АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 2, с. 197 - 201

УДК 534.26

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ НИЗКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ В СЛОЕ

© 1996 г. И. А. Девятериков, В. П. Иванов

Отдел теоретических проблем РАН
121002 Москва, ул. Веснина, 12

Поступила в редакцию 10.01.95 г.

Предложен способ возбуждения низкочастотного поля в слое с помощью трех излучателей, нагруженных на резонаторы Гельмгольца. Исследована диаграмма направленности поля излучателей в слое в зависимости от способа их возбуждения.

При возбуждении интенсивного низкочастотного поля в слое S с жесткими стенками представляет определенную сложность разместить в этом слое излучатель достаточных волновых размеров. Для преодоления этой трудности предложен способ возбуждения поля в слое S с помощью излучателей, нагруженных на резонаторы Гельмгольца [1] и размещенных вне слоя так, что горловины резонаторов выходят на границу слоя S. Рассмотрим случай, когда слой S жидкости плотности ρ_1 со скоростью распространения звука c_1 размещен в полупространстве $z < H$ при $0 \geq z \geq -h$, $2h < H$ и связан с границей полупространства $z = H$ с помощью трех близко расположенных цилиндрических резонаторов D_j, заполненных жидкостью плотности ρ_2 со скоростью распространения звука c_2. Геометрия задачи и необходимые дополнительные построения при ее решении представлены на рис. 1.

Пусть цилиндры D_j со стороны слоя S закрыты диафрагмами с отверстиями S_j, а на поверхности $z = H$ – колеблющимися по гармоническому закону поршнями S_{0j} ($j = 1, 2, 3$). При возбуждении колебаний в цилиндрах в слое S генерируется волновое поле, распределение потенциала скорости которого U_1 удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$(\Delta + k_1^2)\, U_1 = 0, \quad k_1^2 = \omega^2 / c_1^2, \tag{1}$$

где c_1 – скорость звука в среде, заполняющей слой, k_1 – волновой вектор с круговой частотой ω. Будем считать, что на границе слоя выполняются условия

$$\partial U_1 / \partial n = 0$$

при $z = 0, -h$ за исключением отверстий S_j.

На бесконечности поле удовлетворяет принципу предельного поглощения, а в окрестности острых кромок – условию ограниченности полной энергии. Для потенциала скорости колебаний жидкости, заполняющей внутренние объемы цилиндров D_j, справедливы уравнения

$$(\Delta + k_2^2)\, U_{2j} = 0, \quad k_2^2 = \omega^2 / c_2^2, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где c_2 – скорость звука в жидкости, заполняющей цилиндры. Применяемый способ возбуждения колебаний в цилиндре D_j приводит к граничному условию вида:

$$\partial U_{2j} / \partial n = f_{0j} = A_j \exp(i t_j), \tag{3}$$

в котором A_j амплитуда колебательной скорости, а фаза – t_j. На боковых стенках цилиндров и нижнем торце, исключая отверстия S_j, потребуем выполнения условия $\partial U_{2j} / \partial n = 0$. Колебания жидкости, заполняющей цилиндры, через отверстия S_j будут передаваться в слой S. Интенсивность колебаний в слое S определяется условиями сшивания для потенциалов U_1 и U_{2j} в виде равенства нормальных скоростей и давлений на отверстиях S_j.

Пусть G_1 – функция Грина для слоя S с жесткими верхней и нижней границами, G_{2j} – функция Грина для внутреннего объема цилиндра D_j с абсолютно жесткими стенками. Применяя формулы Гаусса–Остроградского для функций U_{2j} и G_{2j} внутри цилиндров D_j и для функций U_1 и G_1 в слое S, и используя условие непрерывности нормальных скоростей на отверстиях S_j, получим следующие

