АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1996, том 42, № 6, с. 754–759

УДК 534.1/2

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

© 1996 г. **В. С. Булдырев, Н. Г. Гельфрейх**

Санкт-Петербургский государственный университет
198194 Санкт-Петербург, ул. Ульяновская, 1

Поступила в редакцию 08.06.95 г.

Рассмотрена плоская задача дифракции акустической цилиндрической волны на выпуклой оболочке произвольной формы. Взаимодействие оболочки с акустическим полем в окружающей среде моделируется граничным условием, содержащим помимо самой функции и нормальной производной еще и производную второго порядка по касательному к оболочке направлению. Для волнового поля, рассеянного оболочкой, в освещенной области построены равномерные асимптотические разложения по обратным степеням частоты, которые позволяют проследить формирование в окрестности критического луча головной волны, возникающей в окружающей среде за счет распространения колебаний по оболочке. Вдали от критического луча полученные формулы описывают существующие порознь отраженную и головную волну. Проведен физический анализ главных членов полученных асимптотических разложений.

Статья является продолжением работы [1], в которой было построено решение задачи дифракции цилиндрической волны на мембранной цилиндрической круговой оболочке. Асимптотический анализ точного решения задачи, выполненный в этой работе, позволил установить форму асимптотического разложения волнового поля в окружающей оболочку среде в общем случае. В настоящей работе будет построено высокочастотное асимптотическое разложение решения задачи дифракции на мембранной цилиндрической оболочке произвольного сечения, при этом используется форма асимптотического разложения, установленная в работе [1].

Для удобства читателя повторим постановку рассматриваемой задачи дифракции, данную в [1]. Требуется в окружающей оболочку жидкой среде найти решение уравнения:

$$\Delta U + k^2 U = -\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \qquad (1)$$

при граничном условии

$$\left[\gamma^2 q^2 a^2 + a\frac{\partial^2}{\partial s^2}a\right]\left(\eta U - \frac{\partial U}{\partial n}\right) + \frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{n=0} = 0 \qquad (2)$$

и условиях на бесконечности:

$$U = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow \infty. \qquad (3)$$
$$\frac{\partial U}{\partial r} - ikU = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

Все величины, входящие в уравнение и граничные условия, предполагаются безразмерными и имеют следующий физический смысл: U – искомая функция – потенциал скорости частиц жидкости (волновое поле), (x, y) – декартовы координаты точки наблюдения, (x_0, y_0) – координаты источника, q – безразмерная частота – большой параметр задачи: $q \gg 1$, s и n – длины дуги оболочки и нормали к ней, $a = a(s)$ – радиус кривизны оболочки, $0 < a_{\min} \le a(s) \le a_{\max} < \infty$, $\gamma = \gamma(s)$ – отношение скоростей распространения волны в жидкости и по оболочке, $\gamma(s) < 1$, $\eta = \eta(s)$ – отношение плотностей жидкости и оболочки.

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде следующего асимптотического ряда, указанного в работе [1]:

$$U \approx e^{iq\tau_C}\frac{1}{\sqrt{-iq}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{(-iq)^k} + e^{iq\tau_A}\frac{1}{\sqrt{-iq}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k}{(-iq)^k} +$$
$$+ e^{iq\tau_B}Q(\sqrt{iq}(\tau_A - \tau_B)^{1/2})\frac{1}{(-iq)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{(-iq)^k}, \qquad (4)$$
$$\sqrt{\pm i} = e^{\pm i\pi/4},$$

где

$$C_k = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\tau_C}}\frac{\Gamma(1/2 + k)}{k!\Gamma(1/2 - k)(2\pi\tau_C)^k}$$

– коэффициенты асимптотического разложения падающей волны $U_0 = (i/4)H_0^{(1)}(q\tau_C)$ ($H_0^{(1)}(q\tau_C)$ –

функция Ханкеля первого рода, τ_C – расстояние от источника до точки наблюдения, Г – гамма-функция), $Q(\sqrt{iq}(\tau_A - \tau_B)^{1/2})$ – специальная функция:

$$Q(y) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{t^2}dt\right].$$

Подлежащие определению функции τ_A, τ_B, A_k, B_k и аргумент функции Q, т.е. $(\tau_A - \tau_B)^{1/2}$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми. Этим требованием и определяется выбор ветви корня.

