

УДК 534.222.1

О ДВУХ МОДЕЛЯХ АКУСТИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

© 1996 г. А. В. Осетров, С. Н. Самоленков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет им. В.И. Ульянова (Ленина)
197376 Санкт-Петербург, ул. проф. Попова, 5

Поступила в редакцию 25.04.95 г.

В статье анализируется поведение акустических неоднородностей, включающих неоднородность сжимаемости и плотности, в задачах дифракционной томографии в первом приближении Борна. Рассматриваются две модели неоднородностей: одиночный рассеиватель и рассеиватель малых размеров внутри большого. Эти модели изучены в рамках двух методов. Первый обладает всеми существенными свойствами проекционных схем, второй – многочастотных. Показано, что использование таких методов позволяет избежать ошибок численного характера, связанных с конечностью апертуры, дискретизацией и интерполяцией. Качественно и количественно проанализированы ошибки борновского приближения, объяснены механизм разрушения изображений неоднородностей в проекционных методах и причины их низкой устойчивости по сравнению с многочастотными методами.

В первых экспериментах с ультразвуком в компьютерной томографии не учитывались эффекты дифракции, и поэтому они оказались неудачными [1]. Дальнейшие исследования привели к необходимости создания дифракционной томографии [2]. Большинство ее методов основано на решении линеаризованных интегральных уравнений. Распространены два метода линеаризации – приближения Рытова и Борна. На их основе разработаны различные методы измерений [3, 4]. Эти методы можно разделить на две группы – проекционные и многочастотные. Проекционные схемы измерений заимствованы из рентгеновской томографии [5], многочастотные – из методов синтезированной апертуры [6, 7]. Ранее [8] многочастотные методы не рассматривались отдельно от проекционных, в рамках которых они были впервые введены [3]. Разработка методов обоих типов интенсивно продолжалась вплоть до последнего времени. Основное внимание уделялось повышению точности этих методов. В частности, исследовалось влияние дискретизации, конечности линии измерений [5] и интерполяции [9–11] на точность измерений. Однако основными источниками ошибок являются приближения Рытова и Борна. Приближение Борна носит более общий характер и ему уделяется большее внимание. Для моделей рассеивателей с абсолютно жесткой (мягкой) границами в задачах дефектоскопии его формальное применение эквивалентно, при определенных условиях, приближению Кирхгофа [7, 11, 12]. Анализ приближения Борна для звукопрозрачных объектов проводился либо теоретически для прямых задач [13, 14], либо в рам-

ках конкретных методов томографии [15, 16]. В [16], например, оно изучалось в случае неоднородности скорости звука для одной модели рассеивателя и в рамках конкретного проекционного метода при наличии ошибок численного характера. Поэтому в более поздних работах достоверность приближения Борна обосновывается либо чисто теоретически, либо ссылками на эмпирические данные.

Будем рассматривать безграничную жидкоупругую среду, неоднородную в ограниченной области Ω – области неоднородностей. Вне Ω среда обладает постоянными плотностью ρ_0 и сжимаемостью κ_0 . В Ω плотность $\rho(\mathbf{r})$ и сжимаемость $\kappa(\mathbf{r})$ являются переменными координат \mathbf{r} . Для периодического во времени волнового движения с круговой частотой ω справедливо следующее дифференциальное уравнение для акустического давления p [17]:

$$\Delta p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = -k^2 \gamma_\kappa(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}) + \nabla[\gamma_\rho(\mathbf{r}) \nabla p(\mathbf{r})] - f(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\gamma_\kappa = [\kappa(\mathbf{r}) - \kappa_0]/\kappa_0$ – функция неоднородностей сжимаемости, $\gamma_\rho = [\rho(\mathbf{r}) - \rho_0]/\rho_0$ – функция неоднородностей плотности, $k = \omega/c_0$ – волновое число, c_0 – скорость звука в однородной среде, $f(\mathbf{r})$ – функция источников ($f(\mathbf{r}) = 0$ в Ω).

Если $p(\mathbf{r})$ представить в виде суммы $p(\mathbf{r}) = p_i(\mathbf{r}) + p_s(\mathbf{r})$, где $p_i(\mathbf{r})$ – поле давления, создаваемое источниками $f(\mathbf{r})$ при отсутствии неоднород-

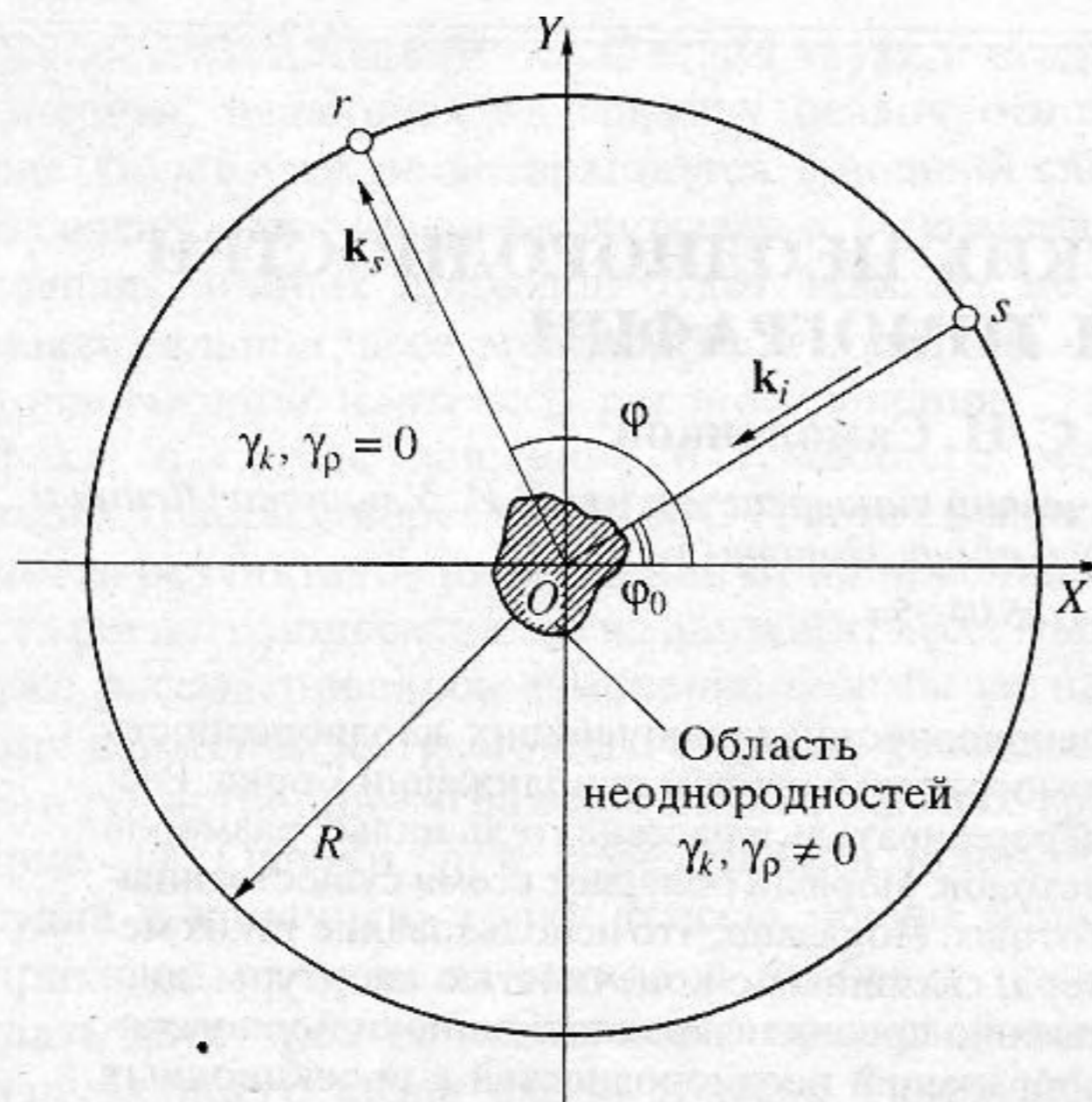


Рис. 1. Схема сбора данных.

Точечные источник s и приемник r расположены на окружности большого радиуса R ; их положения определяются углами ϕ_0 и ϕ соответственно; $\mathbf{k}_i(k\cos\phi_0, k\sin\phi_0)$ – волновой вектор падающего поля, $\mathbf{k}_s(k\cos\phi, k\sin\phi)$ – волновой вектор рассеянного поля.

ностей, т.е. удовлетворяющее уравнению:

$$\Delta p_i(\mathbf{r}) + k^2 p_i(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}), \quad (2)$$

а $p_s(\mathbf{r})$ – поле, рассеянное на неоднородностях, то, воспользовавшись приближением Борна [17], из (1) можно получить интегральное уравнение первого рода

$$p_s(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \{-k^2 \gamma_k(\mathbf{r}') p_i(\mathbf{r}') + \nabla[\gamma_p(\mathbf{r}') \nabla p_i(\mathbf{r}')] \} \times \quad (3) \\ \times g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

где $p_i(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$, а $g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ – функция Грина свободного пространства.

