АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 1, с. 116 - 122

УДК 534.2

АВТОКОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ГАЗОВОЙ СТРУИ

© 1996 г. А. В. Римский-Корсаков, А. Г. Семенов
Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 17.10.94 г.

В работе рассматриваются автоколебания струи, истекающей из кольцевой щели и импедансной плоскости в свободное пространство, а затем натекающей на другую плоскость или на препятствие, например, имеющее форму кольца, при этом в зоне разворота струй формируется источник объемной скорости, являющийся возбудителем стоячих аксиальных акустических волн в объеме. С использованием критерия Найквиста определены условия возникновения автоколебаний и их зависимость от параметров задачи.

В последние годы интерес к исследованию задач о возникновении автоколебаний при взаимодействии течений газа или жидкости с различными препятствиями несколько уменьшился. Тем не менее большинство из этих задач, частично уже решенных в середине 60 - 70 годов, не потеряли актуальности до настоящего времени. На наш взгляд, результаты этих работ, близких в идейном и методическом отношении к известным, классическим работам Релея, Лэмба, Ландау, Блохинцева, Константинова, Пауэлла, Доака, Фоукс Вильямса, Кэрла, Рибнера [1 - 13] по оценке параметров колебаний различного рода потоков в свободном пространстве и при натекании на преграды с учетом неустойчивости их границ к малым акустическим возмущениям, а также апробированные на модельных и натурных экспериментах подходы к решению в линейном приближении достаточно сложных, по существу, нелинейных по своей природе акусто-газодинамических проблем могут быть и сегодня с успехом использованы в смежных областях акустики и, по-видимому, их роль в описании различного рода акустических процессов будет возрастать. Например, подобные методы в последние годы с применялись для решения задач исследования шума, генерируемого при истечении струй [6 - 13, 18 - 24], нестационарного обтекания тел потоком [14, 15, 17], технологического использования источников мощного ультразвука, выполненных на основе газодинамических свистков [5 - 9, 18, 21], некоторых механизмов образования звука в духовых музыкальных инструментах [5].

Перейдем теперь к описанию стационарной газодинамической картины течения и постановке задач исследования автоколебаний.

Рассмотрим струю, истекающую из кольцевой щели в неподвижной акустически жесткой или импедансной плоскости. В процессе истечения из-за разности статических давлений снаружи и внутри кольца при удалении от плоскости струя поджимается по радиусу к оси кольца. Для оценки стационарной картины поджатия введем цилиндрическую систему координат с началом на плоскости в центре кольца. Ввиду очевидной осевой симметрии течения для его описания достаточно двух координат – радиальной r и продольной x. Обозначая координату середины щели r_0 при $x = 0$, для расчета среднего изгиба струи имеем уравнение

$$\rho U^2\delta(d^2r/dx^2) = P_0 - P = \Delta P.$$

Здесь ρ, U – соответственно плотность и скорость струи, δ – ее толщина ($\delta \ll r_0$), P_0 и P – статические давления внутри и снаружи кольцевой струи. Интегрируя предыдущее уравнение по z дважды в пределах от 0 до L, где L – продольный размер образующегося осесимметричного объема от плоскости до зоны частичного разворота струи, получим

$$L = [(2\rho U^2\delta/\Delta P)(r_0 - r_L)]^{1/2}.$$

При этом для оценки r_L рассмотрим два случая. В первом случае кольцевая струя натекает на кольцевую преграду радиуса r_1 меньшего r_0, $(r_0 - r_L) = (r_0 - r_1) = \Delta r > 0$, а во втором – истечение свободное, преграда отсутствует и струя поджимается до слияния на оси кольца ($r_L = 0$), тогда имеем для высоты цилиндрического $L_ц$ и конического $L_к$ объемов соответственно

$$L_ц = [(2\rho U^2\delta/\Delta P)\Delta r]^{1/2}, \quad L_к = [(2\rho U^2\delta/\Delta P)r_0]^{1/2}.$$

Самовозбуждение акустических колебаний в этих объемах может наблюдаться только при наличии частичного разворота течения струи (обратных токов). Соответствующая объемная скорость обратных токов $V_{об}$ пропорциональна полному объемному расходу струи Γ ($\Gamma = 2\pi\delta r_0 U$) и локальному углу поворота потока ($\theta = dr/dx$ при $x = L_ц$ или $x = L_к$). Таким образом, имеем

$$\Gamma'_ц = \pi\delta r_0 U[1 - \cos(\Delta P L_ц/\rho U^2\delta)],$$

$$\Gamma'_к = \pi\delta r_0 U[1 - \cos(\Delta P L_к/\rho U^2\delta)].$$

Полезно отметить, что, с другой стороны, объемная скорость обратных токов равна произведению эффективной площади соответствующего источника на местную скорость струи в направлении плоскости. Если последняя известна, то может быть оценена эффективная площадь источника и наоборот. Ниже мы рассмотрим обе упомянутые схемы течения, при этом будем полагать, что изменение угла поворота струи связано с акустическим полем, генерируемым источником объемной скорости, а интенсивность такого источника, в свою очередь, определяется распределением акустического поля вдоль внутренней поверхности струи, т.е. рассматриваемые автоколебания являются следствием взаимодействия (взаимной фазировки) этих процессов. Вначале рассмотрим условия самовозбуждения кольцевой струи, натекающей на кольцевое препятствие.