В представлении (4) первое слагаемое соответствует прямой волне, второе и третье описывают волновое поле, рассеянное оболочкой и представляющее суперпозицию отраженной и головной волны. Последняя возникает благодаря наличию в граничном условии (2) касательных производных, описывающих распространение колебаний по оболочке.

Подставим анзатц (4) в уравнение (1) и граничное условие (2). Результаты подстановки в уравнение и граничное условие запишем в виде одного равенства, которое при индексе $t = 1$ дает результат подстановки в уравнение (1), а при индексе $t = 2$ – результат подстановки в граничное условие (2):

$$\delta_t e^{iq\tau_C}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L_k^{(t)}(C)}{(-iq)^{k+1/2-p_t}} + e^{iq\tau_A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L_k^{(t)}(A) + N_{k-g_t}^{(t)}(B)}{(-iq)^{k+1/2-p_t}} + \tag{5}$$
$$+ e^{iq\tau_B}Q(\sqrt{iq}(\tau_A - \tau_B)^{1/2})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L_k^{(t)}(B)}{(-iq)^{k+3-p_t}} = 0,$$

где

$$\delta_1 = 0, \quad p_1 = 2, \quad g_1 = 4,$$

так как функция Ханкеля удовлетворяет неоднородному уравнению (1) и

$$\delta_2 = 1, \quad p_2 = 3, \quad g_2 = 3.$$

Дифференциальные операторы $L_k^{(t)}(X)$, $t = 1, 2$ в равенстве (5) определяются следующим образом:

$$L_k^{(1)}(X) = ((\nabla\tau_X)^2 - 1)X_k - 2(\nabla X_{k-1}\nabla\tau_X) -$$
$$- X_{k-1}\Delta\tau_X + \Delta X_{k-2},$$
$$X = A, B, \quad X_{-1} = X_{-2} = 0,$$

$$N_k^{(1)}(B) = \frac{i}{\sqrt{\pi}}[2(\nabla B_k\nabla\sqrt{\tau_B - \tau_A}) + B_k\Delta\sqrt{\tau_B - \tau_A}],$$
$$N_{-1}^{(1)} = \ldots = N_{-4}^{(1)} = 0,$$

$$L_k^{(2)}(X) = \left\{a^2\left[\left(\frac{\partial\tau_X}{\partial s}\right)^2 - \gamma^2\right]\left[\frac{\partial\tau_X}{\partial n}X_k + \right.\right. \tag{6}$$
$$\left. + \left(\eta - \frac{\partial}{\partial n}\right)X_{k-1}\right] - \left[a\left(\frac{\partial^2\tau_X}{\partial s^2} + 2\frac{\partial\tau_X}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\right)a\frac{\partial\tau_X}{\partial n}\right]X_{k-1} -$$
$$- \left[\left(1 - a\frac{\partial^2}{\partial s^2}a\right)\frac{\partial\tau_X}{\partial n} + a\left(\frac{\partial^2\tau_X}{\partial s^2} + 2\frac{\partial\tau_X}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\right)a\left(\eta - \frac{\partial}{\partial n}\right)\right]\times$$
$$\left.\left.\times X_{k-2} + \left[\frac{\partial}{\partial n} + a\frac{\partial^2}{\partial s^2}a\left(\eta - \frac{\partial}{\partial n}\right)\right]X_{k-3}\right\}\right|_{n=0},$$
$$X = A, B.$$

Для простоты приведем выражение только для оператора $N_0^{(2)}$, который необходим при построении старшего приближения:

$$N_0^{(2)}(B) = \frac{i}{\sqrt{\pi}}a^2\left\{\left[\left(\frac{\partial\tau_A}{\partial s}\right)^2 - \gamma^2\right]\frac{\partial\sqrt{\tau_B - \tau_A}}{\partial n} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\tau_B}{\partial n}\frac{\partial\sqrt{\tau_B - \tau_A}}{\partial s}\frac{\partial(\tau_B + \tau_A)}{\partial s}\right\}B_0\Bigg|_{n=0}.$$