Раскрыв внешний оператор ∇ во втором слагаемом подынтегрального выражения в (3) и учитывая (2), получим

$$p_s = -k^2 \int_{\Omega} [\gamma_k + \gamma_p] p_i g d\mathbf{r}' + \int_{\Omega} \nabla \gamma_p \nabla p_i g d\mathbf{r}'. \quad (4)$$

Рассмотрим второй интеграл в (4). В силу линейности и однородности оператора Δ с учетом (2) имеет место равенство:

$$\nabla \gamma_p \nabla p_i = \frac{1}{2} \{ \Delta(\gamma_p p_i) - p_i \Delta \gamma_p + k^2 \gamma_p p_i \}. \quad (5)$$

Подставим (5) во второй интеграл (4) и разобьем его на три интеграла, соответствующих трем слагаемым в (5). Первый из интегралов двукратным применением первой формулы Грина преобразуется к интегралу от $\gamma_p(\mathbf{r}') p_i(\mathbf{r}') \Delta' g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и, учитывая, что $\Delta' g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -k^2 g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, далее преобразуется к интегралу от $-k^2 \gamma_p(\mathbf{r}') p_i(\mathbf{r}') g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, который взаимно сокращается с интегралом, соответствующим третьему слагаемому в (5). Окончательно (4) принимает вид:

$$p_s(\mathbf{r}) = -k^2 \int_{\Omega} O(\mathbf{r}') p_i(\mathbf{r}') g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (6)$$

где

$$O(\mathbf{r}) = \gamma_k(\mathbf{r}) + \gamma_p(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} k^{-2} \Delta \gamma_p(\mathbf{r}) \quad (7)$$

называется *функцией неоднородностей сжимаемости и плотности*. Ранее выражение (7) было получено в работе [18] через пространственный спектр $O(\mathbf{r})$. Задача дифракционной томографии состоит в определении функций $\gamma_k(\mathbf{r})$ и $\gamma_p(\mathbf{r})$ по данным измерений $p_s(\mathbf{r})$.

Рассмотрим две модели акустических неоднородностей, достаточно полно характеризующие свойства реальных пространственно ограниченных неоднородностей в задачах дифракционной томографии.

Первая модель соответствует задачам восстановления *одиночного рассеивателя* в однородном пространстве. Для анализа свойств одиночных рассеивателей будем изучать неоднородность в виде бесконечного жидкоупругого цилиндра радиуса a_1 , плотности ρ_1 и со скоростью звука c_1 в нем (сжимаемость вычисляется через плотность ρ и скорость c по формуле: $\kappa = 1/(\rho c^2)$).

В работах [15, 16] и других использовалось понятие *контраста* неоднородности скорости звука. Будем понимать под контрастами неоднородностей сжимаемости и плотности средние значения функций $\gamma_k(\mathbf{r})$ и $\gamma_p(\mathbf{r})$ в Ω .

Вторая модель неоднородностей характерна для задач ультразвуковой томографии мягких биологических тканей, в которых область неоднородностей имеет размеры десятки длин волн и слабый контраст. Часто в таких задачах представляет интерес не сама область неоднородностей, а относительно мелкие контрастные неоднородности внутри нее. Можно условно разделить неоднородности на два типа – масштабные и локальные – и рассматривать область неоднородностей в виде совокупности *локальных неоднородностей внутри масштабной*. Масштабными неоднородностями будем считать

протяженные объекты с плавным профилем и слабым контрастом, а локальными – объекты малых волновых размеров с резким профилем и высоким контрастом. Будем исследовать их свойства на модели в виде системы двух бесконечных соосных жидкоупругих цилиндров с радиусами a_1 и $a_2 < a_1$, значениями плотности ρ_1 и скорости звука c_1 при $a_2 < r < a_1$ и ρ_2, c_2 при $r \leq a_2$, где r – расстояние от оси цилиндров.

Получим для рассеянного поля как точное решение, так и решение в приближении Борна. Будем рассматривать плоскую задачу. Свяжем с осью цилиндра (с осью системы цилиндров – для второй модели) полярную систему координат ρ и ϕ . Пусть $p_i(\mathbf{r})$ создается точечным источником в точке $s(R, \phi_0)$ (рис. 1). Воспользуемся разложением $p_i(\mathbf{r})$ [18]:

$$p_i(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(k\rho) H_n^{(1)}(kR) \cos n(\phi - \phi_0), \quad (8)$$

где J_n – функция Бесселя порядка n , $H_n^{(1)}$ – функция Ханкеля n -го порядка 1-го рода, $\epsilon_n = (2 - \delta_{0n})$. Рассеянное поле можно также записать в виде:

$$p_s(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(k\rho) \cos n(\phi - \phi_0), \quad (9)$$

где A_n – коэффициенты разложения, определяемые из граничных условий непрерывности давления и нормальной составляющей колебательной скорости полного поля на границе $\rho = a_1$ (границах $\rho = a_1$ и $\rho = a_2$). Запишем полное поле внутри неоднородности.

Для одиночного цилиндра $p(\mathbf{r})$ раскладывается в ряд по функциям Бесселя:

$$p(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(k_1\rho) \cos n(\phi - \phi_0),$$

$$k_1 = \omega/c_1, \quad \rho \leq a_1,$$

B_n – коэффициенты разложения. Для системы двух цилиндров поле записывается для каждого цилиндра в отдельности:

$$p(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(k_2\rho) \cos n(\phi - \phi_0),$$

$$k_2 = \omega/c_2$$

для $\rho \leq a_2$ и

$$p(\rho, \phi) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_n(k_1\rho) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n H_n^{(1)}(k_1\rho) \right\} \times$$

$$\times \cos n(\phi - \phi_0),$$

$$k_1 = \omega/c_1$$

для $a_2 < \rho < a_1$ (первый ряд – поле во внешнем цилиндре в отсутствие внутреннего, второй – поле рассеянное внутренним цилиндром во внешний), B_n, C_n и D_n – коэффициенты разложения.

После подстановки выражений для полного поля в граничные условия получим: 1) для одиночного цилиндра – систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными A_n и B_n для каждого n ; 2) для системы двух цилиндров – систему из четырех уравнений для четырех неизвестных A_n, B_n, C_n и D_n . Решив системы, найдем коэффициенты

$$\begin{cases} A_n = A_n^* H_n^{(1)}(kR), \\ A_n^* = \frac{i}{4} \epsilon_n \frac{J_n'(ka_1) - \beta_n J_n(ka_1)}{H_n^{(1)'}(ka_1) - \beta_n H_n^{(1)}(ka_1)}, \end{cases} \quad (10)$$

где для одиночного цилиндра

$$\beta_n = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_1 c_1} \left[\frac{J_n'(k_1 a_1)}{J_n(k_1 a_1)} \right], \quad (11)$$

а для системы двух соосных цилиндров

$$\begin{cases} \beta_n = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_1 c_1} \left[\frac{J_n'(k_1 a_1) - \gamma_n H_n^{(1)'}(k_1 a_1)}{J_n(k_1 a_1) - \gamma_n H_n^{(1)}(k_1 a_1)} \right], \\ \gamma_n = \frac{J_n'(k_1 a_2) - \alpha_n J_n(k_1 a_2)}{H_n^{(1)'}(k_1 a_2) - \alpha_n H_n^{(1)}(k_1 a_2)}, \\ \alpha_n = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \left[\frac{J_n'(k_2 a_2)}{J_n(k_2 a_2)} \right]. \end{cases} \quad (12)$$

Подставив (8) и функцию Грина [17]:

$$g(R, \phi | \rho', \phi') =$$

$$= \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(k\rho') H_n^{(1)}(kR) \cos n(\phi - \phi') \quad (13)$$