Пусть среда внутри описанного цилиндрического объема имеет плотность и скорость звука ρ_0 и c_0 соответственно. Положим также, что благодаря достаточно высокой, например, сверхзвуковой скорости струи, ограничивающей боковую поверхность объема, волны, распространяющиеся вдоль оси объема под малыми углами к ее границе, испытывают полное отражение [13] – как в цилиндрической трубе с жесткими стенками, а колебания границы осесимметричны и малы, так что они практически не влияют на условия распространения акустических волн во внутренней области струи. Торцевая плоскость пусть имеет импеданс ζ (при площади $S_0 = \pi r_0^2$), а за кольцевым препятствием, вниз по течению струи, предусмотрен полубесконечный цилиндрический канал (газоход) радиусом, равным r_0, так чтобы отражением волн в этой зоне можно было пренебречь. Пренебрежем также действием акустических волн, распространяющихся от препятствия снаружи струи. Очевидно, что величина объемного расхода, соответствующая отклоненной внутрь объема части потока, будет при этом пропорциональна Γ и местному радиальному отклонению струи $y(x, t)$ под воздействием поля давления p акустических стоячих волн частоты ω: $p = [p_1 e^{-jk_0x} + p_2 e^{jk_0x}]$, где $k_0 = \omega/c_0$, при этом на единицу длины струи действует сила $2\pi r_0 p$. Согласно работе [5] можно записать

$$y(x, t) = [e^{j\omega t}/2\pi r_0\delta\rho U^2] \int_0^x F(\xi)(x-\xi)e^{-jk(x-\xi)}d\xi, \quad (1)$$

где $k = \omega/U$, $F(x) = 2\pi r_0 p(x) = 2\pi r_0 \times [p_1 e^{-jk_0x} + p_2 e^{jk_0x}]$, а амплитуды давлений в прямой и обратной волне p_1 и p_2 однозначно определяются по заданной объемной скорости источника, находящегося в сечении $x = L$, при дополнительных условиях, что в сечении $x = 0$ волновод нагружен акустическим сопротивлением ζ/S_0, а в сечении $x = L$ к нему примкнут полубесконечный волновод с сопротивлением $\rho_0 c_0 S_0$. Соответствующие условия на концах волновода запишутся в виде

$$[(p_1 + p_2)/(p_1 - p_2)] = -\zeta/\rho_0 c_0 S_0 \text{ при } (x = 0), \quad (2)$$

$$\begin{gathered}(S_0/\rho_0 c_0)\,[p_1 e^{-jk_0x} - p_2 e^{jk_0x}] + U_{об} - (S_0/\rho_0 c_0) \times \\ \times [p_1 e^{-jk_0x} + p_2 e^{jk_0x}] = 0 \text{ при } (x = L).\end{gathered} \quad (3)$$

Если смысл условия (2) очевиден, то условие (3) выражает тот факт, что объемная колебательная скорость, определяемая системой звуковых волн в двух волноводах – конечном цилиндрическом и полубесконечном (первый и третий член условия) уравновешивается объемной колебательной скоростью источника $V_{об}$, установленного между ними. Исключая P_1 и P_2 из выражения для $F(x)$ и производя интегрирование в формуле (1), находим выражение $y(x, t)$ для радиального отклонения струи

$$\begin{gathered}y(x, t) = (U_{об}/US_0\delta)\,(4\rho_0/\rho)\,M_0^{-1} e^{j(\omega t - k_0L - kx)}\cdot \\ \{\kappa(k-k_0)^{-2}[1 + j(k-k_0)x - e^{j(k-k_0)x}] + \\ + (k+k_0)^{-2}[1 + j(k+k_0)x - e^{j(k+k_0)x}]\},\end{gathered} \quad (4)$$

где $\kappa = [(\zeta - \rho_0 c_0 S_0)/(\zeta + \rho_0 c_0 S_0)]$ – коэффициент отражения звуковых волн от импедансной плоскости, $M_0 = (U/c_0)$ – внешнее число Маха струи. Последняя подлежащая определению величина в (4) – исходная колебательная скорость $U_{об}$ может быть также выражена через радиальное отклонение струи $y(x, t)$ при $x = L$ с использованием уже упоминавшихся выше геометрических соображений: $U_{об} = -2\pi\alpha r_0 U y(L, t)$, где α – геометрический коэффициент пропорциональности, сравнимый с единицей по порядку величины, зависящий от конфигурации кольцевого препятствия и соотношения между средним диаметром струи, ее шириной и диаметром препятствия, знак минус в данной формуле отражает тот очевидный факт, что при увеличении $y(L, t)$ – отклонения струи вдоль радиуса в направлении от центра цилиндрического волновода, объемная скорость течения, втекающего в волновод, уменьшается, и наоборот. Мы, таким образом, получили возможность оценить условия возникновения положительной обратной связи в рассматриваемой колебательной системе. Величина объемной скорости, развиваемой в волноводе под действием системы звуковых волн, за счет радиального отклонения струи согласно формуле (4) должна превышать величину исходной объемной скорости $V_{об}$ и, таким образом, их отношение при $x = L$ может быть представлено в виде комплексной функции

