АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 1, с. 83 - 87

УДК 534.222

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОФИЛИРОВАНИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ИМПУЛЬСОВ

© 1996 г. Н. Н. Мягков

Отдел теоретических проблем РАН
121002 Москва, ул. Веснина, 12

Поступила в редакцию 09.09.94 г.

Рассмотрена задача максимизации энергии слабой ударной волны в плотной среде за счет выбора оптимального профиля давления на границе вещества. Движение среды описывается уравнением Бюргерса. Для экстремально больших чисел Рейнольдса решение построено с привлечением принципа максимума. Показано, что энергия короткого удара, который моделируется на границе δ-импульсом, является верхним пределом энергии произвольного импульса сжатия, имеющего на границе такой же импульс давления.

1. Во многих задачах физики удара представляет интерес оптимизировать динамические параметры ударно-волнового сжатия на некотором расстоянии от границы вещества за счет изменения профиля давления, приложенного к границе. Теоретические вопросы этой проблемы рассматривались, например, в [1, 2], экспериментальные – в работах [3, 4]. Существует, вообще говоря, два разных типа задач. Первый – минимизация энтропийных потерь в массе вещества, заключенного между границей и фиксированной частицей, где оптимизируются динамические параметры волны, второй – минимизация энтропии в фиксированной лагранжевой частице. Эти задачи по существу преследуют разные цели: максимизация энергии ударно-волнового сжатия [1] в первом случае и изэнтропизация сжатия для стимулирования химических реакций [3] во втором.

В плотных средах давления в сотни килобар обычно малы по сравнению с модулем всестороннего сжатия среды, но значительно превышают предел упругости, поэтому для описания волн такой интенсивности, обычно развиваемых в ударно-волновых экспериментах, можно воспользоваться гидродинамическим приближением и приближением нелинейной акустики [5] (учет упругопластического поведения см. в [6]). В этом случае динамические параметры волны будут определяться энергией $E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 d\xi$, в то время как импульс $\bar{q} = \int_{-\infty}^{+\infty} q d\xi$ постоянен для любой лагранжевой частицы η. Здесь q – отношение давления к модулю всестороннего сжатия среды, ξ – бегущая координата. Заметим, что $E(\eta)$ с точностью до постоянного множителя определяет механическую энергию слабой ударной волны [7].

Для ограниченных возмущений, достаточно быстро убывающих при $|\xi| \longrightarrow \infty$, полагая дисперсию и диссипацию слабой, можно получить

$$\frac{dE}{d\eta} = -\Delta S(\eta). \tag{1}$$

Приращение энтропии ΔS в лагранжевой частице η за время ее волнового движения есть сумма приращений энтропий за счет вязкости, теплопроводности, диффузии и химических реакций (отклонение координат реакций от равновесного состояния также считаем малым). Формула (1) дает связь между энергией, профилем $q(\eta, \xi)$ и приращением энтропии ΔS в частице η. Определим энтропийный след на интервале (η_1, η_2) как величину $\int_{\eta_1}^{\eta_2} \Delta S d\eta$.

В соответствии с принятой гидродинамической моделью среды, рассматриваем слабые ударные волны, описываемые уравнением Бюргерса

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} - q\frac{\partial q}{\partial \xi} = b\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2}, \tag{2}$$

при экстремально больших и конечных числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = \varepsilon/4\pi b$. Обозначено: $\xi = \omega t - \omega\rho_0 a/K_0$, $\eta = (\tilde{n} + 1)\omega\rho_0 a/2K_0$, $q = P/M_0$, a – лагранжева координата, P – давление, K_0 и M_0 – импеданс и модуль сжатия среды, ρ_0 – невозмущенная плотность, $\tilde{n}$ – параметр из уравнения состояния Тэта или Ми–Грюнайзена, b – диссипативный коэффициент, ε – отношение характерной амплитуды волны на границе $\eta = 0$ к модулю сжатия.

Профиль $q(\eta, \xi)$ при $\eta > 0$ определяется начальным условием $q(0, \xi) = c(\xi) \geq 0$. Поэтому, чтобы подчеркнуть, что энергия в каждой частице существенно зависит от начального профиля волны, будем писать $E(\eta, c(\xi))$.