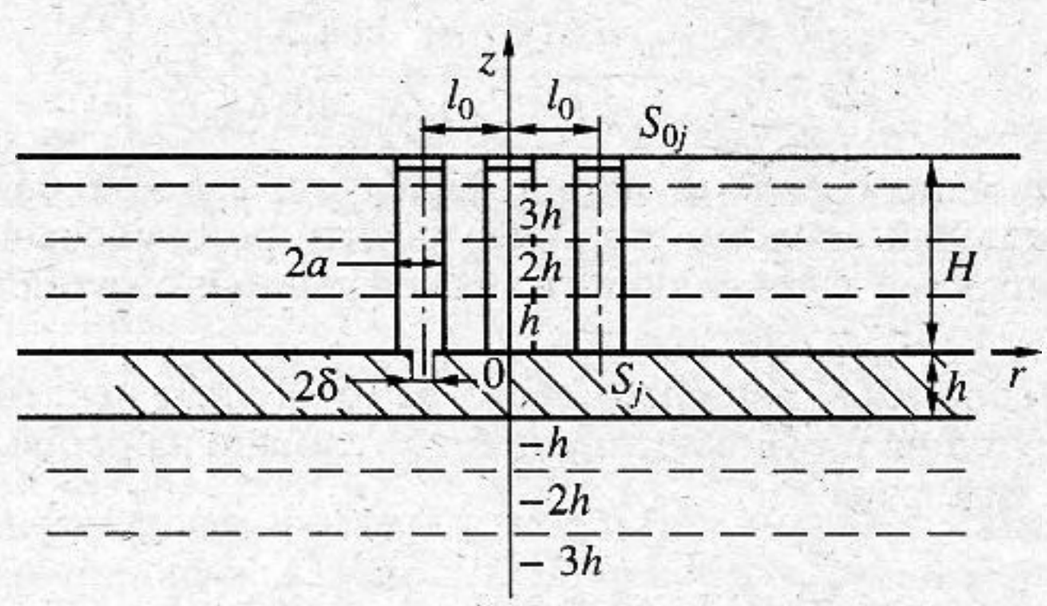

Рис. 1. Геометрия задачи и необходимые построения.

представления для потенциалов U_{2j} и U_1:

$$U_{2j} = \int\limits_{S_j} \mu_j G_{2j} dS_j - \int\limits_{S_{0j}} f_{0j} G_{2j} dS_{0j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

$$U_1 = -\sum_{j=1}^{3} \int\limits_{S_j} \mu_j G_1 dS_j. \quad (5)$$

Здесь использовано обозначение $\mu_j = \partial U_{2j}/\partial z = \partial U_1/\partial z$ на S_j. Второе условие сшивания – условие непрерывности давления приводит к системе интегральных уравнений для определения функций μ_j, $j = 1, 2, 3$

$$\int\limits_{S_j} \mu_j(\rho_2 G_{2j} + \rho_1 G_1) dS_j + \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq j)}}^{3} \int\limits_{S_n} \mu_n \rho_1 G_1 dS_n = \quad (6)$$

$$= \rho_2 \int\limits_{S_{0j}} f_{0j} G_{2j} dS_{0j} = f_j$$

Прежде чем приступить к решению интегральных уравнений (6), определим явный вид функций Грина, входящих в ядра интегральных уравнений. Функцию Грина G_1 в слое S можно построить методом отражений.

$$G_1 = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\exp(ik_1 R_n)}{R_n} + \frac{\exp(ik_1 R_{1n})}{R_{1n}} \right],$$

где

$$R_n = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta+2nh)^2]^{1/2},$$

$$R_{1n} = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta+2nh)^2]^{1/2},$$

(x, y, z), (ξ, η, ζ) – декартовы координаты точек наблюдения и источника. Функции G_{2j} в цилиндрической системе координат, связанный с осью j-го цилиндра, могут быть представлены в следующем виде

$$G_{2j} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\kappa_{nm} r_j)}{C_{nm}} \left\{ \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix} \right\} J_n(\kappa_{nm} r_{1j}) \left\{ \begin{matrix} \cos n\varphi_1 \\ \sin n\varphi_1 \end{matrix} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} \cos\lambda_{nm}\zeta_j \cos\lambda_{nm}(z_j + H)/\lambda_{nm} \sin\lambda_{nm} H & \text{при} & z_j < \zeta_j \\ \cos\lambda_{nm}(\zeta_j + H) \cos\lambda_{nm} z_j/\lambda_{nm} \sin\lambda_{nm} H & \text{при} & \zeta_j < z_j \end{matrix} \right\},$$