$$\begin{gathered} -(\alpha/r_0\delta)\,(\rho_0/\rho)\,M_0^{-1}e^{-j(k_0+k)L}\times \\ \times\{\kappa(k-k_0)^{-2}[1+j(k-k_0)L-e^{j(k-k_0)L}]+ \\ +(k+k_0)^{-2}[1+j(k+k_0)L-e^{j(k+k_0)L}]\}. \end{gathered} \tag{5}$$

Выражение (5) можно рассматривать в качестве известного условия Найквиста, полагая, что возбуждение автоколебаний с постоянной амплитудой возможно, если его вещественная часть превосходит единицу. Частота процесса определится из условия обращения в нуль мнимой части выражения (5). Особенности действия этих закономерностей легче всего продемонстрировать для простейших частных случаев.

1. Пусть скорость струи U много больше скорости звука в резонирующем объеме, так что $M_0 \gg 1$ и $k \ll k_0$, пусть также торцевая плоскость полностью отражает звук, так что $(\zeta/\rho_0c_0S_0) \gg 1$ и $\kappa = 1$. Тогда выражение (5) для оценки условий самовозбуждения системы принимает вид

$$\begin{gathered} -(\alpha L^2/r_0\delta)\,(\rho_0/\rho)\,M_0^{-1}e^{-jk_0L}\times \\ \times\{[(k_0L)/2]^{-2}\sin^2[(k_0L)/2]\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Частоты возможных автоколебаний системы в этом случае определятся равенством $\sin(k_0L) = 0$, т.е. $\omega_n = (c_0/2L)(2n+1)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, где нечетные корни последнего уравнения выбраны так, чтобы удовлетворить второму необходимому условию $\cos(k_0L) = -1$, а достаточное условие, например, для $n = 0$, при этом принимает вид:

$$(L/r_0) > (\pi/2)(\rho/\rho_0)^{1/2}(\alpha)^{-1/2}(M_0\delta/r_0)^{1/2}.$$

2. Пусть импедансная плоскость оборудована звукопоглотителем, так что обеспечивается равенство нулю коэффициента отражения $\kappa = 0$ ($\zeta = \rho_0c_0S_0$), тогда из формулы (5) необходимое (фазовое) условие самовозбуждения системы несколько усложняется и получится в виде

$$\cos(k+k_0)L + (k+k_0)L\sin(k+k_0)L < 1. \tag{7}$$

При этом частоты автоколебаний системы определятся как корни уравнения $(k + k_0)L = \mathrm{tg}(k + k_0)L$, т.е. $(k + k_0)L \cong (2m + 1)\pi/2$, причем корни существуют только при $m > 1$, тогда как условие (7) может быть удовлетворено только при нечетных m ($m = 1, 3, \ldots$), при этом достаточное амплитудное условие принимает вид, несколько отличный от полученного в п. 1:

$$\begin{gathered} (L/r_0) > (\pi/2)(\rho/\rho_0)^{1/2}(\alpha)^{-1/2}(M_0\delta/r_0)^{1/2}\times \\ \times(2m+1)^{1/2}[1+2/\pi(2m+1)]^{-1/2}. \end{gathered}$$

Причем уже при $m = 1$, $2/\pi(2m + 1)$ приближенно равно 0.2, так что последний множитель условия самовозбуждения можно полагать приближенно равным 1 при $m \geq 3$. Сравнение с условиями п. 1 показывает, что для возбуждения самой низкой моды автоколебаний в п. 2 требуется несколько большее отношение (L/r_0). Зато для более высоких частот условие самовозбуждения системы даже несколько облегчается.