В настоящей работе проводится максимизация функционала $E(\bar{\eta}, c(\xi))$ в фиксированной частице $\bar{\eta}$ со связями (1) и (2) при $b = 0$, по начальным конфигурациям $c(\xi) \geq 0$ возмущений, удовлетворяющих условиям $\bar{q} = \bar{c} = \text{const}$ и $E(0, c(\xi)) = E_0 = \text{const}$, а также удовлетворяющих дополнительным ограничениям, соответствующим, например, различным условиям эксперимента. Выделены оптимальные начальные условия для различных случаев. Показано, что траектория $E_\delta = E(\eta, \bar{c}\delta(\xi))$, где $\delta(\xi)$ – дельта функция, является верхней границей для возмущения $c(\xi) \geq 0$ любой конфигурации из класса $\bar{c} = \text{const}$ (с произвольной $E_0 < \infty$). В случае $b = 0$ траектория E_δ достижима и для $\eta \geq \bar{\eta}$ является оптимальной. Показано, что в случае произвольного $b > 0$ траектории E_δ нельзя достичь (т.е. $E(\eta, c(\xi)) < E_\delta$) в любой $\eta > 0$, в частности, когда $c(\xi)$ представляет суперпозицию произвольного числа δ – функций.

2. Случай Re $\longrightarrow \infty$. Распределение давления $q(\eta, \xi)$ внутри области $\{-\infty < \xi < +\infty, 0 \leq \eta < \infty\}$ удовлетворяет уравнению (2) с $b = 0$ и начальному условию $q(0, \xi) = c(\xi) \geq 0$ (импульс сжатия), которое подчиняется ограничениям $\bar{c} = \text{const}$, $E_0 = \text{const}$. Энергия волны в этом случае [1] : $E = E_0 - \frac{1}{6}\int_0^\eta \sum_i (q_+^{(i)} - q_-^{(i)})^3 d\eta$. Здесь q_+ – давление непосредственно за разрывом, q_- – давление перед разрывом, суммирование ведется по всем разрывам в профиле волны, $i = 1, 2, \ldots N$.

Необходимо выбрать профиль $c(\xi)$, удовлетворяющий указанным ограничениям, таким чтобы максимизировать энергию $E(\bar{\eta})$ в лагранжевой частице $\bar{\eta} > 0$. Заметим, что так как $E(+\infty) = 0$, то

$$\max_{c(\xi)} E(\bar{\eta}) = \max_{c(\xi)} \int_{\bar{\eta}}^{+\infty} \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N} (q_+^{(i)} - q_-^{(i)})^3 d\eta = \\ = E_0 - \min_{c(\xi)} \int_0^{\bar{\eta}} \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N} (q_+^{(i)} - q_-^{(i)})^3 d\eta. \tag{3}$$

Таким образом, максимум энергии в $\bar{\eta}$ обеспечивается минимумом энтропийного следа на интервале $(0, \bar{\eta})$ или максимумом энтропийного следа на $(\bar{\eta}, +\infty)$.

Максимум энтропийного следа на интервале $(\bar{\eta}, +\infty)$ будем искать, двигаясь из $+\infty$ в точку $\bar{\eta}$. Так как в процессе эволюции ударные разрывы сливаются в один разрыв (для цуга волн, имеющего начало и конец), то всегда можно указать окрестность точки $\eta = +\infty$, где максимум энтропийного следа надо искать среди конфигураций с одним разрывом. Далее, переход в любой точке $\eta_* \in (\bar{\eta}, +\infty)$ от одноразрывной конфигурации к многоразрывной влечет частичную изэнтропизацию сжатия, по крайней мере, в малой окрестности η_*, поэтому такое продолжение решения не будет оптимальным по отношению к начальным условиям в η_*, энтропийный след в этой окрестности можно увеличить, продолжая оптимальное решение с одним разрывом из $\eta \geq \eta_*$ в область $\eta < \eta_*$. В силу сказанного, будем искать максимум энтропийного следа на $(\bar{\eta}, +\infty)$ среди конфигураций с одним разрывом. После определения максимума энтропийного следа на $(\bar{\eta}, +\infty)$, рассмотрим возможности достижения точки $\eta = 0$ с минимумом энтропийного следа на $(0, \bar{\eta})$.

