АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 2, с. 286 - 288

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.222

О ВЛИЯНИИ НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ НА НАПРАВЛЕННОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

© 1996 г. Ю. И. Скрынников

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН

117036 Москва, ул. Шверника, 4

Поступила в редакцию 10.04.95 г.

В работе [1] было показано, что нелинейное взаимодействие неоднородного потока жидкости с акустическим полем накачки в безграничном пространстве приводит к появлению боковых лепестков в диаграмме направленности параметрического излучения. Их амплитуда, вообще говоря, пропорциональная числу Маха скорости потока, может достигать заметной величины в зависимости от структуры потока [1] и условий распространения звука [2]. Например, при формировании излучения разностной частоты в мелком море возникающие таким образом максимумы диаграммы направленности сравнимы по величине с основным максимумом [2]. Что неудивительно, так как эффект накопления в этом случае имеет место только для четырехволнового нелинейного взаимодействия с участием пространственной гармоники потока, в то время как взаимодействие волн накачки, формирующее основной максимум диаграммы направленности, становится нерезонансным из-за наличия дисперсии звука.

Результаты работ [1, 2] получены в рамках простейшей модели параметрического излучения, предполагая, что масштаб затухания волн накачки $l_з$ много меньше их масштаба дифракции $l_д$. В действительности даже слабые дифракционные эффекты, всегда имеющие место в натурных условиях, способны существенно изменить структуру звукового поля разностной частоты в дальней зоне [3, 4]. Поэтому для получения более полной картины рассматриваемого явления необходимо также исследовать альтернативный предельный случай: $l_д \ll l_з$.

В настоящей работе рассмотрена задача о влиянии неоднородного потока жидкости на направленность параметрического излучения с учетом дифракционной расходимости волн накачки в параболическом приближении. Так же, как и в работе [1], ограничимся случаем безграничного пространства и будем исходить из того, что поле скорости потока жидкости $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ изменяется на масштабах, значительно превосходящих длины всех рассматриваемых здесь акустических волн (адиабатическое приближение). Тогда в первом порядке по гидродинамическому и во втором порядке по акустическому числам Маха поле акустического давления $p(\mathbf{r}, t)$ описывается уравнением [1]

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon}{\rho c^4}\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} - \frac{2\varepsilon}{\rho c^4}(u\nabla)\frac{\partial p^2}{\partial t}, \quad (1)$$

где c – скорость звука в жидкости, ρ и ε – соответственно ее плотность и коэффициент нелинейности.

Следуя далее методу медленно изменяющегося профиля [3], нетрудно получить из (1) параболическое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{2\rho c^3}\frac{\partial p^2}{\partial\tau} + \frac{\varepsilon}{\rho c^4}u_z\frac{\partial p^2}{\partial\tau}\right) = \frac{c}{2}\Delta_\perp p, \quad (2)$$

учитывающее слабую дифракционную расходимость волны, бегущей вдоль оси z. Здесь $\tau = t - z/c$,

$\Delta_\perp \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – поперечный оператор Лапласа, u_z – z-компонента скорости потока.

Считая поле накачки $p_0(\mathbf{r}, t)$ бигармонической волной

$$p_0 = \frac{1}{2}A_1(r, z)e^{i\omega_1\tau} + \frac{1}{2}A_2(r, z)e^{i\omega_2\tau} + \text{к. с.},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

генерируемой двумя тональными излучателями, расположенными в плоскости $z = 0$, получаем, используя метод последовательных приближений, уравнение

$$\frac{\partial P_-}{\partial z} - \frac{1}{2ik}\Delta_\perp P_- = i\frac{\varepsilon k}{2\rho c^2}A_1A_2^* - i\frac{\varepsilon k}{\rho c^3}u_zA_1A_2^* \quad (3)$$

для комплексной амплитуды $P_-(x, y, z)$ параметрического излучения разностной частоты ($k = \Omega/c$, $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, знак * обозначает комплексное сопряжение).

Функции $A_j(r, z)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} - \frac{1}{2ik_j}\Delta_\perp A_j = 0, \quad k_j = \frac{\omega_j}{c}. \quad (4)$$

В дальней зоне, где $z \gg k_ja_j^2$ (a_j – характерный линейный размер излучателя гармоники на частоте ω_j), асимптотическое решение уравнения (4) имеет простой вид [3]:

$$A_j(r,z) = i\frac{k_j}{z}\exp\left(-i\frac{k_j}{2z}r^2\right)\tilde{A}_0^{(j)}\left(k_j\frac{r}{z}, 0\right), \tag{5}$$

где

$$\tilde{A}_0^{(j)}(\nu, 0) = \int_0^{+\infty} A_0^{(j)}(r,0)J_0(\nu r)rdr$$

– преобразование Ханкеля распределения амплитуды на j-м излучателе (т.е. при $z = 0$), которое здесь предполагается гауссовым:

$$A_0^{(j)}(r,z) = p_j\exp(-r^2/a_j^2).$$

Тогда

$$\tilde{A}_0^{(j)}(\nu, 0) = \frac{a_j^2 p_j}{2}\exp\left(-\frac{\nu^2 a_j^2}{4}\right),$$