3. Пусть скорость струи близка к скорости звука внутри резонансного объема, тогда, полагая $k = k_0$ и раскрывая неопределенность при переходе к пределу в выражении (5), получим условие Найквиста в виде

$$\begin{gathered} -(\alpha/r_0\delta)\,(\rho_0/\rho)\,M_0^{-1}L^2\{(\kappa/2)\,e^{-2jk_0L}+ \\ +[(1+2jk_0L)/(k_0L)^2]\,e^{-2jk_0L}-(k_0L)^{-2}\}, \end{gathered} \tag{8}$$

которое, например, для $\kappa = 1$, как и ранее, превращается в уравнение для частот $\mathrm{tg}(2k_0L) = (2k_0L)/[1 + (2k_0L)^2/8]$ и условие самовозбуждения. Значения корней последнего уравнения, удовлетворяющие условию (8), должны также удовлетворять неравенствам: $\pi < (2k_0L) < 3\pi/2$; $3\pi < (2k_0L) < 7\pi/2$; $5\pi < (2k_0L) < 11\pi/2$ и так далее. Первый из таких корней приближенно равен $(2k_0L) = 0$ и условие, с учетом $M_0 = 1$, приближенно имеет вид: $(L/r_0) > (\rho/\rho_0)^{1/2}(\alpha)^{-1/2}(\delta/r_0)^{1/2}$. Заметим, что данный случай рассмотрен здесь в некотором отношении формально, так как при $U = c_0$ внутренняя граница струи уже вряд ли может считаться в такой же мере акустически жесткой, как это было возможно в двух предыдущих случаях, при $M_0 \gg 1$.

Выше мы предполагали, что поперечные колебания кольцевой струи не могут существенно повлиять на распространение звуковых волн внутри цилиндрического объема и уж, по крайней мере, исключено обратное влияние звуковых волн на колебания струи. Это было в достаточной мере справедливо при $M_0 \gg 1$, однако для более полной оценки условий возникновения и параметров автоколебаний в замкнутой форме при конечных скоростях струи мы сделаем попытку учесть влияние связи этих двух видов колебаний.

Рассмотрим цилиндрический слой газа высотой dx, расположенный в сечении x волновода радиусом r_0, рассмотренного выше. Если обозначить возмущение давления и плотности среды под воздействием акустических автоколебаний в слое через p и ρ' ($\rho' = p/c_0^2$), а линейную скорость частиц среды v ($U_{об} = v\pi r_0^2$), то уравнение неразрывности (сплошности) среды и уравнение Эйлера в пренебрежении сносом звуковых волн в слое за счет средней скорости газа в волноводе запишутся в виде ($f = y(x, t)/2r_0$, $y > 0$ если оно направлено наружу – по радиусу объема)

$$-d\rho'/dt = 4\rho_0\partial f/\partial t + (\rho_0/\pi r_0^2)\,\partial U_{об}/\partial t = 0, \tag{9}$$

$$\rho_0\partial v/\partial t = -\partial p/\partial x. \tag{10}$$

Комбинируя эти уравнения и используя, как обычно, связь ρ' и p в адиабатической звуковой волне, получим для определения акустического давления уравнение

$$\partial^2 p/\partial t^2 - c_0^2 \partial^2/\partial x^2 + 4\rho_0 c_0 \partial^2 f/\partial t^2 = 0. \quad (11)$$

Уравнение движения струи, как и ранее [5], возьмем с учетом инерционности частиц струи, движущихся со скоростью U, в форме

$$\partial^2 f/\partial t^2 + 2U\partial^2 f/\partial t \partial x + U^2 \partial^2 f/\partial x^2 = p/2\rho\delta r_0. \quad (12)$$

Переходя к гармонической ($e^{j\omega t}$) зависимости искомых величин f и p от времени преобразуем уравнения (11) и (12) к виду

$$-[k_0^2 + \partial^2/\partial x^2]\, p(x) - 4\rho_0 \omega^2 f(x) = 0, \quad (13)$$

$$[\partial^2/\partial x^2 + 2jk\partial/\partial x - k^2] f(x) = p(x)/2\rho\delta r_0 U^2. \quad (14)$$

Исключая $f(x)$ из уравнений (13), (14) и переходя к безразмерной продольной координате ξ ($\xi = k_0 x$), получим итоговое уравнение четвертого порядка для определения $p(\xi)$

$$\{[\partial^2/\partial \xi^2 + (4j/M_0)\,\partial/\partial\xi - M_0^{-2}] \times (\partial^2/\partial\xi^2 + 1) + \beta M_0^2\}\, p(\xi) = 0, \quad (15)$$

где обозначено $\beta = (\rho_0/\rho)(\lambda_0^2/2\pi^2\delta r_0)$, $\lambda_0 = 2\pi c_0/\omega$ – длина звуковой волны в резонансном объеме. Если искать $p(\xi)$ в виде $p(\xi) = Ce^{j\gamma\xi}$ ($k = k_0 M_0^{-1}$), то получим характеристическое уравнение для определения параметров возможных колебаний системы

$$\Phi(\gamma) = (\gamma + M_0^{-1})^2 (1-\gamma^2) - \beta M_0^{-2} = 0. \quad (16)$$