Введем новые переменные $z_2 = \frac{1}{6}\int_{\bar{\eta}}^{+\infty} q_+^3 d\eta$, $z_1 = \eta q_+^2$, $t = 1/\eta$, $\bar{t} = 1/\bar{\eta}$. Смысл перехода к новым переменным состоит в том, что теперь автоматически учитывается ограничение $\bar{c} = \text{const}$ заданием начального в $t = 0$ условия для z_1, т.к. волны одинаковой площади при $t \longrightarrow 0$ ($\eta \longrightarrow \infty$) стремятся к одной и той же асимптотике.

Воспользуемся хорошо известным решением уравнения (2) с $b = 0$: $q = c(x = \xi + \eta q)$, причем $u(t) = -c'(x_+)$ трактуем как управление (штрих означает производную по аргументу). Тогда задача об оптимальном профилировании сводится к задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях:

$$\frac{dz_1}{dt} = -\frac{z_1}{t + u(t)}, \quad z_1(t = 0) = 2\bar{c}, \\ \frac{dz_2}{dt} = \frac{1}{6} z_1^{3/2} t^{-1/2}, \quad z_2(t = 0) = 0, \\ m(t) < u(t) \leq M > 0, \quad m(t) \geq -t. \tag{4}$$

Необходимо найти на интервале $(0, \bar{t})$ управление $u(t)$, доставляющее $\max E(\bar{t}) = \max z_2(\bar{t})$, а затем на интервале $(\bar{t}, \infty)$ – управление $u(t)$, доставляющее $\min z_2(\infty)$. В последнем случае в (4) надо изменить точку задания начальных условий и значение $z_1(\bar{t})$, если первая задача рассматривается с фиксированными граничными условиями в $\bar{t}$. Ограничение сверху на $u(t)$ есть ограничение на источник волн, ограничение снизу связано с выбором определенного класса начальных условий $c(\xi)$ в $\eta = 0$, ограничение на $m(t)$ в (4) есть условие отсутствия образования вторичных разрывов в профиле волны.

Применение принципа максимума [8] к этой задаче достаточно просто. Если на конечные значения $z_1(\bar{t})$ и $z_1(\infty)$ не наложено никаких ограничений