$$n = 0, 1, 2\ldots,$$

$C_{01} = \pi a^2$, $C_{nm} = \pi a^2[(\kappa_{nm} a)^2 - n^2] J_n^2(\kappa_{nm} a)/2\kappa_{nm} a)^2$, $\lambda_{nm}^2 = k_2^2 - \kappa_{nm}^2 \neq \pi n$, $\kappa_{nm} a$ – корни уравнения $J_n'(x) = 0$, $J_n(x)$ – функция Бесселя, (r_j, φ_j, z_j), $(r_{1j}, \varphi_{1j}, \zeta_j)$ – цилиндрические координаты точек наблюдения и источника, a – радиус цилиндра D_j.

Для принятого представления функции G_{2j} правая часть системы уравнений (6) f_j выписывается в явном виде

$$f_j = 2\pi\rho_2 f_{0j} \left[\frac{\cos^2 k_2 H}{2\pi k_2 \sin kH} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{J_o(\kappa_{om} r_j)}{C_{om}} \frac{a J_1(\kappa_{om} a)}{\kappa_{om}} \frac{\cos^2 \lambda_{om} H}{\lambda_{om} \sin\lambda_{om} H} \right].$$

Из явного вида функции f_j следует, что колебательный режим поршня носит резонансный характер из-за наличия в знаменателе множителя вида $\sin k_2 H$ или $\sin\lambda_{om} H$.

Вернемся к решению системы (6). Будем искать функции μ_j, удовлетворяющие условию на ребре, в виде ряда

$$\mu_j = \sum_{n=0}^{\infty} B_{jn} [k_1^2(\delta^2 - r_j^2)]^{n-1/2} \exp(in\varphi_j). \quad (7)$$

Будем предполагать, что для параметров задачи выполняются соотношения $ka \ll 1$, $kl_0 \ll 1$, $\delta/a \ll 1$, $\delta/h \ll 1$, где k есть k_1 или k_2. В плярных координатах, связанных с центром j-ого отверстия, расстояние между точками наблюдения и интегрирования обозначим через

$$R_{2j} = [r_j^2 + r_{1j}^2 + 2rr_{1j}\cos(\varphi_j - \varphi_{1j})]^{1/2},$$

где (r_j, φ_j), (r_{1j}, φ_{1j}) – координаты точки наблюдения и интегрирования на отверстии S_j. В случае, если точка наблюдения и интегрирования находятся на одном и том же отверстии, для функции G_1 справедливо выражение

$$G_1 = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{2}{R_{2j}} + A(h) \right] [1 + O(k\delta, (\delta/h)^2],$$

$$k\delta \longrightarrow 0, \quad \delta/h \longrightarrow 0,$$

$$A(h) = -\frac{2}{h} \ln(2\sin k_1 h) + i\frac{\pi - 2k_1 h}{h}.$$

Если точка наблюдения лежит на j-ом отверстии, а интегрирования на другом ($n \neq j$), функцию G_1

представим в виде ряда

$$G_1(r_j, \varphi_j, r_{1j}, \varphi_{1j}) = -\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon_m}\times$$

$$\times\frac{\exp\{ik_1[l_{nj}^2+(2mh)^2]^{1/2}\}}{[l_{nj}^2+(2mh)^2]^{1/2}}[1+O(k\delta,(\delta/h)^2],$$

где $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_m = 1$ при $m \neq 0$; l_{nj} – расстояние между отверстиями S_j и S_n. Подставим полученные представления в (6) и пренебрежем членами, малыми по сравнению с единицей. В результате для главного члена разложения функции

$$\mu_{jo} \cong B_{jo}[(k_1\delta)^2-(k_1r_j)^2]^{-1/2}, \quad k_1\delta \longrightarrow 0,$$

получаем систему интегральных уравнений с ядром типа ядра интегрального уравнения дифракции на малом отверстии в экране [2]

$$\int_0^{\delta}\mu_{jo}\left\{-\int_0^{2\pi}\frac{\rho_1 d\varphi_j}{2\pi R_{2j}}-\rho_1\frac{A(h)}{2}-\frac{\rho_2}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_o(\kappa_{om}r_j)J_o(\kappa_{om}r_{1j})\cos\lambda_{om}H}{C_{om}\lambda_{om}\sin\lambda_{om}H}\right\}r_j dr_j - \qquad (8)$$

$$-2\sum_{\substack{n=1\\(n\neq j)}}^{3}\int_0^{\delta}\mu_{no}\rho_1\left[\frac{1}{2l_{nj}}+\frac{1}{4}A(h)\right]r_n dr_n = f_j,\ j=1,2,3.$$