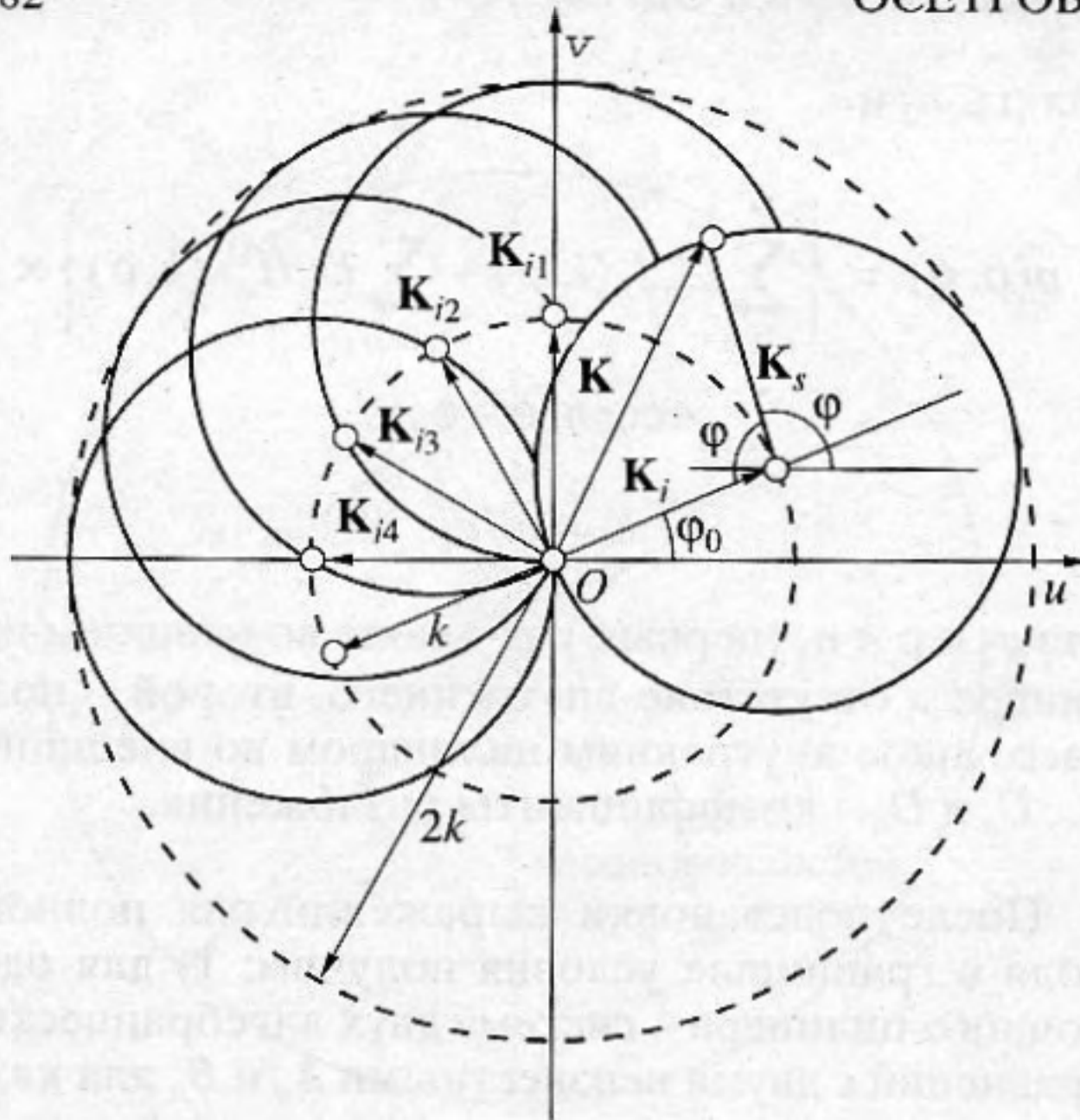


Рис. 2. Соответствия для проекционной схемы между положением излучателя ϕ_0 , положением приемника ϕ и точками на пространственно-частотной плоскости uOv , в которых вычисляются значения спектра функции неоднородностей. Векторы K_{i1} , K_{i2} , K_{i3} и т.д. соответствуют различным положениям источника. Вектор K_s определяется положением приемника. Вектор K соответствует точке, в которой значение спектра функции неоднородностей определяется из измеренного рассеянного поля при фиксированных положениях источника и приемника.

в (7) и проинтегрировав, получим коэффициенты разложения (9) в приближении Борна:

$$A_n^* = -\frac{\pi}{8} \sum_{j=1}^N \epsilon_n \left\{ -[(\gamma_{\kappa j} - \gamma_{\kappa(j-1)}) + (\gamma_{\rho j} - \gamma_{\rho(j-1)})] \times \right. \\ \times \frac{(ka_j)^2}{2} [J_n^2(ka_j) - J_{n-1}(ka_j)J_{n+1}(ka_j)] - (\gamma_{\rho j} - \\ \left. - \gamma_{\rho(j-1)})ka_j \left[\frac{n}{ka_j} J_n^2(ka_j) - J_n(ka_j)J_{n+1}(ka_j) \right] \right\}, \quad (14)$$

где N равно 1 для одиночного цилиндра и 2 для системы двух цилиндров; $\gamma_{\kappa 1} = [(\rho_0 c_0^2)/(\rho_1 c_1^2)] - 1$, $\gamma_{\kappa 2} = [(\rho_0 c_0^2)/(\rho_2 c_2^2)] - 1$, $\gamma_{\rho 1} = (\rho_1 - \rho_0)/\rho_1$, $\gamma_{\rho 2} = (\rho_2 - \rho_0)/\rho_2$, $\gamma_{\kappa 0} = \gamma_{\rho 0} = 0$.

Далее рассмотрим две схемы измерений, обладающих существенными свойствами большинства известных схем.

Первая схема (рис. 1) характеризует проекционные методы. Область неоднородностей облучается волной от точечного источника $s(R, \phi_0)$, рассеянное поле измеряется точечным приемником $r(R, \phi)$. Из-

мерения производятся на одной частоте ω , при различных угловых положениях источника ϕ_0 и приемника ϕ , которые независимо изменяются от 0 до 2π . Область неоднородностей и прямоугольная система координат XOY располагаются в центре окружности радиуса R .

Вторая схема характеризует многочастотные методы и отличается от первой тем, что источник и приемник находятся в одной точке $\phi = \phi_0$, положение которой изменяется от 0 до 2π , а измерения осуществляются в полосе частот или в импульсном режиме.

Частная, справедливая для данной геометрии измерений, проекционная теорема Фурье для дифракционной томографии формулируется следующим образом:

Комплексная амплитуда рассеянного поля, измеренная в точке ϕ на окружности достаточно большого радиуса R , при положении источника падающей волны на той же окружности в точке ϕ_0 равна значению спектра функции неоднородностей $\hat{O}(K)$ в точке K на пространственно-частотной плоскости uOv (рис. 2) с точностью до постоянного множителя, независимого от ϕ_0 и ϕ . Координаты точки $K(u, v)$ определяются выражениями:

$$\begin{cases} u = k(\cos \phi_0 + \cos \phi) \\ v = k(\sin \phi_0 + \sin \phi) \end{cases} \quad (15)$$

Заменим функции Ханкеля в разложениях функции Грина (13) и падающего поля (8) их асимптотическими представлениями при больших kR :

$$H_n^{(1)}(kR) \approx (-i)^n \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \exp i \left(kR - \frac{\pi}{4} \right). \quad (16)$$

Подстановка (16) в (8), после перегруппировки членов, дает следующее выражение:

$$p_i(\rho', \phi') \approx [2/(\pi kR)]^{1/2} \exp i(kR - \pi/4) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n J_n(k\rho') \cos n(\phi' - \phi_0),$$

где ряд является разложением функции

$$\begin{aligned} \exp[-ik\rho' \cos(\phi' - \phi_0)] &= \\ &= \exp[-ik(x' \cos \phi_0 + y' \sin \phi_0)]. \end{aligned}$$

Из функции Грина (13) также выделим множитель

$$\exp[-ik\rho' \cos(\phi - \phi')] = \exp[-ik(x' \cos \phi + y' \sin \phi)].$$

Подстановкой этих выражений в интеграл (7) последний сводится к двумерному преобразованию Фурье:

$$p_s(R, \phi, \phi_0) \underset{R \rightarrow \infty}{\approx} \frac{k^2 \exp i 2 k R}{2 \pi k R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O(x', y') \exp \{-i k \times [x'(\cos \phi_0 + \cos \phi) + y'(\sin \phi_0 + \sin \phi)]\} dx' dy' = \frac{k^2 \exp i 2 k R}{2 \pi k R} \hat{O}(\mathbf{K}), \quad (17)$$

где \mathbf{K} определяется формулами (15).

Левая часть (17) определена при фиксированных значениях ϕ_0 и ϕ , следовательно, правая часть $\hat{O}(\mathbf{K})$ – при фиксированном \mathbf{K} . Повторяя измерения при различных положениях излучателя и приемника, можно найти $\hat{O}(\mathbf{K})$ и при других значениях \mathbf{K} . Рассмотрим два метода.

Проекционный метод. Зафиксируем источник и будем изменять положение приемника ϕ от 0 до 2π . Измеренное $p_s(\mathbf{r})$ соответствует точкам на плоскости uOv (рис. 2), принадлежащим окружности радиуса k с центром на конце вектора $\mathbf{K}_i (u = k \cos \phi_0, v = k \sin \phi_0)$. Повторяя измерения при различных положениях источника, получим множество таких окружностей, которые заполнят круг радиуса $2k$.

Многочастотный метод. Амплитуда $p_s(\mathbf{r})$ соответствует значению $\hat{O}(\mathbf{K})$ в точке $\mathbf{K} (u = 2k \cos \phi_0, v = 2k \sin \phi_0)$ на окружности $2k$ (рис. 3). Изменяя положение излучателя и приемника ϕ_0 от 0 до 2π , получим значения $\hat{O}(\mathbf{K})$ на всей окружности $2k$. Повторяя эксперимент на различных временных частотах, определим $\hat{O}(\mathbf{K})$ на множестве концентрических окружностей. Функция неоднородностей $O(\mathbf{r})$ вычисляется из спектра обратным преобразованием Фурье.