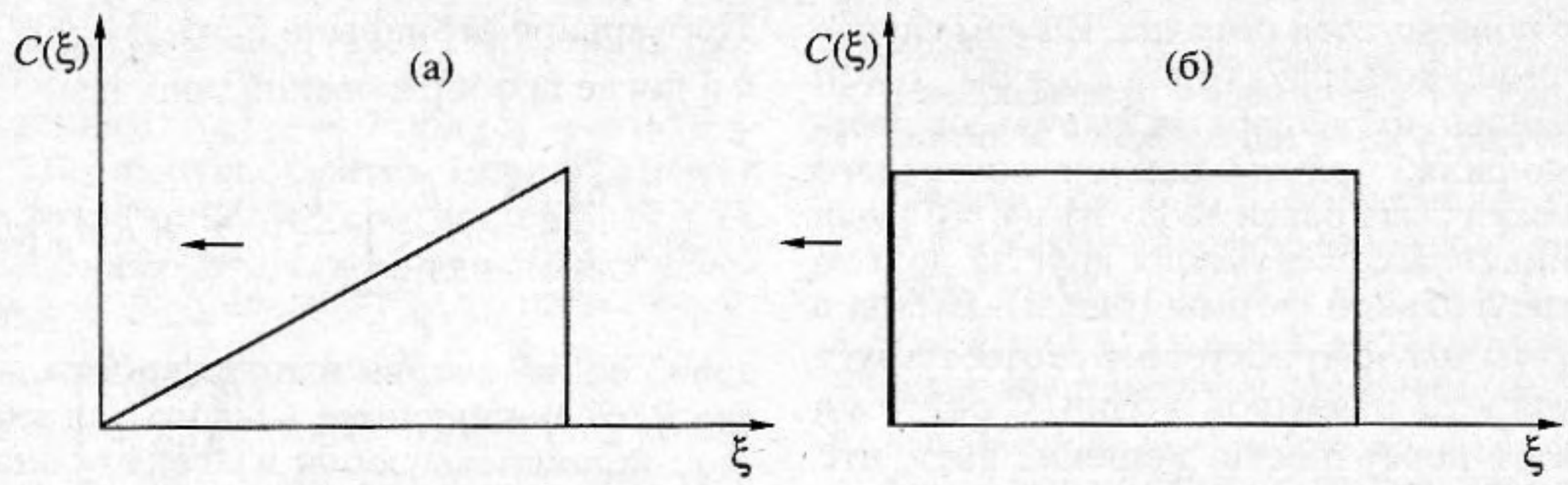

Рис. 1.

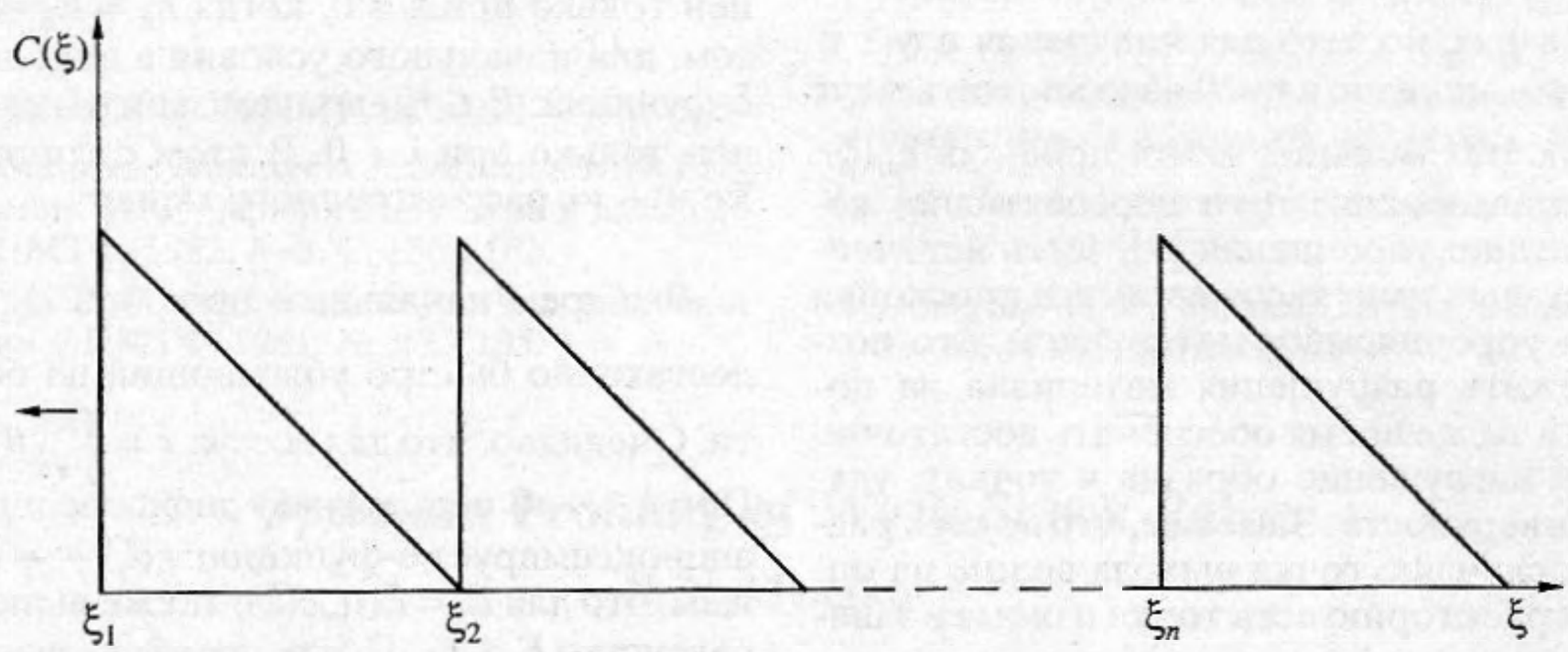

Рис. 2. Стрелкой указано направление распространения импульсов.