и решение (5) принимает окончательный вид

$$A_j(r,z) = i\frac{k_j a_j^2 p_j}{2z}\exp\left(-i\frac{k_j}{2z}r^2 - \frac{k_j^2 a_j^2 r^2}{4z^2}\right). \tag{6}$$

В силу линейности уравнения (3) его решение представимо в виде

$$P_-(x,y,z) = P_-^{(1)}(r,z) + P_-^{(2)}(x,y,z), \tag{7}$$

где $P_-^{(1)}$ и $P_-^{(2)}$ – функции, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\frac{\partial P_-^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{2ik}\Delta_\perp P_-^{(1)} = i\frac{\varepsilon k}{2\rho c^2}A_1A_2^*, \tag{8}$$

$$\frac{\partial P_-^{(2)}}{\partial z} - \frac{1}{2ik}\Delta_\perp P_-^{(2)} = -i\frac{\varepsilon k}{\rho c^3}u_zA_1A_2^*. \tag{9}$$

Учитывая выражение (6), находим решения уравнений (8) и (9). Решение уравнения (8) известно [3]:

$$P_-^{(1)} = \frac{c}{z}\exp\left(-\frac{(k_1^2+k_2^2)r^2}{4z^2} - i\frac{kr^2}{2z}\right)\ln\frac{z}{z_0},$$
$$C = \frac{\varepsilon k k_1 k_2 p_1 p_2 a_1^2 a_2^2}{8\rho c^2}, \tag{10}$$

а решение уравнения (9) представимо в виде

$$P_-^{(2)} = \frac{ik}{2\pi}\int_{z_0}^{z_m}dz'\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\int_{-\infty}^{+\infty}dy'\frac{Q(x',y',z')}{z-z'}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{ik}{2}\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z-z'}\right), \tag{11}$$

где $Q(x, y, z)$ – правая часть уравнения (9). В выражении (11) предполагается, что поток локализован, по крайней мере, в z-направлении ($u_z \neq 0$ при $z_0 < z < z_m$), причем $z_0 \gg \frac{\omega}{\Omega}l_д$, т.е. взаимодействие поля накачки с потоком происходит в прожекторной зоне [3].

Ограничившись одной пространственной гармоникой потока

$$u_z(x,y,z) = u_0\exp(i\mathbf{qr})$$

и считая, что волна разностной частоты регистрируется далеко за пределами прожекторной зоны ($z \gg z'$), можно привести выражение (11) к виду

$$P_-^{(2)} = \frac{2iC}{z}\exp\left(-i\frac{kr^2}{2z}\right)(\mathrm{Ei}(i\alpha z_0) - \mathrm{Ei}(i\alpha z)), \tag{12}$$

где

$$\alpha = q_z + \frac{q_\perp^2}{2k} + (q_x\cos\theta + q_y\sin\theta)\varphi,$$

θ – угол между векторами $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{q}_\perp$, лежащими в плоскости, перпендикулярной оси z, $\varphi \approx \sin\varphi = r/z$ – угол между осью z и направлением на точку наблюдения,

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{\exp(t)}{t}dt$$

– интегральная показательная функция [5].

Исследуем теперь характер зависимости $|P_-^{(2)}(\varphi)|$. Очевидно, при $\alpha z_0 \leq 1$, $\alpha z \leq 1$ величина $|P_-^{(2)}|$ близка к нулю и слабо зависит от угла φ. Иначе ведет себя функция $|P_-^{(2)}(\varphi)|$ в пределе $\alpha z_0 \gg 1$ и $\alpha z \gg 1$. Действительно, воспользовавшись асимптотикой [5]

$$\mathrm{Ei}(ix) \approx -\frac{e^{-ix}}{x}, \quad x \gg 1,$$

считая, что

$$q_z(z-z_0) \gg 1,\ q_\perp(z-z_0) \gg 1,\ q_z z_0 \gg 1,\ q_\perp z_0 \gg 1 \tag{13}$$

(неравенства (13) следуют из неравенств $\alpha z_0 \gg 1$ и $\alpha z \gg 1$), получаем

$$|P_-^{(2)}(\varphi)| \approx \frac{2C}{\alpha z_0 z^2}(z_0^2 + z^2 - 2zz_0\cos(\alpha(z-z_0)))^{1/2}. \tag{14}$$

Из выражения (14) видно, что в этом случае $|P_-^{(2)}(\varphi)|$ является быстроосциллирующей функцией угла φ.

Таким образом, как в приближении $l_з \ll l_д$ [1, 2], наряду с основным максимумом (при $\varphi = 0$), определяемым выражением (10), в диаграмме направленности волн разностной частоты могут присутствовать и дополнительные максимумы, обусловленные взаимодействием поля накачки с гармоникой потока, волновые числа которой удовлетворяют условиям (13).

Автор благодарен Международному научному фонду, при финансовой поддержке которого выполнена настоящая работа (грант MH1000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наугольных К.А., Рыбак С.А., Скрынников Ю.И.* О нелинейном взаимодействии акустических волн в неоднородном потоке жидкости // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 2. С. 321 - 325.
2. *Дмитриев В.Г., Наугольных К.А.* Поле гармонического излучателя в волноводе с плавнонеоднородным потоком жидкости // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 3. С. 385 - 389.
3. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И.* Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 264 с.
4. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 831 с.