АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1995, том 41, № 6, с. 928 - 929

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.1/.2

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ

© 1995 г. В. Ю. Карасёв

150054, Ярославль, ул. Угличская, 28, 72

Поступила в редакцию 18.01.94 г.

В нелинейной акустике для описания процессов в средах с релаксацией рассматривается следующее квазилинейное уравнение [1]

$$\tau\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{m\tau}{2c_0}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Здесь τ – время релаксации, ε – нелинейный параметр, c_0 – скорость звука, $m = c_\infty^2/c_0^2 - 1$, c_∞ – "замороженная" скорость звука, x – пространственная координата, t – время, $y = t - x/c_0$ – бегущая координата, v – скорость.

При решении уравнения (1) численными методами полезно знать явные частные решения этого уравнения для использования их в качестве тестов. Частные решения уравнения могут не выражаться явно, а быть решениями некоторых трансцендентных уравнений. Такие частные решения также полезно иметь, если трансцендентное уравнение проще анализировать, чем уравнение (1). В [1] приводится вещественное одномерное (не зависящее от x) решение уравнения (1). В настоящей работе предлагаются вещественные двумерные решения для (1).

Будем искать автомодельное решение для (1) в виде $v = v(\xi)$, где $\xi = Dx - y$ и D есть некоторая константа. Подставив $v(\xi)$ в (1) и обозначив $v' = dv/d\xi$, получим

$$v''\left(v+\frac{mc_0}{2\varepsilon}+\frac{c_0^2D}{\varepsilon}\right)-v'\left(\frac{Dc_0^2}{\tau\varepsilon}+\frac{v}{\tau}\right)+v'^2 = 0. \quad (2)$$

Введем обозначение $z = v + 0.5mc_0/\varepsilon + c_0^2D/\varepsilon$ и, перейдя в (2) к уравнению по z, обозначим $p = -\tau$, $q = 0.5mc_0/\varepsilon$. Получим

$$p(z'z)' + z'(z-q) = 0. \quad (3)$$

Пусть c_1, c_2 – в дальнейшем некоторые константы. После интегрирования (3) примет вид

$$pz'z + \frac{(q-z)^2}{2} = c_1. \quad (4)$$

Проведя в (4) разделение переменных и проинтегрировав повторно, получим

$$-\int\frac{d((z-q)^2-2c_1)}{(z-q)^2-2c_1}-\int\frac{2q\,dz}{(z-q)^2-2c_1} = \frac{\xi}{p}+c_2. \quad (5)$$

1. Предположим, что $c_1 < 0$. В этом случае, после вычисления интегралов в (5) и перехода к начальным обозначениям получим

$$-\ln\left|\left(v+\frac{Dc_0^2}{\varepsilon}\right)^2-2c_1\right|-\frac{mc_0}{\varepsilon\sqrt{-2c_1}}\times$$
$$\times\,\mathrm{arctg}\,\frac{v\varepsilon+Dc_0^2}{\varepsilon\sqrt{-2c_1}} = \frac{y-Dx}{\tau}+c_2. \quad (6)$$

2. Пусть $c_1 = 0$. Тогда (5) приводит к уравнению

$$-\ln\left(v+\frac{Dc_0^2}{\varepsilon}\right)^2+\frac{mc_0}{v\varepsilon+Dc_0^2} = \frac{y-Dx}{\tau}+c_2. \quad (7)$$

3. Пусть $c_1 > 0$. Вычислив интегралы в (5) и перейдя к исходным обозначениям, получим

$$-\ln\left|\left(v+\frac{Dc_0^2}{\varepsilon}\right)^2-2c_1\right|+\frac{mc_0}{2\varepsilon\sqrt{2c_1}}\times$$
$$\times\ln\left|\frac{\sqrt{2c_1}+v+\dfrac{Dc_0^2}{\varepsilon}}{\sqrt{2c_1}-v-\dfrac{Dc_0^2}{\varepsilon}}\right| = \frac{y-Dx}{\tau}+c_2. \quad (8)$$

Уравнения (6) - (8) трансцендентные и в общем случае их решения не определяются в явном виде. Однако, в частных случаях определение явного решения для уравнения (8) возможно. Например, если $2^{-1.5}mc_0c_1^{-0.5}/\varepsilon = 1$, то решения (8) имеют вид

$$v_{1,2} = \pm\exp(0.5((Dx-y)/\tau - c_2)) + c_0(m/2 - Dc_0)/\varepsilon.$$

Если $2^{-1.5}mc_0c_1^{-0.5}/\varepsilon = 2$, то решение (8) может быть найдено в явном виде путем решения уравнения четвертой степени с помощью формул Кардано.

Приведенные выше решения уравнения (1) получены путем введения автомодельности типа "бегущей волны". Заметим, что уравнение (1) имеет двумерные вещественные явные решения, не принадлежащие к указанному типу. Действительно, пусть решение уравнения (1) ищется в виде

$$v(x, y) = X(x) + \frac{y+a}{bx+c}, \tag{9}$$

где $X(x)$ – функция, зависящая только от x и a, b, c – некоторые константы. Подставив (9) в (1) и задав $b = -\varepsilon/c_0^2$, получим

$$\frac{X'}{X} = \frac{\varepsilon}{c_0^2(bx+c)}.$$

Обозначив $c_2 = c/b$, определим, что $X = \exp(c_3)/|x + c_2|$, где c_3 – некоторая константа. Учитывая (9), получим

$$v(x, y) = \frac{\exp(c_3)}{|x+c_2|} - \frac{c_0^2}{\varepsilon}\frac{y+a}{x+c_2}. \tag{10}$$

Заметим, что решение (10) удовлетворяет также и интегродифференциальному уравнению [1, 2], из которого следует уравнение (1):

$$\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\varepsilon}{c_0^2} = \frac{m}{2c_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{y}\frac{\partial v}{\partial y'}\exp((y'-y)/\tau)dy'.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. *Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В.* Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во МГУ, 1983.