Из (16) легко усмотреть связь рассматриваемой задачи с предыдущей. Действительно, влияние взаимодействия колебаний струи с акустическими волнами в волноводе, по существу, определяется величиной числа Маха M_0 или последним членом уравнения (16). При $M_0 \gg 1$, с точностью до членов линейных по M_0^{-1}, уравнение (16) упрощается и имеет два кратных корня $\gamma_{1,2} = -M_0^{-1}$, соответствующие части решения уравнения (15) вида $C_1 + C_2 x e^{-jkx}$ для свободной, невзаимодействующей с волноводом струи (заметим, что ее колебания вниз по течению нарастают линейно) и корни $\gamma_{3,4} = \pm 1$, соответствующие волновым числам прямой и отраженной акустических волн в волноводе с жесткими стенками и решениями вида $C_{3,4} e^{\pm jk_0 x}$, где $C_1 - C_4$ – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий. При учете взаимодействия кратный корень $\gamma_{1,2}$ расщепляется и решения (15) приобретают более общий вид $p(x) = \sum C_i e^{j\gamma_i k_0 x}$ и, соответственно $y(x) = \sum A_i e^{j\gamma_i k_0 x}$, ($i$ = 1, 2, 3, 4). Для анализа поведения корней γ_i рассмотрим подробнее поведение многочлена (16) $\Phi(\gamma)$ при $\beta = 0$.

Если $M_0 > 1$, то кратный корень многочлена $\gamma_{1,2}$ лежит в промежутке между корнями $\gamma_{3,4}$ и соответствует минимуму $\Phi(\gamma)$, причем общий характер его зависимости от γ представляет собой в этом случае кривую с двумя максимумами и одним минимумом. Поскольку $\gamma_{\min} = -M_0^{-1}$ и $\Phi(\gamma_{\min}) = 0$, то легко также найти значения двух других экстремумов

$$\gamma_{\max} = -(4M_0)^{-1} \pm [(4M_0)^{-2} + (1/2)]^{1/2}, \quad (17)$$

$$\Phi(\gamma_{\max}) = (1/4) + (5/8M_0^2) - (32M_0^4)^{-1} \pm \pm [(8M_0^2)^{-1} + 1]\, M_0^{-1} [(4M_0)^{-2} + (1/2)]^{1/2}.$$

Так что при $M_0 \gg 1$, $\gamma_{\max} = \pm(1/2)^{1/2}$, а $\Phi(\gamma_{\max}) = 1/4$. При $M_0 = 1$ появляется трехкратный корень $\gamma = -1$, причем в этой точке многочлен имеет точку перегиба $\Phi(-1) = 0$, а максимум только один ($\gamma_{\max} = 1/2$) и в этой точке $\Phi(\gamma_{\max}) = 27/16$. С другой стороны, при $M_0 < 1$ кратный корень $-M_0^{-1}$ соответствует максимуму $\Phi_{\max} = 0$, затем значения многочлена еще уменьшаются по мере уменьшения γ, а при увеличении γ достигают минимума в отрицательной области ($\Phi_{\min} < 0$) при значении $-M_0^{-1} < \gamma_{\min} < -1$, а значение γ, при котором достигается второй максимум, приближается при этом к $\gamma_{\max} = 0$. Что касается значений многочлена в этих точках, то, например, при $M_0 = 1/4$, $\Phi_{\max} = [9 + 6(3)^{1/2}]/4$, а $\Phi_{\min} = [9 - 6(3)^{1/2}]/4$.

Возвращаясь теперь к решению уравнения (16) в общем случае, при $\beta > 0$, заметим что характер поведения корней можно легко представить, мысленно смещая проанализированные выше кривые $\Phi(\gamma)$ при $M_0 \gg 1$ вниз по оси ординат на величину βM_0^{-2}. Так, в случае $M_0 > 1$ очевидно получим, что (16) имеет 4 вещественных корня, пока βM_0^{-2} меньше наименьшего из максимальных значений многочлена (17) $\Phi_{\max 1}$. В области $\Phi_{\max 1} < \beta M_0^{-2} < \Phi_{\max 2}$ два корня вещественные, два комплексные (сопряженные), и, наконец, при $\beta M_0^{-2} > \Phi_{\max 2}$ все корни комплексные (попарно сопряженные). Очевидно, что при $M_0 > 1$ возможность появления комплексных корней, т.е. неустойчивых решений, прямо связана с увеличением β, т.е. с понижением частоты автоколебаний. Так, например, для практически актуального случая горячей струи со скоростью истечения около 2000 м/сек, при скорости звука в волноводе 500 м/сек ($M_0 = 4$) для раскачки автоколебаний необходимо, чтобы было $\beta M_0^{-2} > 0.38$ или $\beta > 6$ или, соответственно, частота автоколебаний $\omega^* \le 725(\rho_0/\rho)^{1/2}(2\pi r_0 \delta)^{-1/2}$. Тогда, принимая $(\rho_0/\rho) = 2$,

$\delta = 0.5$ м и $r_0 = 10$ м, получим $\omega^* \leq 180$ Гц или $f^* = \omega^*/2\pi \leq 30$ Гц, что оказалось близким к наблюдавшейся практически (20 - 25 Гц) частоте автоколебаний кольцевой системы отдельных струй [24].

