightarrow \frac{H}{2} \frac{\sigma}{1 - \sigma} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, \\ u_{v\eta} \rightarrow 0.$$

Эти выражения представляют собой асимптотические условия. Дополнив их граничными условиями и уравнением равновесия упругой среды, получим модельную задачу для определения  $u_i$ . Эта задача может быть решена стандартным методом теории упругости, использующим конформные отображения [3]. После этого легко определить энергию, высвобождаемую при раскрытии трещины.

Точное вычисление  $U_{тр}$  требует значительных усилий. Однако соображения линейности и подобия позволяют легко определить  $U_{тр}$  с точностью до безразмерной константы. Следуя ходу рассуждений, изложенных в [3] при решении аналогичной задачи (трещина в объеме), имеем

$$U_{тр} = EA(\sigma) a^2 \frac{H^2}{4} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \right)^2,$$

где  $A(\sigma)$  — безразмерная величина, сравнимая с единицей и зависящая только от коэффициента Пуассона.

Введем обозначение:  $M = \frac{1}{2} EA(\sigma) a^2 H^2$ . Отметим, что, используя  $\delta$ -функцию Дирака, можно записать плотность энергии:

$$W_{тр} = \frac{1}{2} M \delta(x) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2.$$

Кроме того, условие открытого состояния трещины есть

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} < 0.$$

Следовательно, используя  $\theta$ -функцию Хэвисайда, можно записать окончательное выражение для  $W_{\text{тр}}$ , охватывающее все точки плоскости  $(x, t)$ :

$$W_{\text{тр}} = \frac{1}{2} M \Theta \left( -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \delta(x) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2$$

Подставляя полученные выражения  $W_{\text{пл}}$  и  $W_{\text{тр}}$  в (3) и вычисляя вариацию, имеем

$$\delta S = \iint \delta \xi \left\{ -\rho H \ddot{\xi} - D \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + M \Theta \left( -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \delta(x) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \right] \right\} dx dt.$$

Для стационарного значения  $S$  получаем уравнение:

$$D \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \rho H \ddot{\xi} = M \Theta \left( -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \delta(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right].$$

Пользуясь правилами обращения с обобщенными функциями [4], преобразуем правую часть:

$$D \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \rho H \ddot{\xi} = M \Theta \left( -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \delta''(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big|_{x=0}.$$

Отметим, что правая часть имеет порядок малой величины  $a^2 H^2 k_0^4$ . Следовательно, появляется возможность воспользоваться методом последовательных приближений.

В нулевом приближении получаем обычное уравнение изгибной моды для падающей волны  $\xi^{in}$ :

$$D \frac{\partial^4 \xi^{in}}{\partial x^4} + \rho H \ddot{\xi}^{in} = 0.$$

В первом борновском приближении получаем уравнение для рассеянного поля  $\xi^{sc}$ :

$$D \frac{\partial^4 \xi^{sc}}{\partial x^4} + \rho H \ddot{\xi}^{sc} = M \Theta \left( -\frac{\partial^2 \xi^{in}}{\partial x^2} \right) \delta''(x) \frac{\partial^2 \xi^{in}}{\partial x^2} \Big|_{x=0}.$$

Нулевое приближение позволяет выписать выражение для волны единичной амплитуды:

$$\xi^{in} = \text{Re} [\exp \{ i(k_0 x - \omega_0 t) \}] = \cos(k_0 x - \omega_0 t),$$

где  $k_0 = (\omega_0^2 \rho H / D)^{1/4}$ .

Это выражение может быть подставлено в правую часть уравнения первого приближения:

$$D \frac{\partial^4 \xi^{sc}}{\partial x^4} + \rho H \ddot{\xi}^{sc} = -k_0^2 M \cos(\omega_0 t) \Theta(\cos \omega_0 t) \delta''(x).$$

Выражение в правой части периодически во времени с периодом  $2\pi/\omega_0$ , следовательно оно может быть разложено в ряд Фурье:

$$D \frac{\partial^4 \xi^{sc}}{\partial x^4} + \rho H \ddot{\xi}^{sc} = -\frac{k_0^2 M \delta''(x)}{\pi} \times \left[ -1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega_0 t + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 \times (-1)^{m+1}}{(2m)^2 - 1} \cos 2m \omega_0 t \right].$$

В силу линейности полученного выражения, каждой гармонике правой части соответствует свой вклад в  $\xi^{sc}$ . Рассмотрим вклад на частоте  $2\omega_0$ :

$$D \frac{\partial^4 \xi^{sc}}{\partial x^4} + \rho H \ddot{\xi}^{sc} = -\frac{2k_0^2 M \delta''(x)}{3\pi} \cos 2\omega_0 t.$$

Заметим, что  $\cos 2\omega_0 t = \text{Re}[e^{-i2\omega_0 t}]$  и будем искать  $\xi^{sc}$  в виде:

$$\xi^{sc} = \text{Re} [\xi^{sc}(x) e^{-i2\omega_0 t}].$$

Тогда для зависящей только от  $x$  составляющей получим уравнение:

$$D(\xi^{sc})^{(4)} - 4\omega_0^2 \rho H \xi^{sc} = -\frac{2}{3\pi} k_0^2 M \delta''(x).$$

Проведем преобразование Фурье по переменной  $x$ . Результатом будет алгебраическое уравнение относительно Фурье-образа  $\xi^{sc}(k)$ . Решив это уравнение относительно  $\xi^{sc}(k)$  и проделав обратное преобразование Фурье, получим:

$$\xi^{sc}(x) = -\frac{M k_0^2}{3\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 e^{ikx}}{Dk^4 - 4\omega_0^2 \rho H} dk.$$

Этот интеграл легко вычисляется методом контурного интегрирования:

$$\xi^{sc}(x) = -\frac{M k_0}{6\pi D \sqrt{2}} \left[ i e^{i\sqrt{2}|x|k_0} + e^{-\sqrt{2}|x|k_0} \right].$$

Легко видеть, что рассеянное поле второй гармоники имеет распространяющуюся и затухающую составляющие. Искомое отношение амплитуды рассеянной волны к амплитуде падающей волны равно:

$$\frac{M k_0}{6\pi D \sqrt{2}} \sim \frac{a^2 k_0}{H}.$$

Отметим, что амплитуда второй гармоники пропорциональна первой степени амплитуды падающей волны. Полученное отношение является мерой эффективности рассмотренного механизма.

В заключение обратим внимание на экспериментальные исследования описанной выше хлопающей нелинейности, например [5].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исакович М.А. // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 3. С. 321 - 325.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1987.
4. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1969.
5. Асаинов А.Ф., Ко Сел Лен, Солодов И.Ю. // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 4. С. 592 - 596.

## Nonlinear Scattering of a Bending Wave at a Crack on the Surface of a Thin Plate

L. K. Zarembo and A. V. Shanin

The generation of the second harmonic by a shallow crack in the surface of a thin plate is considered. The function of action is built for a plate with a crack, and equations of motion are derived with the aid of generalized functions. The solution of these equations is found in the form a Fourier series in the first Born approximation, and the term corresponding to the second harmonic is analyzed.