(т.е. концы $z_1(\bar{t})$ и $z_1(\infty)$ свободны), то оптимальным является кусочно-непрерывное управление

$$u(t) = \begin{cases} M & t \in (0, \bar{t}) \\ m(t) & t \in (\bar{t}, \infty). \end{cases} \quad (5)$$

Случай, когда амплитуда z_1 в точке $\bar{t}$ принимает заданное значение, не дает с физической точки зрения ничего нового, поэтому ограничимся обсуждением решения (5).

Это решение показывает, что на интервале $(\infty, \bar{\eta})$ (или $(0, \bar{t})$) среди импульсов с одинаковым $\bar{c}$ и одинаковым максимальным наклоном M касательной к профилю, максимальное затухание обеспечивает траектория $E(\eta)$ импульса треугольной формы с начальным в $\eta = 0$ профилем $c_M(\xi) = \sqrt{2\bar{c}M}(1 - \xi\sqrt{M/2\bar{c}})$. Если источник точечный, то $M = \infty$ и оптимальный начальный профиль имеет вид δ-функции: $c(\xi) = \bar{c}\,\delta(\xi)$. Таким образом на множестве произвольных в $\eta = 0$ функций имеющих одинаковую площадь $\bar{c}$ нельзя найти такую, которая превысила хотя бы в одной точке траекторию $E_\delta(\eta) = E(\eta, \bar{c}\,\delta(\xi))$. Однако достичь этой оптимальной траектории можно различными путями. Решение (5) с $m(t) = -t$ и $M = \infty$ образует профиль изэнтропической волны сжатия на интервале $(0, \bar{\eta})$ с шириной $\sqrt{2\bar{c}/\bar{t}}$ и высотой $\sqrt{2\bar{c}\bar{t}}$, энергия из $\eta = 0$ переносится в $\eta = \bar{\eta}$ без потерь, в $\bar{\eta}$ образуется ударный разрыв и волна выходит на траекторию E_δ. Это решение (рис. 1а) является оптимальным на классе произвольных начальных условий с $\bar{c} = \text{const}$ и $E_0 = \text{const}$. Волны с приблизительно таким профилем на практике реализуются в пределе многократного ударного сжатия при прохождении ударной волны через систему слоев или при последовательных ударах летящих пластин по образцу [3].

При $m(t) = 0$ и $M = \infty$ решение (5) дает оптимальный профиль в классе волн, у которых, кроме выполнения указанных ограничений, амплитуда волны не превышает амплитуду разрыва (рис. 1б). Профиль имеет вид прямоугольника с шириной $\sqrt{\bar{c}/2\bar{t}}$ и высотой $\sqrt{2\bar{c}\bar{t}}$. При эволюции этого профиля от $\eta = 0$ до $\eta = \bar{\eta}$ его энергия уменьшается в 1.5 раза, в $\eta = \bar{\eta}$ он также выходит на траекторию E_δ. Профили такого типа реализуются при нормальном соударении пластины с образцом.

Однако многие источники генерируют ударные волны в веществе с конечным максимальным наклоном $M < \infty$, в качестве примера можно привести контактный взрыв слоя ВВ конечной