В случае дозвукового течения струи $M_0 < 1$ первые два комплексных корня появляются уже при сколь угодно малых значениях β, отличных от нуля, а остальные два переходят в комплексные лишь при $\beta M_0^{-2} > \Phi_{\max}$, т.е. качественно при соотношениях параметров, аналогичных случаю $M_0 > 1$, рассмотренному выше, с ограничением сверху на частоту прогнозируемых автоколебаний.

При рассмотрении общего случая, когда кратные корни отсутствуют, очевидно, что для нахождения формы колебаний струи $y(x)$ и распределения звукового давления $p(x)$ необходимо определить восемь постоянных неизвестных C_n и A_n. Для этого необходимо иметь восемь уравнений – четыре из них получаются подстановкой рядов-решений уравнения (15) в одно из уравнений (13) или (14), линейно связывающих C_n с A_n, остальные четыре линейных соотношения найдутся из граничных условий для акустического давления (2) и объемной скорости (3) на концах волновода, а также условий равенства нулю $y(x)$ и $y'(x)$ на срезе кольцевой щели. В качестве дополнительного условия, позволяющего получить замкнутые формулы для расчета частот и амплитуд автоколебаний, необходимо также задать соотношение, связывающее расстояние до препятствия (L), полный объемный расход струи и амплитуду источника объемной скорости, т.е. коэффициент $\alpha(L)$ при рассматриваемом наборе неустойчивых и устойчивых решений. Для этой цели может быть введено эвристическое условие, например, состоящее в том, что фаза объемной скорости источника у препятствия ($x = L$) совпадает с фазой волны, бегущей вниз по струе. В то же время, поскольку возбуждение колебаний струи связано с наличием обратной волны, распространяющейся вверх по волноводу с другой, собственной скоростью, то именно соотношение фаз прямой и обратной волны при $x = L$ и является определяющим для возможности реализации автоколебаний. С другой стороны, у препятствия превалирует по амплитуде экспоненциально нарастающее решение для колебаний струи, поэтому представляется разумной гипотеза о том, что при попадании препятствия в пучность радиального смещения струи $f(x)$ – объемная скорость источника в волноводе будет максимальной. Отсюда дополнительное условие принимает вид $2m\lambda' = (2n + 1)\lambda''$, где m и n целые числа, а λ' и λ'' – длины волн колебаний, распространяющихся вверх по волноводу (в частном случае, рассматриваемом ниже, λ' – определяется устойчивым решением, соответствующим кратному действительному корню $\gamma_2 = 1/2$) и вниз по струе (в рассматриваемом случае λ'' определяется неустойчивым решением, соответствующим действительной части корня $\mathrm{Re}\gamma_3 = -3/2$). Таким образом, решение поставленной задачи по существу закончено. Анализ решений соответствующей системы линейных уравнений позволяет найти и исследовать структуру общего аналитического решения поставленной задачи, которое не приводится здесь ввиду громоздкости. Представляют интерес два частных случая общего решения.

Дело в том, что при натекании высокоскоростной сверхзвуковой струи на препятствие, как правило, образуется прямой скачок уплотнения и течение в непосредственной близости от препятствия легко переходит из сверхзвукового в дозвуковое. При рассмотрении же чисто дозвукового случая, как мы видели выше, характер решения изменяется – в решении характеристического уравнения (16) реализуются два комплексных корня и еще два, так же как и при $M_0 > 1$, могут перейти в комплексные только при существенном понижении частоты процесса $\beta M_0^{-2} > \Phi_{\max}$. В рамках рассмотренного выше численного примера для нас будет представлять интерес сравнение решений, полученных для критического чисто дозвукового случая, где два корня действительные и вырожденные $\gamma_{1,2} = 1/2$ и два комплексные $\gamma_{3,4} = -(3/2) \pm j(2)^{1/2}/2$ ($\beta = 27/16$, $M_0 = 1$) и случая чисто сверхзвукового течения ($M_0 = 4$), когда короткий участок дозвукового течения в непосредственной близости от препятствия не принимается во внимание. При этом для оценок используются те же параметры реального течения горячей сверхзвуковой струи и резонансного объема ($U = 2000$ м/сек, $c_0 = 500$ м/сек, $\rho_0 c_0 = 350$ кг/м^{2}сек, внешнее число Маха струи M_0 равно 4 до скачка и 1 после скачка, $\zeta/\rho_0 c_0 S_0 \gg 1$), что и ранее. Выше мы видели, что условия самовозбуждения соответствующих объемов по частоте оказываются близкими: $f^* = \omega^*/2\pi \leq 30$ Гц. Использование общего решения с учетом дополнительного условия самовозбуждения системы, обсуждавшегося выше, позволяет сравнить диапазон высот волновода, при которых реализуются автоколебания, однако и эти оценки также, к сожалению, оказываются близкими: $2\pi < k_0^* L < 2.33\pi$. Последним параметром для сравнения оказывается достигаемая амплитуда автоколебательного процесса в объеме волновода или, например, на плоскости при $x = 0$, которая могла быть также сравнена с непосредственно измеренной в соответствующем эксперименте. В результате вычислений для чисто дозвукового течения $p(0) \simeq 0.062\rho_0 c_0 U\delta/r_0$ ($\simeq$163 дБ), в то время как для сверхзвукового течения $p(0) \simeq 0.964\rho_0 c_0 U\delta/r_0$ ($\simeq$187 дБ), то есть практически на порядок (в 16 раз) больше. Это связано с тем, что для раскачки сверхзвуковой струи, обеспечивающей эквивалентную объемную скорость при взаимодействии струи с препятствием, требуется значительно большее акустическое давление на ее поверхность, чем для дозвуковой и, во-вторых, для дозвуковой струи ожидаемый характер нарастания колебаний вниз по течению – экспоненциальный, в то время как для сверхзвуковой – линейный; струя в данном случае "слабо неустойчива". Эксперименты дают промежуточное значение амплитуды звукового давления на плоскости, более близкое к результату расчета в случае чисто дозвукового сечения (≈167 - 170 дБ). В действительности, как мы уже отмечали выше, переход течения к дозвуковому происходит не у корня струи, как предполагалось при оценке автоколебаний для чисто дозвукового течения, а вблизи преграды. Возможный учет этого обстоятельства, хотя и весьма усложнит расчеты, все же позволяет ожидать благоприятной корректировки результата, а также объясняет небольшое расхождение результатов рассмотренных выше расчетов с экспериментом.