Приравняем нулю в уравнении (5) ($t = 1$) на первом этапе ряды, стоящие при различных экспонентах, а на втором этапе – коэффициенты при различных степенях $(-iq)$ в этих рядах:

$$L_k^{(1)}(A) + N_{k-4}^{(1)}(B) = 0, \tag{7}$$

$$L_k^{(1)}(B) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Для того, чтобы выполнялось граничное условие (5) ($t = 2$) необходимо и достаточно потребовать выполнение равенств

$$\tau_A|_{n=0} = \tau_C|_{n=0}, \tag{9}$$

$$L_k^{(2)}(C) + L_k^{(2)}(A) + N_{k-3}^{(2)}(B) = 0,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, N_{-k}^{(2)} = 0, \tag{10}$$

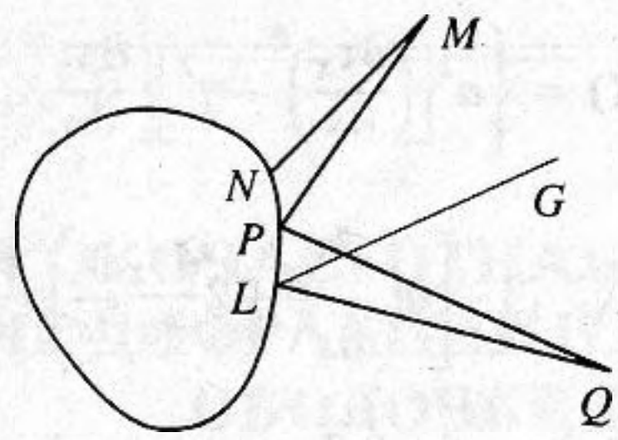
$$L_k^{(1)}(B) = 0. \tag{11}$$

Полагая в уравнениях (7) и (8) $k = 0$, получим уравнения эйконала для фазовых функций τ_A и τ_B:

$$(\nabla\tau_X)^2 = 1, \quad X = A, B. \tag{12}$$

Граничное условие (11) при $k = 0$ приводит к равенству:

$$\left.\frac{\partial\tau_B}{\partial s}\right|_{n=0} = \pm\gamma, \tag{13}$$



В точке Q расположен источник, M – точка наблюдения, PM и NM – отраженный луч и луч головной волны, приходящие в точку M, LG – критический луч.

Решение уравнения эйконала $(\nabla\tau_B)^2 = 1$ при граничном условии (13) может быть записано в виде функционала Ферма

$$\int_l \frac{dl}{c(x, y)},$$

вычисляемого вдоль экстремали l, соединяющей точку источника Q (см. рисунок) с точкой наблюдения M и имеющей общую часть LN с оболочкой. Поскольку в окружающей среде скорость распространения волны $c(x, y)$ в безразмерных переменных равна единице, а на оболочке в силу граничного условия (13) $c(x, y) = \gamma^{-1}$, интеграл Ферма легко вычисляется, и для эйконала τ_B получаем формулу

$$\tau_B(M) = \tau_B(L) + \int_L^N \gamma(s)ds + |NM|. \qquad (14)$$

В формуле (14) точка L – точка падения, т.е. точка пересечения падающего луча QL и оболочки, точка N – точка отрыва луча NM, приходящего в точку наблюдения M, $|NM|$ – длина луча срыва NM и $\tau_B(L)$ – значение эйконала τ_B в точке L. Положения точек L и N на оболочке определяются равенствами:

$$\sin\theta_0 = \gamma(L), \quad \sin\theta_1 = \gamma(N), \qquad (15)$$

в которых θ_0 – угол падения на оболочку луча QL и θ_1 – угол отрыва луча NM. Для точечного источника, расположенного в точке Q из физических соображений следует положить

$$\tau_B(L) = |QL|. \qquad (16)$$

Однако, как будет показано ниже, выполнение равенства (16) необходимо и достаточно для ограниченности коэффициентов B_k в разложении (4), и поэтому для установления равенства (16) нет нужды привлекать физические соображения. В дальнейшем мы предполагаем, что точки L и N равенствами (15) определяются единственным образом, при этом точке L соответствует длина дуги оболочки s_0, а точке N – длина дуги оболочки s_1:

$$s_0 = s(L), \quad s_1 = s(N).$$

Если уравнения (15) имеют несколько решений, то в анзатц (4) следует ввести соответствующее число дополнительных слагаемых, аналогичных его третьему слагаемому.