Подставив (9), с учетом (10), в левую часть (17), получим

$$\hat{O}(\mathbf{K}) = -k^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^* \cos n(\phi - \phi_0).$$

Принимая во внимание осевую симметрию спектров рассматриваемых моделей неоднородностей, явно выразим $\hat{O}(\mathbf{K})$ через $|\mathbf{K}| = [u^2 + v^2]^{1/2}$. Для проекционной схемы получим выражение:

$$\hat{O}(|\mathbf{K}|) = -k^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^* \cos \left[n \arccos \left(\frac{|\mathbf{K}|^2}{2k} - 1 \right) \right], \quad (18)$$

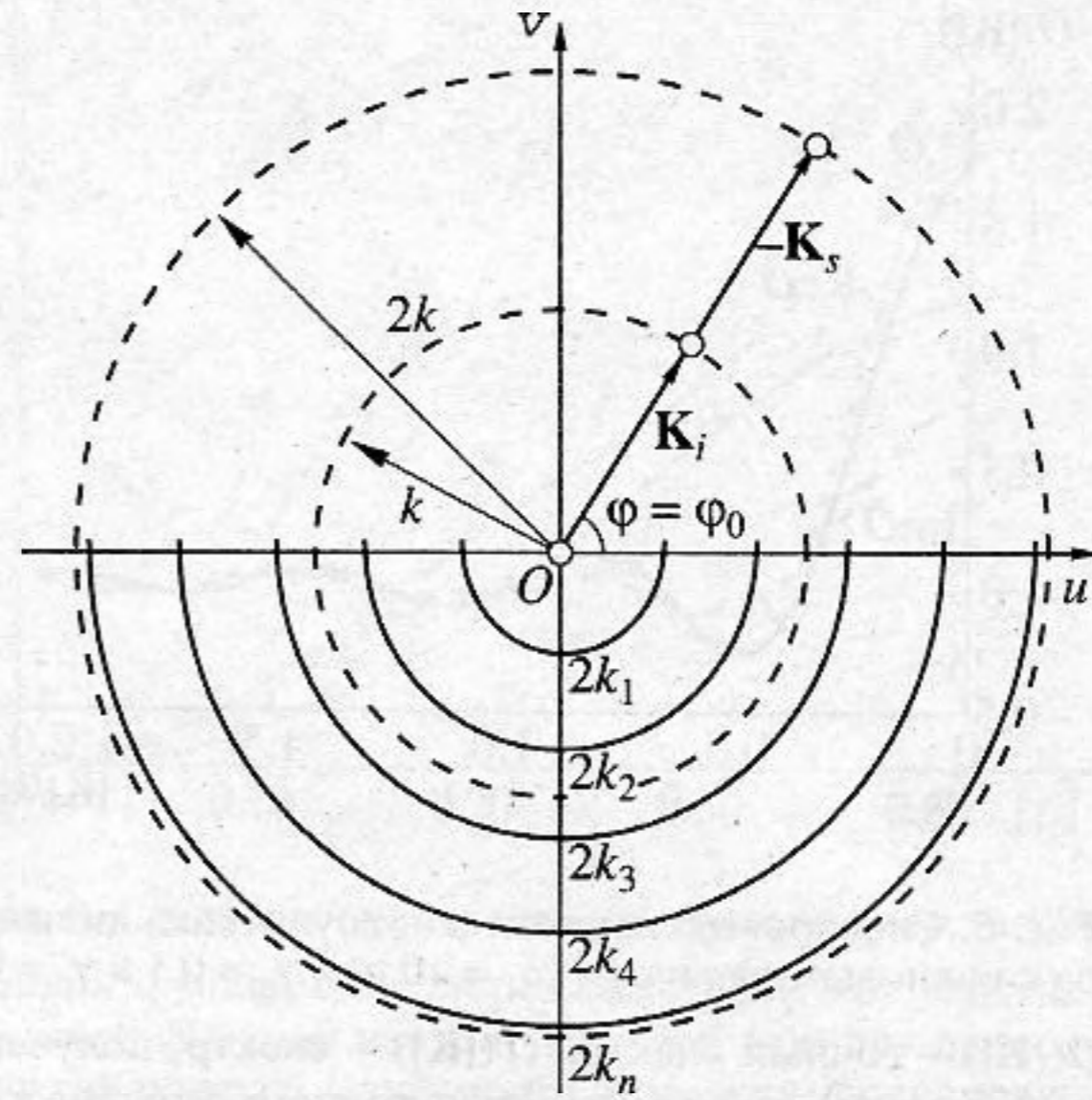


Рис. 3. Соответствия для многочастотной схемы между положением излучателя и приемника ϕ_0 , временными частотами и точками на пространственно-частотной плоскости uOv , в которых вычисляются значения спектра функции неоднородностей; окружности $2k_1, 2k_2, 2k_3, \dots, 2k_n$ соответствуют различным временным частотам.

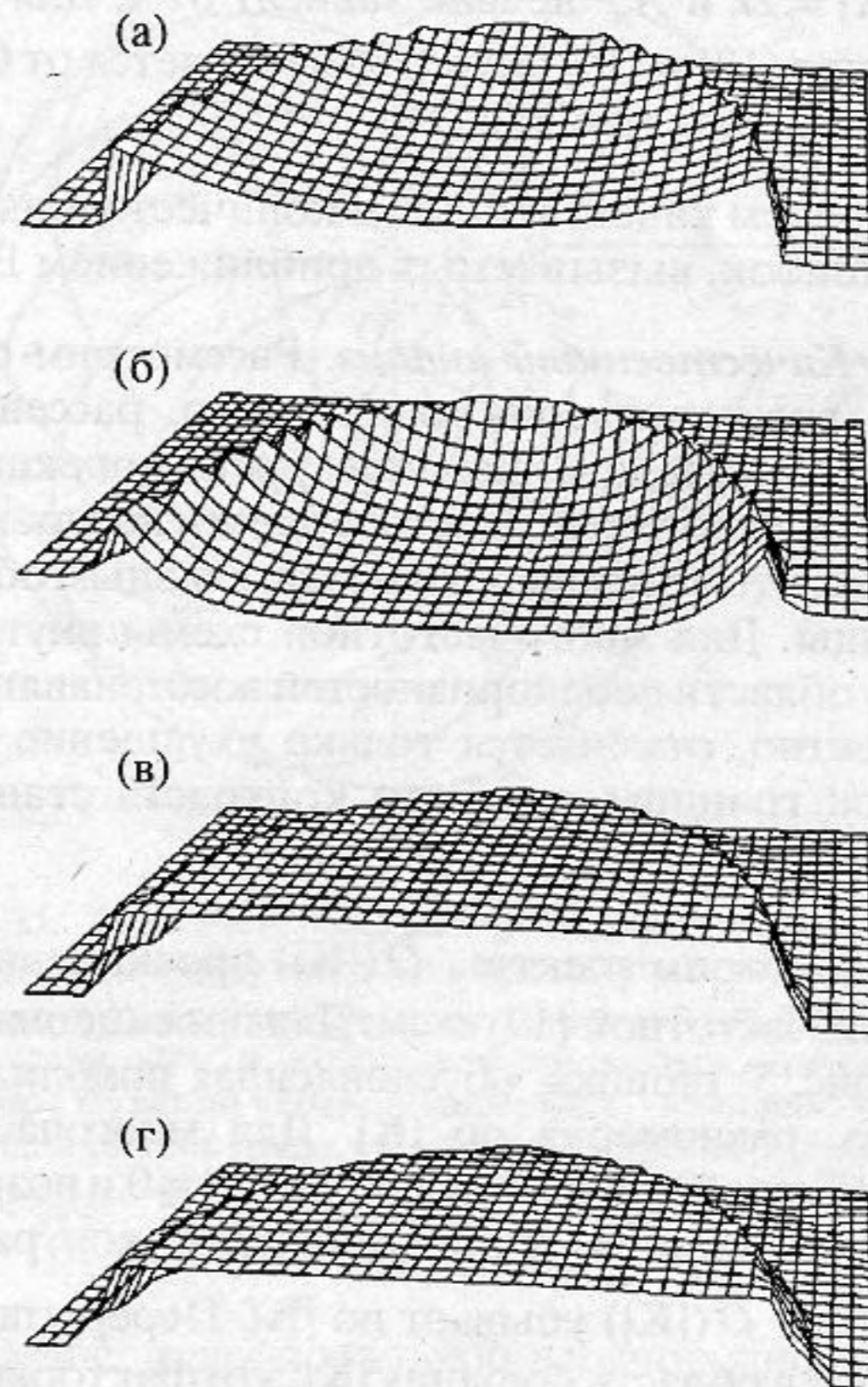


Рис. 4. Результаты восстановления одиночного рассеивателя с волновым радиусом $ka_1 = 100$ при $\gamma_p = 0$ проекционным методом: а – $\gamma_k = 0.02$, б – $\gamma_k = 0.04$ и многочастотным методом: в – $\gamma_k = 0.05$, г – $\gamma_k = 0.1$.