В бесконечной сумме, стоящей в левой части полученной системы уравнений, при $k_2H \longrightarrow \pi$ определяющим является член с номером $m = 1$. Ограничимся далее рассмотрением случая $k_2H \longrightarrow \pi$.

В соответствии с методикой, приведенной в работе [2], проведем интегрирование в (8). Для определения амплитуд B_{jo} главных членов разложений функций μ_j получим следующую систему алгебраических уравнений

$$\alpha B_{jo}+\sum_{\substack{n=1\\(n\neq j)}}^{3}\alpha_{nj}B_{no} = \frac{\cos^2 k_2H}{\sin k_2H}\rho_2 f_{oj}, \quad j=1,2,3, \qquad (9)$$

$$\alpha = -\frac{\pi\rho_1}{4}-\frac{\rho_1\delta A(h)}{2}-\frac{\delta\rho_2\cos k_2H}{2\pi\alpha^2 k_2\sin k_2H},$$

$$\alpha_{nj} = \frac{\delta\rho_1}{l_{nj}}+\frac{\delta\rho_1}{4}A(h).$$

Анализ полученной системы показывает, что абсолютные величины амплитуд B_{jo} существенно возрастают при выполнении соотношений

$$\frac{\delta}{k_2a^2} \ll 1,$$

$$\frac{\rho_1\delta}{2l_o} = -\frac{\rho_1}{2}-\frac{\rho_2\delta}{\pi^2a^2}\frac{\cos k_2H}{k_2\sin k_2H}. \qquad (10)$$

В отличие от резонанса функции f_j условия (10) определяют резонансный режим колебаний среды в колебательной системе резонаторы D_j и слой S. Из формулы (10) следует выражение для резонансной частоты ω^*

$$\omega^* = \frac{c_2}{H}\left(\pi-\frac{2l_o\rho_2}{\pi^2(l_o+\delta)\rho_1}\frac{\delta}{k_2a^2}\right),$$

где c_2 – скорость звука в среде, заполняющей скважину. В рамках полученного приближения при вычислении плотностей μ_j выпишем выражение для поля U_1 внутри паста S. Согласно (5) функция U_1 в слое S равна

$$U_1 = -\sum_{j=1}^{3}\int_{S_j}\frac{B_{jo}}{k_1[\delta^2-r_j^2]^{1/2}}G_1 dS_j. \qquad (11)$$

Для вычисления интегралов, стоящих в правой части формулы (11), следует перейти в сферическую систему координат, связанную с центром отверстия S_j и его зеркальных отражений относительно границ $z = 0, -h$, как показано на рис. 1, то есть в сферическую систему с центром $(\pm l_o, 0, 2nH)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Если теперь для преобразования функции G_1 воспользоваться теоремой сложения для сферических функций [3], то из (11) после интегрирования получим

$$U_1 = i\delta\sum_{j=1}^{3}B_{jo}\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_o^{(1)}(k_1R_n)\times$$

$$\times[1+O(k\delta)][1+O(kl_o)], \quad k\delta, kl_o \longrightarrow 0. \qquad (12)$$

Здесь через R_n обозначено расстояние от точки наблюдения (x, y, z) в S до центра с координатами $(0, 0, 2nh)$, а $h_o^{(1)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля. Физическая интерпретация выражения, стоящего в правой части формулы (12), затруднена, поэтому преобразуем ряд, стоящий в правой части формулы (12), согласно работе [4] в ряд по нормальным волнам в слое с абсолютно жесткими стенками. После такого преобразования в цилиндрической системе координат в слое S, связанной с осью цилиндра D_1, при синфазных колеба-