Переходим к определению коэффициентов B_k в третьем слагаемом разложения (4), которое описывает головную волну. Из уравнений (8) с учетом уравнения эйконала (12) получаем рекуррентную систему уравнений переноса для коэффициентов B_k:

$$\begin{gathered} 2(\nabla B_k, \nabla\tau_B) + B_k\Delta\tau_B = \Delta B_{k-1}, \\ k = 0, 1, 2, \ldots, B_{-1} = 0. \end{gathered} \qquad (17)$$

Введем лучевые координаты (см. [2]). В качестве лучевых координат примем значение эйконала τ_B в точке наблюдения M и значение длины дуги оболочки s_1 в точке отрыва N. В лучевых координатах решение уравнений переноса (17) записывается в виде:

$$\begin{gathered} B_0 = \frac{1}{\sqrt{J_B}}\varphi_0(s_1), \\ B_k = \frac{1}{\sqrt{J_B}}\left(\varphi_k(s_1) + \int_{\tau_B(N)}^{\tau_B(M)} \frac{1}{2}\sqrt{J_B}\Delta B_{k-1}d\tau_B\right), \quad k \geq 1. \end{gathered} \qquad (18)$$

Здесь J_B – геометрическая расходимость головной волны:

$$J_B = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_1}\right| = \frac{1}{a(s_1)}\left(l_1^* + a(s_1)\left(\cos\theta_1 + l_1^*\frac{\gamma'(s_1)}{\cos\theta_1}\right)\right),$$

где $l_1^* = |NM|$, θ_1 – угол срыва луча в точке N, $\cos\theta_1 = (1 - \gamma^2)^{1/2}$.

Для определения функций $\varphi_k(s_1)$ обратимся к граничным условиям (11). Операторы $L_k^{(2)}$ определяются по формуле (6). С учетом равенства (13) при $k = 1$ получаем граничное условие на коэффициент B_0:

$$\left[2\frac{\partial\tau_B}{\partial s}a\frac{\partial}{\partial s}a + \frac{\partial^2\tau_B}{\partial s^2}a^2\right]\frac{\partial\tau_B}{\partial n}B_0\Bigg|_{n=0} = 0,$$

откуда

$$B_0\big|_{n=0} = \frac{b_0}{a\gamma^{1/2}(1-\gamma^2)^{1/2}}, \quad b = \text{const}. \qquad (19)$$

и, следовательно,

$$\varphi_0(s_1) = \sqrt{J_B}\Big|_{n=0}\frac{b_0}{a\gamma^{1/2}(1-\gamma^2)^{1/2}\Big|_{s=s_1}}.$$

Постоянная b_0 будет определена позднее.

При $k = 1, 2, 3, \ldots$ получаем уравнения для $B_k|_{n=0}$ с ненулевой правой частью. Их решения имеют вид:

$$B_k\big|_{n=0} = \frac{b_k}{a\gamma^{1/2}(1-\gamma^2)^{1/2}} + f_k(s), \quad b_k = \text{const}.$$

Функции $f_k(s)$ выражаются через радиус кривизны, его производные по s и постоянные $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$.

Теперь перейдем к определению неизвестных функций, стоящих во втором слагаемом анзатца (4). Из уравнения (12) и граничного условия (9) однозначно определяется функция τ_A. Это – эйконал отраженной волны, распространяющейся по лучу PM (см. рисунок), возникшему в результате отражения падающего луча QP по законам геометрической акустики:

$$\tau_A = |QP| + |PM|,$$

где $|QP|$ и $|PM|$ – длины падающего и отраженного лучей.

Уравнения переноса для коэффициентов A_k получаются из уравнений (7) с учетом уравнения эйконала (12) и выглядят следующим образом:

$$2(\nabla A_k, \nabla\tau_A) + A_k\Delta\tau_A = \Delta A_{k-1} + \\ + \frac{i}{\sqrt{\pi}}[2(\nabla B_{k-3}\nabla\sqrt{\tau_B-\tau_A}) + B_{k-3}\Delta\sqrt{\tau_B-\tau_A}]. \quad (20)$$

В качестве лучевых координат примем значение эйконала τ_A в точке наблюдения M и значение длины дуги оболочки s_p в точке отражения P (см. рисунок). Уравнения (20) имеют следующие решения в лучевых координатах:

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{J_A}}\psi_0(s_p),$$

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{J_A}}\left(\psi_k(s_p) + \int\limits_{\tau_A(P)}^{\tau_A(M)}\frac{1}{2}\sqrt{J_A}\Delta A_{k-1}d\tau_A\right), \; k = 1, 2, \quad (21)$$