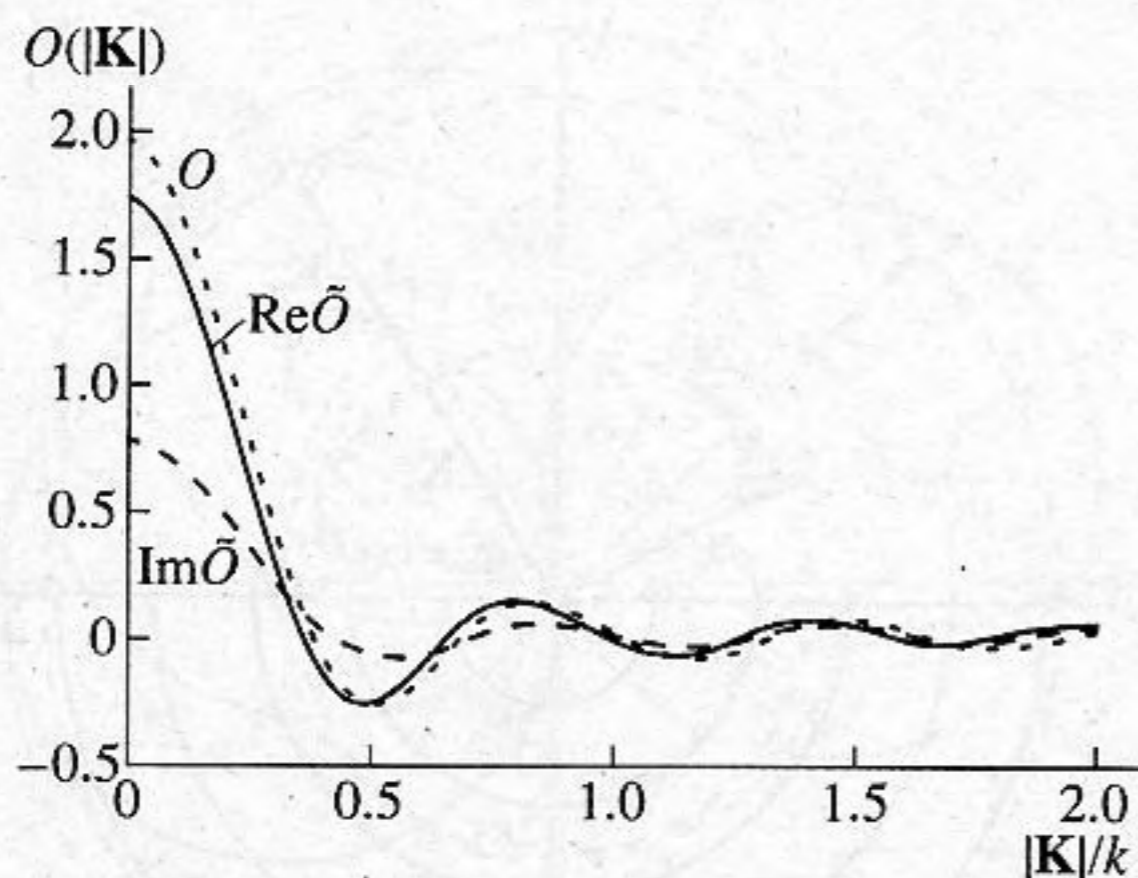


Рис. 5. Спектры одиночного жидкоупругого цилиндра с волновым радиусом $ka_1 = 10$ при $\gamma_k = 0.1$ и $\gamma_p = 0$; $O(|\mathbf{K}|)$ – точный спектр, $\tilde{O}(|\mathbf{K}|)$ – спектр, полученный проекционным методом из точного решения для рассеянного поля.

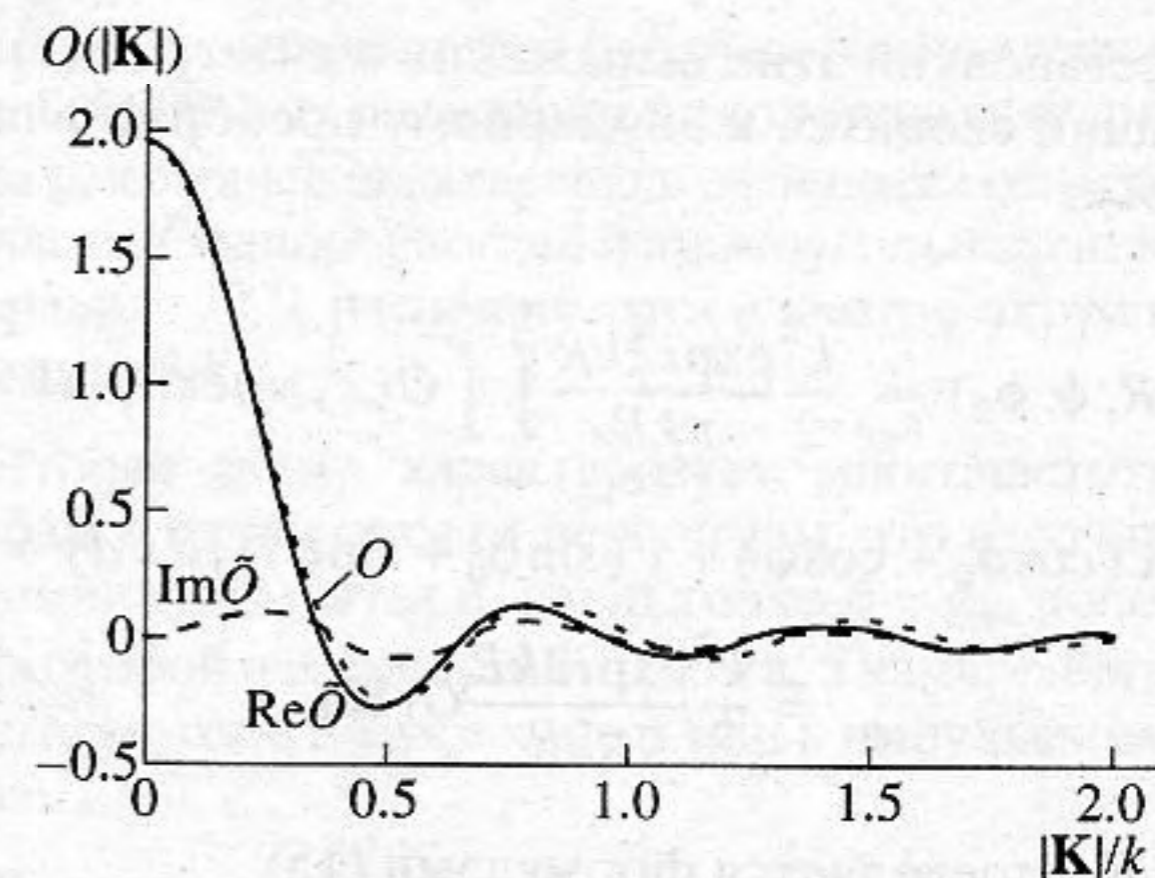


Рис. 6. Спектры одиночного жидкоупругого цилиндра с волновым радиусом $ka_1 = 10$ при $\gamma_k = 0.1$ и $\gamma_p = 0$; $O(|\mathbf{K}|)$ – точный спектр, $\tilde{O}(|\mathbf{K}|)$ – спектр, полученный многочастотным методом из точного решения для рассеянного поля.

где $|\mathbf{K}| \in [0, 2k]$, а для многочастотной –

$$\hat{O}(|\mathbf{K}|) = -\left(\frac{|\mathbf{K}|}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^*, \quad (19)$$

где $|\mathbf{K}| = 2k$ и A_n^* неявно зависят от k . Для сопоставления (18) и (19) $|\mathbf{K}|$ в (19) изменяется от 0 до $2k$, а k – волновое число в (18).

Сделаем качественный и количественный анализ ошибок, вызываемых приближением Борна.

А. Качественный анализ. Рассмотрим результаты восстановления одиночного рассеивателя (рис. 4). С увеличением контраста проекционная схема быстро теряет достоверность воспроизведения так, что восстанавливаются, главным образом, границы. Для многочастотной схемы внутренняя часть области неоднородностей восстанавливается корректно, отмечается только ухудшение разрешения: границы с ростом контраста становятся пологими.

Рассмотрим спектры $\hat{O}(|\mathbf{K}|)$ проекционной (18) и многочастотной (19) схем. Для проекционной схемы (рис. 5) ошибка, обусловленная приближением Борна, равномерна по $|\mathbf{K}|$. Для многочастотной (рис. 6) ошибка равна нулю при $|\mathbf{K}| = 0$ и возрастает с увеличением $|\mathbf{K}|$ пропорционально контрасту, но при этом $\hat{O}(|\mathbf{K}|)$ убывает по $|\mathbf{K}|$. Перераспределяя ошибку в область больших $|\mathbf{K}|$, эти факторы уменьшают интегральную ошибку.