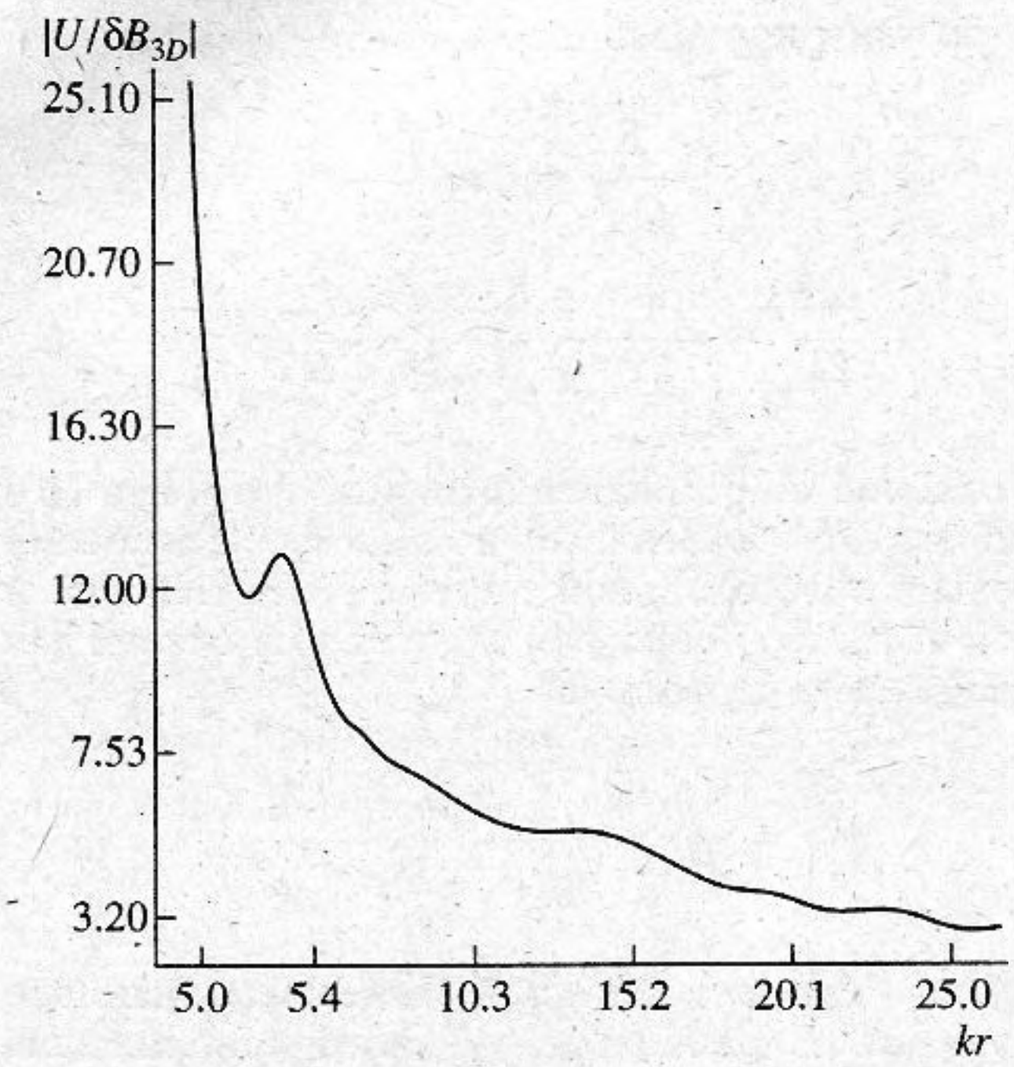

Рис. 2. Пример расчета амплитуды смещения в зависимости от расстояния от излучающей системы.

ниях в цилиндрах D_j поле U_1 представимо в виде следующего ряда

$$U_1 \cong -\frac{4\pi^2\delta}{k_1 h}\sum_{n=0}^{\infty} H_o^{(1)}\left\{k_1 r\left[1-\left(\frac{\pi n}{k_1 h}\right)^2\right]^{1/2}\right\}\times$$

$$\times\cos\frac{\pi n z}{h}\sum_{j=1}^{3} B_{jo}(1+O(kl_o)),$$

где (r, z) – координаты точки наблюдения, $H_o^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля. Положим $2k_1 h < \pi$, тогда только член с номером $n = 0$ отвечает распространяющейся волне, остальные члены ряда затухают с увеличением расстояния r. Отсюда можно сделать вывод о том, что поле близко расположенных излучателей D_j в слое S представляет собой поле монополя с амплитудой, равной сумме амплитуд отдельных излучателей.