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{J_A}}\left(\psi_k(s_p) + \int\limits_{\tau_A(P)}^{\tau_A(M)}\frac{1}{2}\sqrt{J_A}\Delta A_{k-1} + \right.$$

$$\left. + (\nabla B_{k-3}\nabla\sqrt{\tau_B-\tau_A}) + \frac{1}{2}B_{k-3}\Delta\sqrt{\tau_B-\tau_A}d\tau_A\right), \; k \geq 3.$$

Здесь J_A – геометрическая расходимость отраженной волны:

$$J_A = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s_p}\right| = \frac{\cos\theta}{l_0}\left(l_0 + l_1 + \frac{2l_0l_1}{a(s_p)\cos\theta}\right), \quad (22)$$

где θ – угол, под котором отражается луч, приходящий в точку наблюдения M, $l_0 = |QP|$, $l_1 = |PM|$ (см. рисунок). Функции $\psi_k(s_p)$ определим из граничных условий (10). При $k = 0$ имеем уравнение на $A_0|_{n=0}$:

$$a^2\left[\left(\frac{\partial\tau_C}{\partial s}\right)^2 - \gamma^2\right]\frac{\partial\tau_C}{\partial n}(C_0 - A_0)\Big|_{n=0} = 0. \quad (23)$$

В точке L, т.е. при $s = s_0$ выполняется равенство (15) и уравнение (23) удовлетворяется при любом значении A_0. При других значениях s получаем граничное условие на A_0:

$$A_0\big|_{n=0} = C_0\big|_{n=0}, \quad (24)$$

которое, в силу предполагаемой непрерывности решения, должно выполняться и в точке $s = s_0$.

Используя формулы (21), (22) и (24) и учитывая, что

$$C_0 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\tau_C}},$$

выпишем старший член асимптотического ряда (4), соответствующий отраженной волне:

$$U_{\text{отр}}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{l_0 + l_1 + \dfrac{2l_0l_1}{a(s_p)\cos\theta}}}\frac{e^{iq(l_0+l_1)}}{\sqrt{-iq}}.$$

При $k = 1$ получим уравнение для $A_1|_{n=0}$:

$$a^2\left[\left(\frac{\partial\tau_C}{\partial s}\right)^2 - \gamma^2\right]\frac{\partial\tau_C}{\partial n}(C_1 - A_1)\Big|_{n=0} =$$

$$= -a^2\left[\left(\frac{\partial\tau_C}{\partial s}\right)^2 - \gamma^2\right]\left(\eta - \frac{\partial}{\partial n}\right)(C_0 + A_0)\Big|_{n=0},$$

откуда:

$$A_1\big|_{n=0} = \left[C_1 + \left(\frac{\partial\tau_C}{\partial n}\right)^{-1}\left(\eta - \frac{\partial}{\partial n}\right)(C_0 + A_0)\right]\Big|_{n=0}.$$

Аналогично для $A_2|_{n=0}$ имеем:

$$A_2\big|_{n=0} = \left[C_2 + \left(\frac{\partial\tau_C}{\partial n}\right)^{-1}\left(\eta - \frac{\partial}{\partial n}\right)(C_1 + A_1)\right]\Big|_{n=0}.$$

При $k = 3$ в граничном условии (10) не все слагаемые содержат множитель $[(\partial\tau_C/\partial s)^2 - \gamma^2]$:

$$a^2\left[\left(\frac{\partial\tau_C}{\partial s}\right)^2 - \gamma^2\right]\frac{\partial\tau_C}{\partial n}(C_3 - A_3)\Big|_{n=0} =$$

$$= \left\{-a^2\left[\left(\frac{\partial\tau_C}{\partial s}\right)^2 - \gamma^2\right]\left[\left(\eta - \frac{\partial}{\partial n}\right)(C_2 + A_2) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{i}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial\sqrt{\tau_B - \tau_A}}{\partial n}B_0\right] - \eta(C_0 + A_0) - \tag{25}$$

$$\left. - \frac{i}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial\tau_B}{\partial n}\frac{\partial\sqrt{\tau_B - \tau_A}}{\partial s}\frac{\partial(\tau_B + \tau_A)}{\partial s}a^2 B_0\right\}\Bigg|_{n=0}.$$