Обратимся к результатам восстановления локальной неоднородности внутри масштабной (рис. 7). В проекционном методе, несмотря на

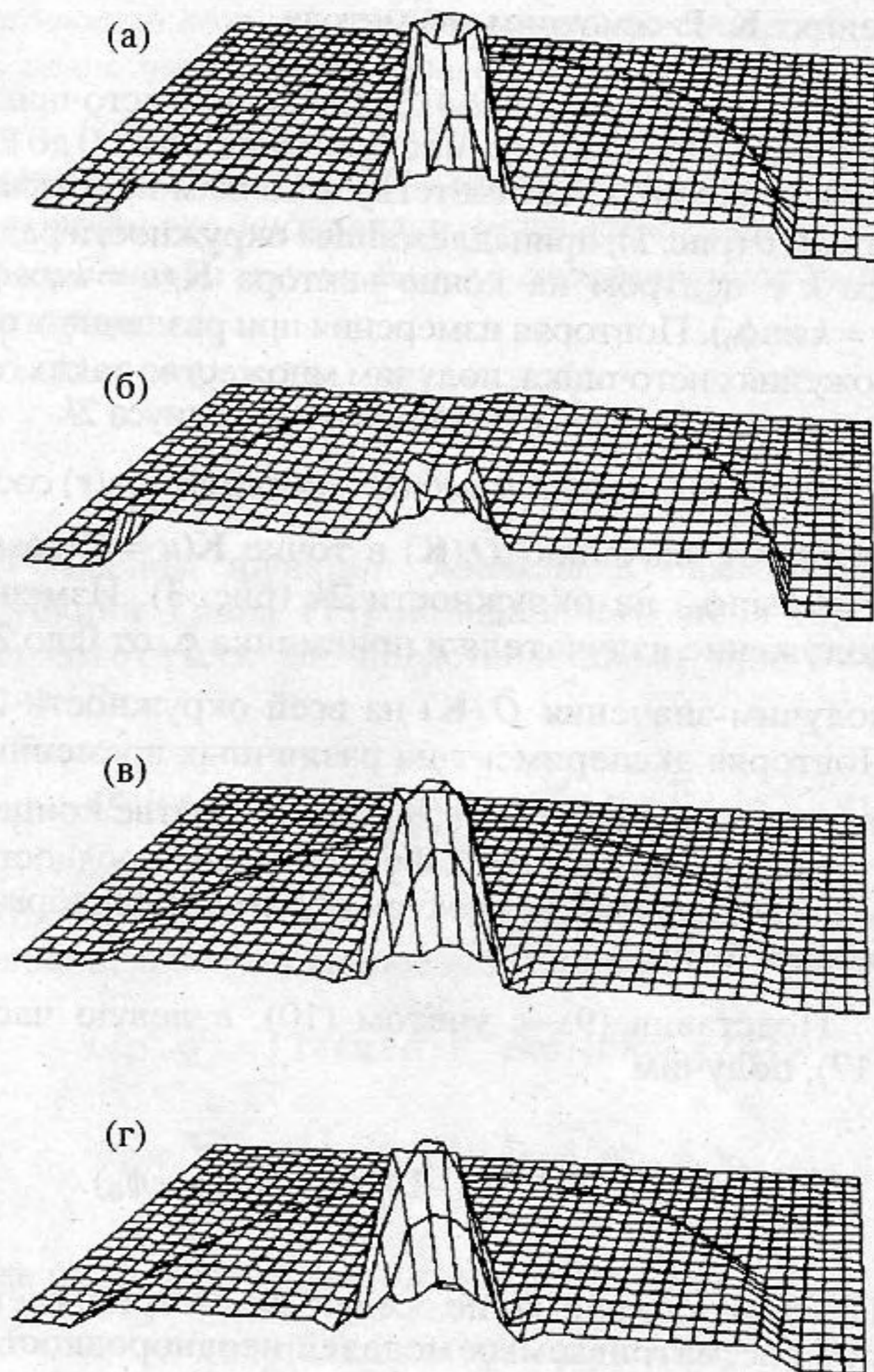


Рис. 7. Результаты восстановления локальной неоднородности ($ka_2 = 15$) внутри масштабной ($ka_1 = 100$) проекционным методом: а – $\gamma_{k1} = 0.005$, б – $\gamma_{k1} = 0.01$ при $\gamma_{k2} = 0.05$ и многочастотным методом: в – $\gamma_{k1} = 0.03$, г – $\gamma_{k1} = 0.06$ при $\gamma_{k2} = 0.3$. Во всех случаях $\gamma_p = 0$.

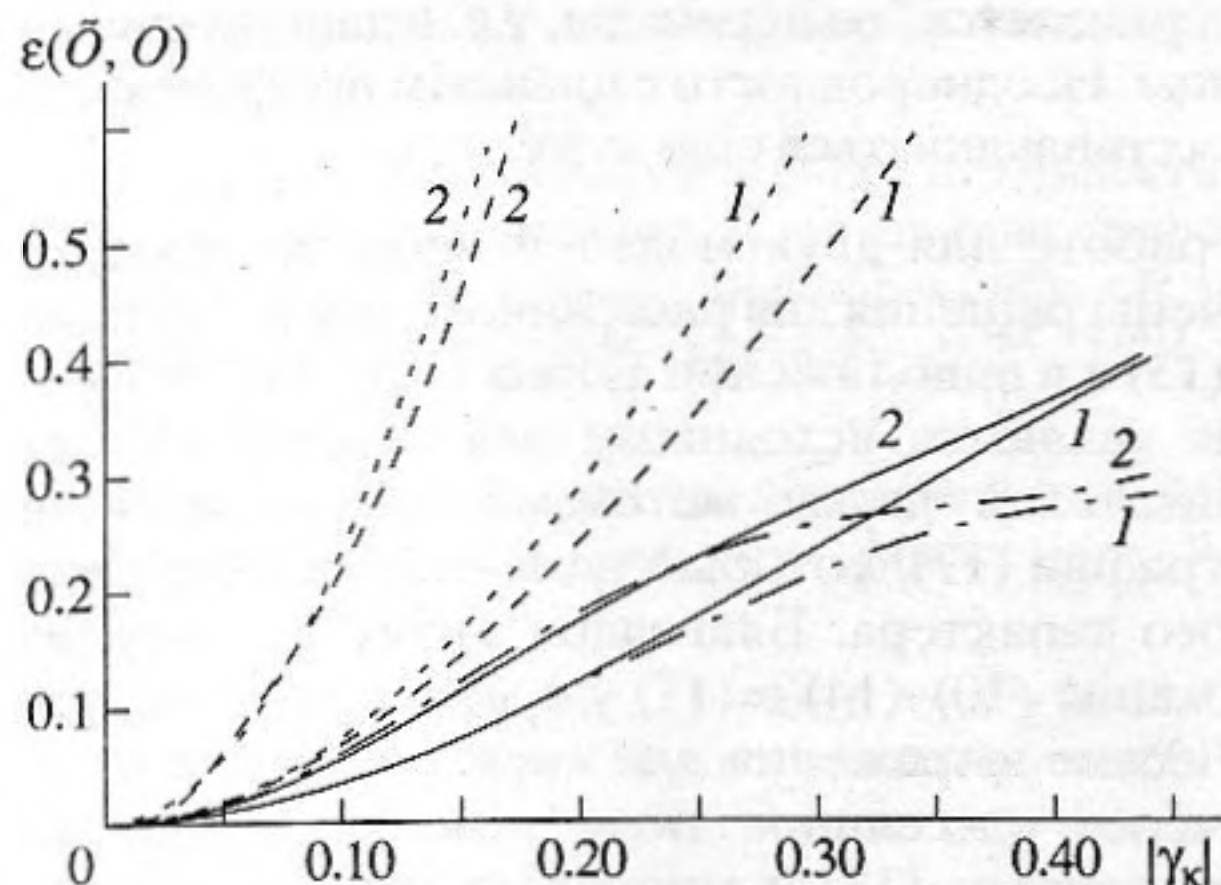


Рис. 8. Среднеквадратическое отклонение восстановленной функции неоднородностей $\tilde{O}(r)$ от действительной функции неоднородностей $O(r)$ для одиночного цилиндра в зависимости от модуля неоднородности сжимаемости γ_k . Проекционный метод: штриховые линии – положительные γ_k , точечные – отрицательные γ_k ; многочастотный метод: сплошные линии – положительные γ_k , штрихпунктирные – отрицательные γ_k ; 1 – $ka_1 = 10$, 2 – $ka_1 = 20$.