Последняя часть задачи касается автоколебаний свободной струи, не взаимодействующей с препятствием. В этом случае, согласно результатам рассмотрения стационарной газодинамической картины течения, аппроксимируем полость внутри кольцевой струи конусом. Уравнение для акустического потенциала ϕ в коническом волноводе с сечением $S(x)$ и углом полураскрыва θ принимает вид

$$c_0^{-2}(\partial^2\phi/\partial t^2) = \partial^2\phi/\partial x^2 + 2x^{-1}(\partial\phi/\partial x),\quad S(x) = \pi(x-L)^2\operatorname{tg}^2\theta. \tag{18}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее уже упоминавшимся выше условиям акустической жесткости плоскости и стенок сверхзвуковой струи [8], может быть записано в виде

$$\phi(x,t) = A(k_0x)^{-1}\cos^{-1}(k_0L)\cos k_0(x-L)e^{-j\omega t} \tag{19}$$

при этом в квазистатическом приближении ($k_0r_0 \ll 1$), соответствующее акустическое давление ($p = -j\omega\rho_0(\partial\phi/\partial t)$), как мы видели выше, приводит к дополнительному, по отношению к статическому, повороту струи в вершине конуса на угол

$$\Delta\theta_1 = Aj\omega(\rho_0/\rho\delta U^2)\cos^{-1}(k_0L)\times \times\int_0^L (k_0x)^{-1}\cos k_0(x-L)dx. \tag{20}$$

Вторым фактором, обеспечивающим дополнительный поворот струи в вершине конуса, является "скачкообразное" изменение направления сверхзвуковой струи $\theta_2 = -(M^2-1)^{1/2}\gamma^{-1}M^{-2}p(x=0)P_0^{-1}$, где M и γ внутренние число Маха и показатель адиабаты струи, P_0 – статическое давление внутри волновода, при изменении давления вблизи среза сопла, связанное с внезапным изменением нерасчетности и перестройкой внутренней системы ударных волн [19]. При распространении вниз по струе, до вершины конуса в сечении $x = L$, этот дополнительный поворот струи усиливается за счет низкочастотной неустойчивости границы [16, 20 - 23] и, таким образом, в целом за счет указанного специфического для сверхзвуковых струй фактора обеспечивается дополнительный поворот струи в вершине конуса

$$\Delta\theta_2 = -(M^2-1)^{1/2}\kappa^{-1}M^{-2}p(0)P_0^{-1}\times \times[\operatorname{ch}\mu + i(\rho/\rho_0)^{1/2}\operatorname{sh}\mu]e^{j\omega LU^{-1}}, \tag{21}$$

где $\mu = (\omega/U)(\rho_0/\rho)^{1/2}L$. Учитывая, что суммарный поворот $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$, а также очевидное соотношение для амплитуды объемного расхода струи в направлении плоскости $\Gamma' = \Gamma(\Delta\theta/2)\sin\theta$, которое в свою очередь должно совпадать с пределом выражения $\Gamma' = \rho_0 v(x)S(x)$ при x стремящемся к L. В дальнейшем, используя соображения, аналогичные изложенным для цилиндрического волновода, находим дисперсионное соотношение для расчета возможных частот и амплитуд автоколебаний. Не останавливаясь на подробностях расчета, отметим, что, поскольку в нулевом приближении необходимо, чтобы $\cos(k_0L) = 0$, то, как легко показать, низшей возможной частотой автоколебаний будет частота, определяемая из условия $(k_0L) = 3\pi/2$, а не $(k_0L) = \pi/2$, так как только в этом случае суммарный поворот струи в вершине конуса обеспечивает раскачку колебаний, т.е. автоколебания должны наблюдаться при высоте конуса $L^* = 3\lambda^*/4$, где $\lambda^* = 2\pi c_0/\omega^*$, что также близко к результатам натурных и модельных экспериментов.