Положим в уравнении (25) $s = s_0$. Тогда квадратные скобки обратятся в ноль, и мы получим равенство:

$$\left\{\eta(C_0 + A_0) + \frac{i}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial\tau_B}{\partial n}\frac{\partial\sqrt{\tau_B - \tau_A}}{\partial s}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial(\tau_B + \tau_A)}{\partial s}a^2 B_0\right\}\Bigg|_{\substack{n=0\\ s=s_0}} = 0, \tag{26}$$

которое является условием разрешимости для уравнения (25). В этом условии стоит производная от функции $(\tau_B - \tau_A)^{1/2}$ в точке $s = s_0$. В этой точке $\partial\tau_B/\partial s = \partial\tau_A/\partial s = \gamma$ и если $\tau_B(s_0) \neq \tau_A(s_0)$, то при вычислении этой производной мы получим ноль и не сможем удовлетворить условию (26). Если же положить $\tau_B(s_0) = \tau_A(s_0)$, что и было сделано выше, то при вычислении производной появится неопределенность, которая легко раскрывается, и мы получаем

$$\frac{\partial\sqrt{\tau_B - \tau_A}}{\partial s}\Bigg|_{\substack{n=0\\ s=s_0}} =$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sqrt{2l_0^* a}}\sqrt{l_0 + a\left(\cos\theta - l_0^*\frac{\gamma'(s_0)}{\cos\theta}\right)} \neq 0.$$

Таким образом при $\tau_B(L) = \tau_A(L)$ условие (26) может быть удовлетворено за счет выбора произвольной постоянной b_0, входящей в выражение (19) для B_0. Подставим выражение (19) в равенство (26) и разрешим его относительно постоянной b_0. Если при этом выразить все входящие в формулы (19) и (26) величины через геометрические характеристики задачи, то получим следующее значение постоянной b_0:

$$b_0 = \frac{\eta}{2\sqrt{a\sin\theta_0\cos\theta_0}\sqrt{l_0^* + a\left(\cos\theta - l_0^*\dfrac{\gamma'(s_0)}{\cos\theta}\right)}}\Bigg|_{s=s_0}, \tag{27}$$

где θ_0 – угол падения в точке L, $\sin\theta_0 = \gamma(L)$, $l_0^* = |QL|$.

Аналогичные условия разрешимости будут возникать для уравнений, определяющих $A_4|_{n=0}$, $A_5|_{n=0}$, ... Им можно удовлетворить за счет выбора произвольных постоянных b_1, b_2, ... Таким образом, из граничных условий (10) однозначно определяются функции ψ_k, входящие в выражения (21) для коэффициентов A_k, а также неизвестные ранее постоянные b_k и, следовательно, функции φ_k, входящие в выражения (18) для B_k.

Итак, указан путь построения решения задачи (1)–(3) в виде асимптотического ряда (4).

Выпишем старший член асимптотического ряда для головной волны:

$$U_{\text{гол}}^{(0)} = e^{iq\tau_B}Q(\sqrt{iq}(\tau_A - \tau_B)^{1/2})\frac{1}{(-iq)^3}\times$$

$$\times\frac{b_0}{\sqrt{a\sin\theta_1\cos\theta_1}\sqrt{l_1^* + a\left(\cos\theta_1 + l_1^*\dfrac{\gamma'}{\cos\theta_1}\right)}}. \tag{28}$$

Здесь значение радиуса кривизны оболочки a и производной γ' берутся в точке N отрыва луча, θ_1 – угол срыва луча в точке N ($\sin\theta_1 = \gamma(N)$). Постоянная b_0 определена формулой (27) и зависит от физических свойств оболочки в точке L зарождения головной волны.