толщины на поверхности образца. В этом случае достичь оптимальной траектории $E_M = E(\eta, c_M(\xi))$ можно с помощью цуга ударных импульсов треугольного профиля, причем наклон последнего импульса должен быть равен M. Пусть в $\eta = 0$ задан цуг из n одинаковых следующих друг за другом импульсов треугольной формы (рис. 2). Выход в $\eta = \bar{\eta}$ на оптимальную траекторию соответствует точке слияния всех разрывов в один. С ростом n $\bar{\eta}$ удаляется от поверхности. Решение дает, что $\bar{\eta} = \frac{2}{M}\sqrt{n-1}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})$, $\bar{\eta}_{\min} = \frac{2}{M}(1+\sqrt{2})$, причем на пути $(0, \bar{\eta})$ энергия цуга уменьшается в $1 + \sqrt{(n-1)/n}$ раз, но зато для получения в $\eta \geq \bar{\eta}$ одной и той же энергии, в $\eta = 0$ надо вложить в цуг энергии в $\sqrt{n}$ раз меньше, чем в профиль $c_M(\xi)$. Поэтому использование цуга перспективно, например, в физике упрочнения [9], здесь источником цуга ударных импульсов является прослойка между ВВ и упрочняемым материалом, это позволяет избежать разрушения материала на поверхности и в то же время обеспечить достаточно интенсивное нагружение образца в точках, удаленных от поверхности. Заметим, что во всех рассмотренных случаях, точка выхода волны на оптимальную траекторию есть точка излома в зависимости $E(\eta)$.

3. Рассмотрим слабые ударные волны при конечных числах Re. Уравнение (2), как известно, линеаризуются с помощью подстановки Хопфа–Коула $q = 2b(\ln U)'_\xi$, с начальным условием $U(0, \xi) = \Phi(\xi) = \exp(\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\xi} c(\xi')d\xi')$. Классу начальных условий в виде импульсов сжатия с $\bar{c} = \text{const}$ соответствуют любые $\Phi(\xi)$, монотонно возрастающие ($\Phi'(\xi) \geq 0$) от $\Phi(-\infty) = 1$ до $\Phi(+\infty) = \exp(\bar{c}/2b)$.

Покажем, что для диссипативной среды нельзя найти в указанном классе начальный профиль $c(\xi)$ (или $\Phi(\xi)$) такой, чтобы энергия его превысила энергию начального профиля $c(\xi) = \bar{c}\delta(\xi)$.

Покажем это для набора из $n + 1$ δ-функций $c(\xi) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \delta(\xi_j)$ с коэффициентами $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = \bar{c}$, когда расстояние между δ-импульсами везде одинаково: $\xi_{j+1} - \xi_j = k > 0$, $n \geq 1$. Решение $U(\eta, \xi, k)$ для этого начального возмущения:

$$U(\eta, \xi, k) = 1 + A_n \int_{\frac{kn-\xi}{\sqrt{4b\eta}}}^{+\infty} e^{-z^2}dz + \sum_{j=0}^{n-1} A_j \int_{\frac{jk-\xi}{\sqrt{4b\eta}}}^{\frac{jk+k-\xi}{\sqrt{4b\eta}}} e^{-z^2}dz,$$

где $A_j = [\exp(\sum_{i=0}^{j} \alpha_i/2b) - 1]/\sqrt{\pi}$, при $k \longrightarrow 0$ получим решение для начального возмущения $\bar{c}\delta(\xi)$, которому соответствует энергия E_δ.

Проварьируем энергию $E_k = 4b^2\int_{-\infty}^{+\infty} (U'_\xi/U)^2 d\xi$ по k и после преобразований получим:

$$\frac{\delta E_k}{\delta k} = \frac{k}{2\eta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{U^2}\left(\sum_{j,l=0}^{n} R_j R_l a_{jl}\right)d\xi, \qquad (6)$$

где $R_j = (A_j - A_{j-1})\exp\left[-\frac{(jk-\xi)^2}{4b\eta}\right] > 0$, $a_{jl} = jl - l^2$, $A_{-1} = 0$. Квадратичная форма под интегралом отрицательно определена, так как $a_{jl} + a_{lj} = -(l-j)^2 \leq 0$. Следовательно $\delta E_k/\delta k \leq 0$, знак равенства выполнен только при $k = 0$, когда $E_k = E_\delta$. Таким образом, для начального условия в виде набора $n + 1$ δ-функций: $E_k \leq E_\delta$, причем знак равенства выполнен только при $k = 0$. В этом отличие от случая $\text{Re} \longrightarrow \infty$, рассмотренного выше.