Авторы выражают признательность лично Дж. Соросу, поскольку подготовка данной статьи к печати проходила при частичной поддержке Программы долговременных грантов Международного научного фонд (фонда Сороса) в соответствии с грантами MNA.000 и MNA.300, а также Российскому фонду фундаментальных исследований, поддержавшему работу в 1995 году (грант 95-02-03627-а), при окончательной доработке текста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стретт Дж. (лорд Релей)* Теория звука. Т. 1. Т. 2. М., Гостехиздат, 1957. Т. 1. 504 с. Т. 2. 476 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., Наука, 1986. 736 с.
4. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.-Л., Гостехиздат, 1946. 270 с.
5. *Константинов Б.П.* Гидродинамическое звукообразование и распространение звука в ограниченной среде. Л., Наука, 1974. 144 с.
6. *Powell A.* On the Mechanism of Chocked Jet Noise // Proc. Phys. Soc. 1953. B. V. 66. P. 1039.

7. *Powell A.* The Sound - Producing Oscillations of Round Underexpanded Jets Impinging on Normal Plates // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 83. P. 515.
8. *Powell A.* Nature of the Sound Sources in Low Speed Jet Impingement // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. V. 90. P. 3326.
9. *Powell A., Umeda Y., Ishii R.* Observations of the Oscillation Modes of Choked Circular Jet // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 92. P. 2823.
10. *Doak P., Halliwell N., Nelson P.* Fluid Dynamics of a Flow Excited Resonance // J. Sound and Vibrations. Part I: Experiment, 1981. V. 78; P. 15; Part II: Low Acoustic Interaction. 1985. V. 91. P. 375.
11. *Ffowcs Williams J., Hill D.* On the Scattering of Evanescent Waves into Sound // J. Fluid Mech. 1987. V. 184. P. 101.
12. *Curle N.* The Influence of Solid Boundaries upon Aerodynamic Sound // Proc. Roy. Soc. 1955. A. V. 231. P. 505.
13. *Ribner H.S.* Reflection, Transmission and Amplification of Sound by a Moving Medium // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. V. 29. P. 435.
14. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957. 476 с.
15. *Tam Ch.K.W.* Discrete Tones of Isolated Airfoils // Journ. Acoust. Soc. of America. 1974. V. 55. P. 1173.
16. *Michalke A.* The Instability of Free Shear Layers. A Survey on the State of Art // Deutshe Luft und Raumfahrt, FB 70-51. 1970.
17. *Etkin B., Keefe R.T., Korbacher G.K.* Acoustic Radiation of a Stationary Cyllinder in a Subsonic Stream (Aeolian Tones) // J Acoust. Soc. Amer. 1957. V. 29. P. 467.
18. *Rimskii-Korsakov A.V.* Aerodynamic Noise Sources // J. Sound and Vibrations. 1975. V. 43. P. 199.
19. *Седельников Т.Х.* Об усилении возмущений при отражении от среза сопла для сверхзвуковой струи // Вибрации и шумы (физические исследования, сб. статей под ред. А.В. Римского-Корсакова, 1969. С. 157.
20. *Седельников Т.Х.* О частотном спектре шума сверхзвуковой струи // Физика аэродинамических шумов, сб. статей под ред. А.В. Римского-Корсакова, 1967. С. 83.
21. *Седельников Т.Х.* Автоколебательное шумообразование при истечении газовых струй. М., Наука, 1971. 85 с.
22. *Седельников Т.Х., Семенов А.Г.* Применение метода Винера-Хопфа к задаче о шумообразовании полубесконечной свободной сверхзвуковой струей // Труды Акустического института. Вып. IV. 1968. С. 76.
23. *Семенов А.Г.* Задача об излучении звука сверхзвуковой струей, истекающей из полубесконечного цилиндра // Труды III Всесоюзной научно-технической конференции по прикладной аэродинамике. Киев, 1973. С. 148.
24. *Римский-Корсаков А.В., Седельников Т.Х., Семенов А.Г.* Автоколебания кольцевой газовой струи // Отчет Акустического института. М., 1975.

Self-Sustained Oscillations of a Circular Gas Jet

A. V. Rimskii-Korsakov and A. G. Semenov

Self-sustained oscillations of a jet flowing out of an annular orifice in an impedance plane into an unconfined space and impinging on another plane or an obstacle of, for example annular shape, are analyzed. This arrangement forms a source of volumetric flow rate in the deflection region of the jet, which may result in excitation of axial acoustic waves. By using the Nyquist stability criterion, conditions favoring the onset of self-sustained oscillations are found, and their dependence on the parameters of the problem is determined.