Рассмотрим случай, когда функции f_{oj} и, согласно (9), амплитуды B_{j0} подобраны специальным образом, а именно

$$B_{20} = -B_{30}, \quad B_{10} = \beta B_{30},$$
$$\beta = O(kl_o) \text{ при } kl_o \longrightarrow 0. \tag{13}$$

В этом случае при преобразовании функции Грина G_1 в процессе интегрирования соотношения (10) сохраним члены до порядка $O(kl_o)$ включительно.

После аналогичных преобразований для U_1 получим выражение

$$U_1 = \frac{4\pi^2\delta B_{30}}{k_1 h}\sum_{n=0}^{\infty}\{B_1 H_o^{(1)}\times$$
$$\times\{k_1 r[1-(\pi n/k_1 h)^2]^{1/2}\} + 12\psi_1(k_1 l_o)\cos\varphi\times \tag{14}$$
$$\times H_1^{(1)}\{k_1 r[1-(\pi n/k_1 h)^2]^{1/2}\}\}\cos\frac{\pi n z}{h}.$$

Здесь $H_o^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля, $\psi_1(x)$ – сферическая функция Бесселя. Положим в (14) $B_1 = 12i\psi_1(k_1 l_o)$. Рассмотрим поле U_1 в дальней зоне, для чего заменим специальные функции их асимптотиками при $k_1 r \longrightarrow \infty$.

В результате получим формулу, описывающую поведение поля U_1 на больших расстояниях от излучателей D_j:

$$U_1 = \frac{4\pi^2\delta B_{30}}{k_1 h}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,12i\psi_1(k_1 l_o)\times$$
$$\times\frac{\exp i(k_1 r - \pi/4)}{(k_1 r)^{1/2}}(1+\cos\varphi). \tag{15}$$

Отсюда следует, что при выбранном соотношении амплитуд отдельных излучателей диаграмма направленности группы представляет собой кардиоиду. Данная система излучателей является триполем, излучающим в слой S, причем амплитуда поля излучения получается на порядок меньше амплитуды монополя из-за наличия множителя $\psi_1(k_1 l_o)$. Этот факт может быть объяснен тем, что сопротивление излучения трех излучателей малых волновых размеров со специальным выбором амплитуд больше соответствующего сопротивления излучения монополя тех же размеров.

На рис. 2 демонстрируется поведение амплитуды потенциала поля, определенного с помощью ряда (14), в направлении максимального излучения (то есть при $\varphi = \pi/2$) в зависимости от расстояния при значении параметров $k_1 h = 0.5$, $z = 0.2h$. Характерной особенностью приведенного решения является наличие локального максимума в области $k_1 R < 5.0$ и слабо осциллирующего "хвоста" при $k_1 R > 12.0$, совпадающего с асимптотикой (15). Наличие локального максимума в ближнем поле можно объяснить интерференцией нормальных мод слоя, которые быстро затухают с расстоянием.

Из анализа проведенных расчетов следует, что характер поведения поля излучения группы излучателей соответствует распространению волн в одномодовом волноводе с жесткими стенками. Устройство из трех излучателей, размещенных на границе слоя S, позволяет создать направленное поле, которое может быть использовано для зондирования слоя. Эффективность работы рассмотренной группы излучателей определяется

внутри резонаторов и выбором сдвига фаз колебаний в каждом из резонаторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов В.П.* Анализ поля излучателя, нагруженного на полый цилиндрический резонатор // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 539 - 541.
2. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфапль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
3. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск. Наука и техника, 1968. 584 с.
4. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М. Изд. АН СССР, 1957. 502 с.

A Method to Excite a Low-Frequency Field in a Layer

I. A. Devyaterikov and V. P. Ivanov

A method is proposed for the excitation of a low-frequency field in a layer. The field is excited by three radiators loaded on Helmholtz resonators. The directional characteristic of the field produced in the layer is studied for different methods of radiator excitation.