Выберем начальный профиль $c(\xi) = \frac{1}{k}f(\frac{\xi}{k})$, достаточно быстро убывающий на бесконечности. Очевидно, что для всех k: $\bar{c} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = \text{const}$. При $k \longrightarrow 0$ непрерывно дифференцируемая $c(\xi)$ аппроксимирует δ-функцию: $c(\xi) \longrightarrow \bar{c}\delta(\xi)$. Покажем, что для $E_k = E(\eta, c(\xi))$ также выполняется неравенство $E_k \leq E_\delta$. После преобразований получим

$$\frac{\delta E_k}{\delta k} = \frac{2b}{\eta}k\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi^2}((\varphi'_k)^2 - R\varphi'_\xi)d\xi, \qquad (7)$$

где

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{\xi + z\sqrt{4b\eta}}{k}\right)e^{-z^2}dz,$$

$$R = \frac{1}{k^3\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi + z\sqrt{4b\eta})^2 \Phi' e^{-z^2}dz,$$

$\varphi'_k \equiv \partial\varphi/\partial k$, $\varphi'_\xi \equiv \partial\varphi/\partial\xi$, Φ' обозначает производную по аргументу. Подинтегральное выражение в (7) отрицательно:

$$(\varphi'_k)^2 - R\varphi'_\xi =$$

$$= -\frac{1}{8\pi b\eta}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz B(y)B(z)(y-z)^2 < 0,$$

где $B(y) = \exp\left[-\frac{(ky-\xi)^2}{4b\eta}\right]\Phi'(y) \geq 0$. Таким образом, $\delta E_k/\delta k \leq 0$, знак равенства выполнен только при $k = 0$, когда $E_k = E_\delta$. Следовательно $E_k \leq E_\delta$.

Еще раз подчеркнем, что $c(\xi) = \frac{1}{k} f(\frac{\xi}{k})$ подчиняется ограничениям: $c(\xi) \longrightarrow 0$ при $|\xi| \longrightarrow \infty$, $\bar{c} = \text{const}$, $c(\xi) \geq 0$ – импульс сжатия. Если $c(\xi)$ имеет также фазу разрежения, то соотношение $E_k \leq E_\delta$ может не выполняться в классе начальных условий $\bar{c} = \text{const}$.

Профиль, изображенный на рис. 1а, не будет оптимальным для среды с диссипацией ($\text{Re} < \infty$). В этом можно убедиться непосредственной подстановкой его в уравнение Эйлера рассмотренной вариационной задачи для $\Phi(\xi)$, которое получается стандартным способом [10] методом множителей Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрианкин Э.И., Малкин А.И., Мягков Н.Н.* Распространение цуга ударных импульсов в плотных средах // ПМТФ. 1982. № 3. С. 156 - 162.
2. *Саженов А.П.* О минимизации скачка энтропии при сжатии // ПМТФ. 1981. № 2. С. 105.
3. *Ададуров Г.В., Гольданский В.И.* Превращение конденсированных веществ при их ударно-волновом сжатии // Успехи химии. 1981. Т. 50. № 10. С. 1810.
4. *Стебновский С.В.* Взаимодействие ударных волн при последовательном подводном взрыве сферически зарядов // ПМТФ. 1978. № 4. С. 87.
5. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
6. *Myagkov N.N.* Nonlinear waves in shock-loaded condensed matter // J. Phys. D: Appl. Phys., 1994. V. 27. P. 1678 - 1686.
7. *Губкин К.Е.* Распространение взрывных волн. В кн.: Механика в СССР за 50 лет. 1970. Т. 2. С. 293.
8. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
9. *Дерибас А.А.* Физика упрочнения и сварки взрывом. М.: Наука, 1980.
10. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.

Optimum Profiling of Weak Shock Pulses

N. N. Myagkov

An approach to maximizing the energy of a shock wave in a condensed medium by choosing an optimal pressure profile at the boundary is considered. The motion of the medium is described by the Burgers equation. For exceedingly large Reynolds numbers, the solution is constructed with the aid of the maximum principle. It is demonstrated that the energy of a short impact, which is modeled at the boundary by a δ pulse, is the upper bound of the energy of an arbitrary compression pulse that has the same pressure pulse at the boundary.