Как отмечалось, головная волна возникает за счет распространения поверхностной волны по оболочке. Эта волна зарождается в точке L (см. рисунок), в которой касательная составляющая фазовой скорости падающей волны равна $\gamma(L)$. Луч LG, отразившийся в этой точке, назовем критическим. На этом луче $\tau_B = \tau_A$, и функция Q принимает значение, равное 1/2. Вне окрестности критического луча $|\tau_A - \tau_B| \geq \Delta > 0$ функция Q имеет следующие асимптотические разложения:

$$Q(\sqrt{iq}(\tau_A - \tau_B)^{1/2}) =$$

$$= \begin{cases} -\tilde{Q}(\sqrt{iq}(\tau_A - \tau_B)^{1/2}), & \arg(\tau_A - \tau_B)^{1/2} = \pi, \\ 1 + \tilde{Q}(\sqrt{iq}(\tau_A - \tau_B)^{1/2}), & \arg(\tau_A - \tau_B)^{1/2} = 0, \end{cases} \tag{29}$$

где

$$\tilde{Q}(\sqrt{iq}(\tau_A-\tau_B)^{1/2}) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{iq(\tau_A-\tau_B)}}{\sqrt{iq}(\tau_A-\tau_B)^{1/2}}\times$$
$$\times\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k}\frac{1}{[iq(\tau_A-\tau_B)]^k}\right\}. \quad (30)$$

Подставляя в третье слагаемое анзатца (4) вместо функции $Q(\sqrt{iq}(\tau_A-\tau_B)^{1/2})$ асимптотическое разложение (29), получим ряд по дробным степеням $(-iq)^{-1/2-k}$, умноженный на экспоненту $\exp(iq\tau_A)$, соответствующую отраженной волне:

$$\frac{e^{i(q\tau_A+\pi\vartheta(s_p-s_1))}}{(-iq)^{1/2+3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{B}_k}{(-iq)^k},$$

$$\tilde{B}_0 = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi(\tau_A-\tau_B)}}B_0,$$

где

$$\vartheta(x) = \begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

– функция Хэвисайда и коэффициенты $\tilde{B}_k$ получаются в результате перемножения ряда (30) и третьего ряда в анзатце (4). Таким образом, вне окрестности критического луча LG отраженная волна имеет следующее асимптотическое разложение:

$$U_{\text{отр}} = e^{iq\tau_A}\frac{1}{\sqrt{-iq}}\sum_{k=0}^{\infty}(A_k+e^{(-i\pi/2)\vartheta(s_p-s_1)}\tilde{B}_{k-3})\frac{1}{(-iq)^k},$$

при этом до окрестности критического луча головная волна отсутствует, по другую же сторону окрестности критического луча за счет единицы во второй строке формулы (29) головная волна присутствует и описывается асимптотическим разложением:

$$U_{\text{гол}} \simeq e^{iq\tau_B}\frac{1}{(-iq)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{(-iq)^k}.$$

Формирование головной волны (или ее отщепление от отраженной волны) происходит в окрестности критического луча, имеющей порядок $\tau_A-\tau_B \le \text{const}/q^{1-\varepsilon}$, ибо за пределами этой окрестности разложение (30) уже представляет собой разложение по степеням малой величины $q^{-\varepsilon}$ и выделяется слагаемое, имеющее фазу $iq\tau_B$ головной волны. В окрестности критического луча $\tau_A-\tau_B \le \text{const}/q^{1-\varepsilon}$, $(\varepsilon>0)$ рассеянное волновое поле в первых трех порядках совпадает с отраженной волной, а зарождение головной волны описывается выражением:

$$Q(\sqrt{iq}(\tau_A-\tau_B)^{1/2})U_{\text{гол}}.$$

Формула (28) для $U_{\text{гол}}^{(0)}$ позволяет проследить зависимость головной волны от геометрических и физических характеристик задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булдырев В.С., Гельфрейх Н.Г.* Высокочастотная асимптотика волнового поля, рассеянного тонкой упругой круговой оболочкой // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 5. С. 604–608.
2. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972. 456 с.

A High-Frequency Asymptotic Expansion of a Wave Field Diffracted at a Thin Elastic Arbitrary Cylindrical Shell

V. S. Buldyrev and N. G. Gel'freikh

A plane problem of diffraction of an acoustic cylindrical wave at a convex shell of arbitrary form is considered. The interaction of the shell with the acoustic field in the medium is modeled by a boundary condition containing the second derivative along the tangent to the shell in addition to the function and its normal derivative. The wave field scattered in the sonified region is represented by uniform asymptotic expansions in inverse powers of frequency, which provide insight into the formation of a head wave that is induced near a critical ray in the medium by oscillations propagating in the shell. Far from the critical ray, these formulas describe the reflected wave and the head wave propagating on their own. A physical analysis of the main terms of these asymptotic expansions is presented.