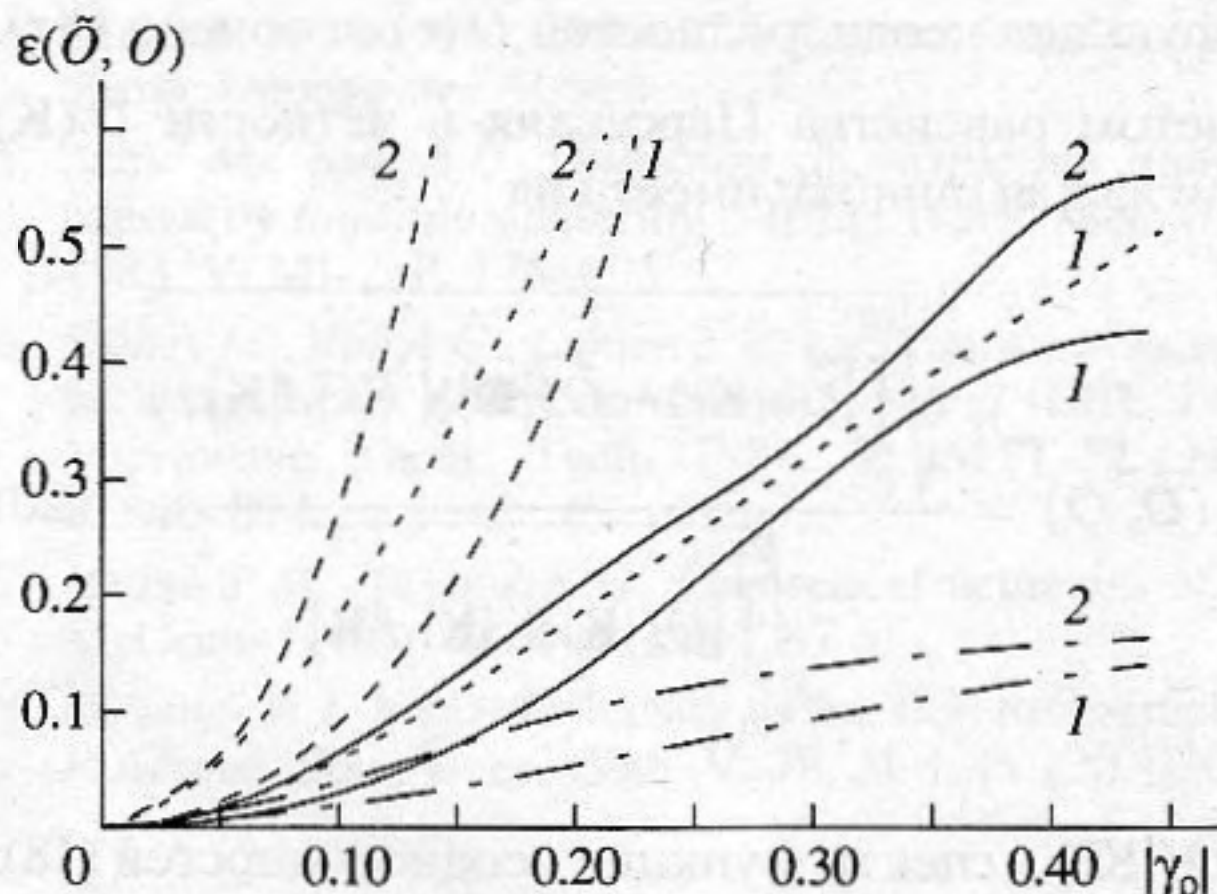


Рис. 9. Среднеквадратическое отклонение восстановленной функции неоднородностей $\tilde{O}(r)$ от действительной функции неоднородностей $O(r)$ для одиночного цилиндра в зависимости от модуля неоднородности плотности γ_ρ . Проекционный метод: штриховые линии – положительные γ_ρ , точечные – отрицательные γ_ρ ; многочастотный метод: сплошные линии – положительные γ_ρ , штрихпунктирные – отрицательные γ_ρ ; 1 – $ka_1 = 10$, 2 – $ka_1 = 20$.

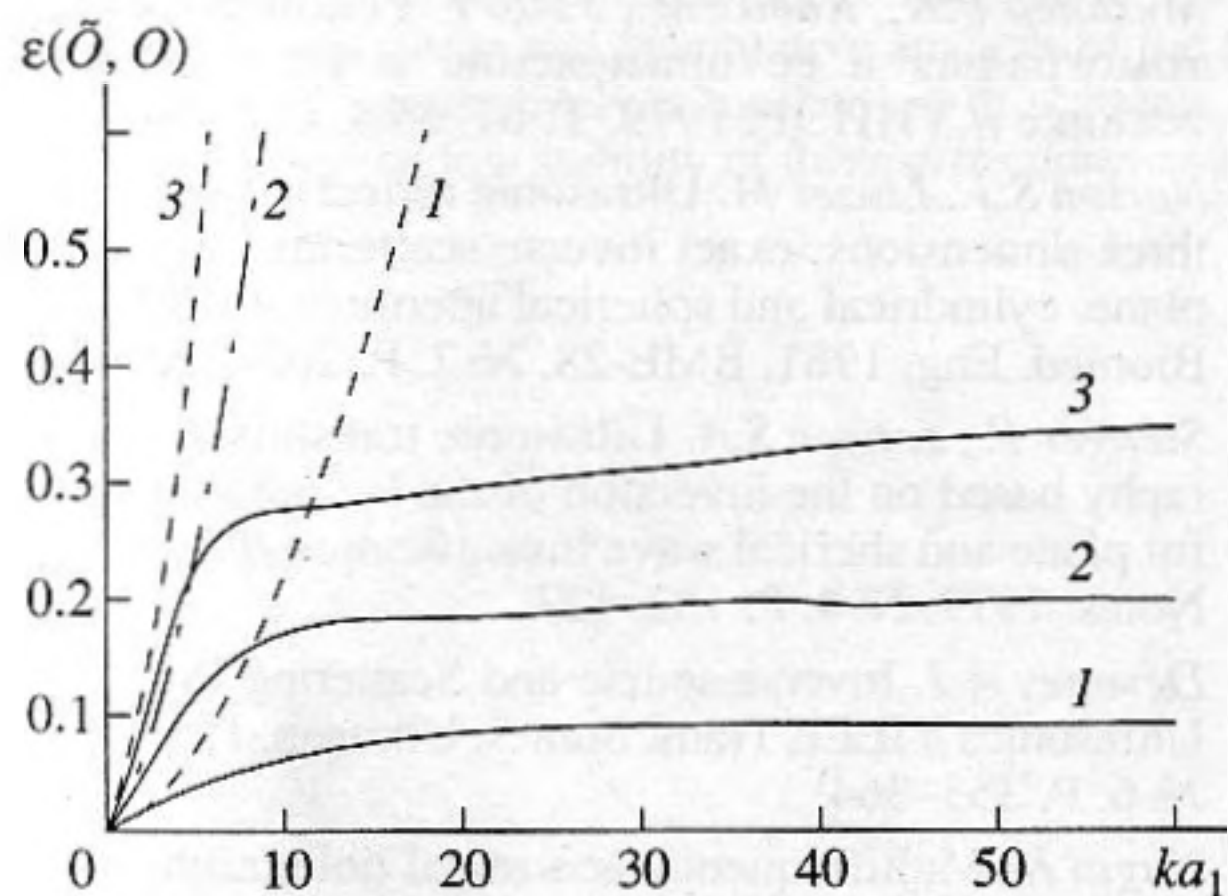


Рис. 10. Среднеквадратическое отклонение восстановленной функции неоднородностей $\tilde{O}(r)$ от действительной функции неоднородностей $O(r)$ для одиночного цилиндра в зависимости от волнового радиуса ka_1 для трех значений неоднородности сжимаемости. Проекционный метод – штриховые линии, многочастотный метод – сплошные линии; 1 – $\gamma_k = 0.1$, 2 – $\gamma_k = 0.2$, 3 – $\gamma_k = 0.3$.

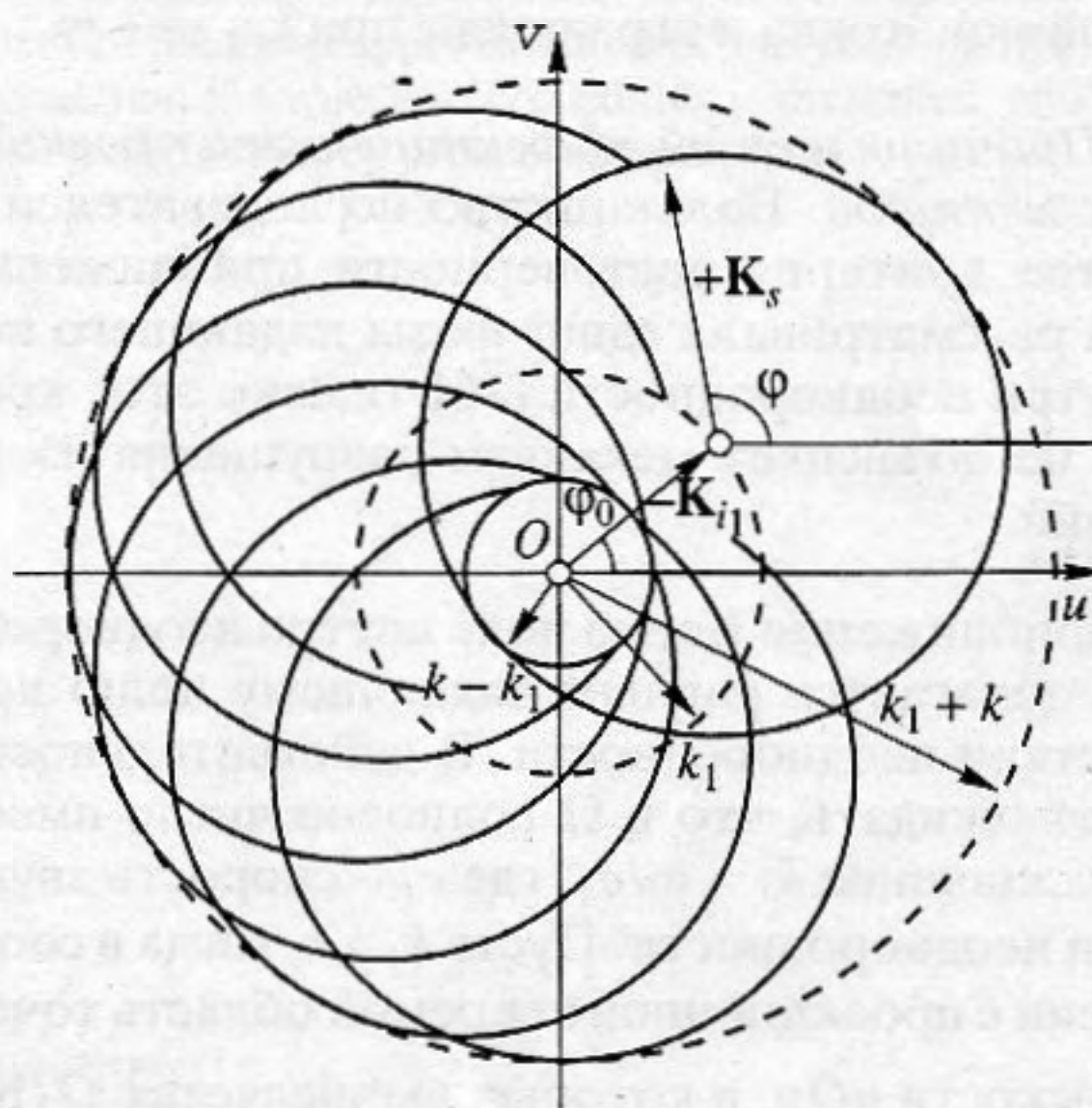


Рис. 11. Действительные соответствия для проекционных схем между положениями излучателя ϕ_0 , приемника ϕ и точками на пространственно-частотной плоскости uOv , в которых вычисляются значения спектра функции неоднородностей. k – волновое число в однородной среде, k_1 – волновое число внутри неоднородности.

вполне адекватное воспроизведение масштабной неоднородности, изображение локальной быстро деградирует с ростом контраста масштабной. Многочастотный метод вновь оказывается более устойчивым. Здесь, как и для одиночного рассеивателя, ошибка приближения Борна ухудшает только

разрешение, и для локальной неоднородности разрешение зависит от контраста масштабной.

Б. Количественный анализ. Будем считать ошибку приближения Борна ϵ_0 как нормированное среднеквадратическое отклонение восстановлен-

ной функции неоднородностей $\tilde{O}(\mathbf{r})$ от точной $O(\mathbf{r})$. С учетом равенства Парсеваля и четности $\hat{O}(\mathbf{K})$ формула для ошибки имеет вид

$$\varepsilon_o(\tilde{O}, O) = \frac{\sqrt{\int_0^{2k} |\tilde{O}(|\mathbf{K}|) - \hat{O}(|\mathbf{K}|)|^2 |\mathbf{K}| d|\mathbf{K}|}}{\sqrt{\int_0^{2k} |\hat{O}(|\mathbf{K}|)|^2 |\mathbf{K}| d|\mathbf{K}|}}, \quad (20)$$

где $\tilde{O}(|\mathbf{K}|)$ – спектр функции неоднородностей (18), (19), полученный из точного решения для рассеянного поля (10)–(13) $\hat{O}(|\mathbf{K}|)$ – точное выражение для спектра функции неоднородности, полученное из рассеянного поля в приближении Борна (10), (14).

Результаты расчетов (20) для одиночного рассеивателя, в зависимости от γ_k , γ_p и ka_1 , представлены на рис. 8–10. Наибольший интерес представляют зависимость ошибки от ka_1 (рис. 10). Для проекционной схемы ошибка растет как $(ka_1)^2$, а для многочастотной монотонна и ограничена при $ka_1 \rightarrow \infty$.

В. Причины низкой эффективности проекционных методов. Большинство исследователей в качестве критерия достоверности приближения Борна рассматривали сдвиг фазы падающего поля внутри неоднородности [16], однако этот критерий не объясняет механизм разрушения изображений.

В приближении Борна поле внутри неоднородности полагается равным падающему полю при отсутствии неоднородности. В действительности следует ожидать, что в Ω волновое число имеет другое значение $k_1 = \omega/c_1$, где c_1 – скорость звука внутри неоднородности. Пусть $k_1 > k$, тогда в соответствии с проекционной теоремой область точек на плоскости uOv , в которых вычисляется $\tilde{O}(\mathbf{K})$, есть окружность радиуса k с центром на конце вектора длиной k_1 (рис. 11). Повторяя измерения при различных положениях источника, получим множество таких окружностей, которые заполнят кольцо $k_1 - k \leq |\mathbf{K}| \leq k_1 + k$. Для $k_1 < k$ также получается кольцо $k - k_1 \leq |\mathbf{K}| \leq k + k_1$.

В измерениях рассеянного поля $p_s(\mathbf{r})$ нет данных об $\hat{O}(\mathbf{K})$ внутри круга $|\mathbf{K}| < |k - k_1|$. Его радиус пропорционален контрасту. С другой стороны, с увеличением размера неоднородности ее спектр сужается (рис. 5) и оказывается внутри этого круга. Данные измерений несут информацию только о “высокочастотных” компонентах $O(\mathbf{r})$, поэтому

“подчеркивается” ее перепады, т.е. в данном случае границы. Неоднородности с плавным профилем будут восстанавливаться еще хуже.

В работе для двух моделей неоднородностей получены решения для рассеянного поля – точные (10)–(13) и в приближении Борна (10), (14). Эти решения являются исходными для восстановления рассеивателей двумя методами дифракционной томографии (17), которые не имеют ошибок численного характера. Благодаря этому подходу, из выражений (10)–(14) и (17) удалось получить аналитические выражения для спектров рассеивателей через рассеянное поле при сборе данных проекционным (18) и многочастотным (19) способами. Выражения (18) и (19) являются основой для анализа достоверности приближения Борна в методах дифракционной томографии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Greenleaf J.F., Jonson S.A., Lent A.H. Measurement of spatial distribution of refractive index in tissues by ultrasonic computer assisted tomography // *Ultrasound Med. Biol.* 1978. № 3. P. 327–339.
2. Мюллер Р.К., Кавих М., Уэйд Г. Реконструктивная томография и ее применение в ультразвуковой технике // *ТИИЭР*. 1979. Т. 67. № 4. С. 567–587.
3. Norton S.J., Linzer M. Ultrasonic reflectivity imaging in three dimensions: exact inverse scattering solutions for plane, cylindrical and spherical apertures // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1981. BME-28. № 2. P. 202–220.
4. Stenger F., Jonson S.A. Ultrasonic transmission tomography based on the inversion of the Helmholtz equation for plane and spherical wave insonification // *Appl. Math. Notes*. 1979. № 4. P. 102–127.
5. Devaney A.J. Inverse source and Scattering Problems in Ultrasonics // *IEEE Trans. Sonics. Ultrason.* 1983. SU-30. № 6. P. 355–364.
6. Nagai K. Multifrequency acoustical holography using a narrow pulse // *IEEE Trans. Sonics. Ultrason.* 1984. SU-31. № 3. P. 151–156.
7. Осетров А.В. Теория пространственно-временной дифракционной томографии при сканировании одиночного приемно-излучателя по плоскости // *Акуст. журн.* 1991. Т. 37. № 3. С. 528–534.
8. Осетров А.В. Акустическая томография // *Зарубежная радиоэлектроника*. 1991. № 5. С. 3–29.
9. Pan S.X., Kak A.C. A Computational Study of Reconstruction algorithms for Diffraction Tomography: Interpolation Versus Filtered Backpropagation // *IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal. Process.* 1983. V. 31. № 5. P. 1262–1275.
10. Буров В.А., Рычагов М.Н. Дифракционная томография как обратная задача рассеяния. Интерполяционный подход. Линеаризованный вариант // *Акуст. журн.* 1992. Т. 38. № 4. С. 631–643.
11. Осетров А.В., Самоленков С.Н. Пространственно-временная дифракционная томография как метод решения обратных задач акустики // *Волны и*

- дифракция — 90. М.: Физическое общество, 1990. Т. 2. С. 59–62.
12. *Осетров А.В., Самоленьков С.Н.* Особенности восстановления протяженных граничных дефектов методами ультразвуковой дифракционной томографии // XI Всесоюзн. Акуст. конф. М., 1991. Секция "П".
 13. *Keller J.B.* Accuracy and validity of the Born and Rytov approximations // *J. Opt. Soc. Amer.* 1969. V. 59. P. 1003–1004.
 14. *Leeman S., Chandler P., Ferrari L.A., Seggie D.A.* Validity of the Born and Rytov approximations // *Progr. Underwater Acoust.: Proc. 12th Congr. Acoust. Assoc. Symp. Underwater Acoust.* 1987. P. 35–41.
 15. *Azimi M., Kak A.C.* Distortion of diffraction imaging caused by multiple scattering // *IEEE Trans. Med. Imag.* 1983. V. MI-2. P. 176–195.
 16. *Slaney M., Kak A.C., Larsen L.E.* Limitations of imaging with first-order diffraction tomography // *IEEE Trans. Microwave Theor. Tech.* 1984. V. MTT-32. № 8. P. 860–874.
 17. *Morse P.M., Ingard K.U.* *Theoretical acoustics.* N.-Y.: McGraw-Hill, 1968. 409, 413, 367 p.
 18. *Devaney A.J.* Variable density diffraction tomography // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1985. V. 78. № 1. P. 120–130.

Two Models of Acoustic Scatterers in Diffraction Tomography

A. V. Osetrov and S. N. Samolenkov

*St.- Petersburg State University of Electrical Engineering,
ul. prof. Popova 5, St. Petersburg, 197376 Russia*

Abstract—Scattering from acoustic inhomogeneities of compression and density is analyzed in the context of diffraction tomography based on the first Born approximation. Two types of scatterers are considered: a single scatterer and a small scatterer within a large one. These scatterers are studied by two procedures. One involves all essential properties of projective schemes and the other is based on multifrequency schemes. These procedures were suggested to avoid computational errors due to a finite size of the aperture, sampling interval, and interpolation step. A qualitative and quantitative analysis of the residual error of the Born approximation is analyzed qualitatively and quantitatively, a mechanism of scatterer image degradation in projective procedures is presented, and reasons for the low stability of these procedures as compared to multifrequency procedures are given.