АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 2, с. 162–169

УДК 534.2:577.3:519.24

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОБРАТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОАКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ

© 1997 г. **В. А. Буров, Е. Е. Касаткина**

Московский государственный университете им. М.В. Ломоносова, физический факультет

119899 Москва, Воробьевы горы

Поступила в редакцию 18.12.95 г.

В волновом приближении решена задача оптимальной оценки распределения внутренней температуры нагретой поглощающей среды по результатам наблюдения шумового излучения. Предложена блок-схема термотомографа и рассмотрены возможные упрощенные варианты реализации корреляционного метода, отличающегося большой вычислительной сложностью. Оценена потенциальная чувствительность алгоритма. Показано, что возможно обнаружение областей с размером ~1 мм^2 с температурным контрастом ~0.1°K.

Пассивная акустическая теплолокация твердых и жидких сред позволяет проводить исследования, для выполнения которых средства радиолокации, инфракрасной техники, активной акустоскопии и томографии зачастую являются непригодными или недостаточными [1]. Тепловое хаотическое движение является физической причиной радиочастотного и акустического излучения. Выражения для квадрата напряженности электрической составляющей электромагнитной волны E^2 и квадрата акустического давления p^2 в этом случае аналогичны известной формуле Найквиста:

$$E^2 = 4\pi f^2 c^{-3} kT\Delta f; \quad (1)$$

$$p^2 = 4\pi f^2 u^{-1} \rho kT\Delta f; \quad (2)$$

где u и c – скорости звука и электромагнитной волны соответственно, f – частота, ρ – плотность, k – постоянная Больцмана, T – температура. Пропорциональность интенсивности теплового излучения абсолютной температуре является основой для оценки внутренней температуры объекта. Радиотермография в ряде случаев из-за высокого поглощения и вызванной этим необходимости снижения используемой частоты и разрешающей способности недостаточно информативна и может уступать методам, основанным на регистрации теплового акустического излучения. Примерами такой ситуации могут служить тепловая акустическая интроскопия металлических конструкций, горных пород [1] и развивающаяся в настоящее время акустотермография биологических объектов [2].

Пространственно-временное распределение температуры биологического объекта несет важную информацию о его функциональном состоянии. Поэтому измерение распределения внутренней температуры пассивными методами, основанными на регистрации собственных излучений организма, может сыграть значительную роль в решении ряда биомедицинских задач [3, 4]. Ткани биологических объектов достаточно прозрачны для акустических волн с частотами 1–5 МГц. Длины волн в этом диапазоне $\lambda \leq 1$ мм позволяют получить высокое пространственное разрешение (повышение разрешающей способности имеет смысл, поскольку спадание температуры при удалении от нагретого объема происходит по закону $\sim\frac{1}{r}$, т.е. участок с повышенной температурой в достаточной степени локализован вблизи источника, например, злокачественного новообразования). Область возможных применений метода акустотермографии определяется чувствительностью акустотермометров (АТ). Необходимо определить достаточно малый контраст температур (~0.1°K) – и это одна из основных трудностей при рассмотрении задач акустотермографии биологических объектов. Минимальная обнаруживаемая разность температур ΔT обусловлена коэффициентом концентрации антенной решетки, шириной полосы принимаемых частот Δf и временем усреднения τ. Пороговая чувствительность θ определяется средним квадратичным значением флуктуаций оценки измеряемой температуры, возникающих из-за имеющихся в приемной системе помех различного происхождения и конечности времени усреднения. Одной из особенностей такого рода систем является то, что, в отличие от обычного пассивного обнаружения – пеленгования, повышение разрешающей способности ведет к снижению отношения сигнал/шум. Это происходит потому, что весь исследуемый объем представляет собой источник такого же сигнала, как и искомый локально нагретый

объем, являясь, тем самым, источником помех. В результате входное отношение сигнал/шум $(S/N)_{вх} \sim v/V$, где v – объем нагретого элемента, V – общий объем исследуемого объекта.

В последнее время активно разрабатывалось направление, рассматривающее возможность решения задач акустотермографии биологических объектов в лучевом приближении. Так, в [5, 6] оценивалась зависимость интенсивности излучения от координаты датчика при его перемещении по поверхности тела. Таким образом определялись границы нагретого участка. Величина нагрева участка ΔT и его глубина определялись посредством многочастотного пассивного зондирования в среде с частотнозависимым затуханием. Расчетная величина чувствительности θ с учетом реальных параметров типичных АТ составила $\geq 0.1°K$ ($\tau = 30$ с) [6]. Для повышения чувствительности в [2] предлагалось использовать матричный приемник с квадратичным суммированием сигналов с выходов элементов, образующих матрицу акустических датчиков. В [7] для измерения пространственного распределения температуры предлагалось использовать многоракурсный прием несколькими приемными антеннами, расположенными под углами друг к другу, которые производят сложное сканирование объекта. В [8] решается пространственная обратная задача акустотермографии с учетом неоднородности среды и приводятся результаты численного эксперимента по восстановлению двумерного распределения внутренней температуры биологической ткани. В используемой модели полагалось, что в прямоугольнике 2×3 см $\Delta T = 5°K$, в остальной части исследуемой области (квадрат со стороной 5 см) $\Delta T = 0$. Температура нагретого участка восстанавливалась с точностью до 0.7°K на передней границе участка, с ростом глубины точность снижалась до 1.5°K. Этот результат показывает, что задача точного восстановления достаточно сложна.

Возможен, однако, другой подход к решению обратной задачи акустотермографии. Он включает в себя использование решетки линейных приемников и применение алгоритма некогерентной волновой томографии. Волновая обратная задача излучения, т.е. восстановление распределения интенсивности δ-коррелированных источников с автокорреляционной функцией

$$\Gamma_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = I(\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{1}$$

решена в [9]. В (1) $I(\mathbf{r}_1)$ – непрерывная неотрицательная функция, называемая "профилем интенсивности" источника; $\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ – 3-х мерная дираковская δ-функция.

Такая модель вполне приемлема для решения задач акстотермографии биологических сред. В случае же структурированных сред, когда ячейки такой среды или случайно колеблющиеся конструктивные элементы механической системы имеют свой набор собственных функций и соответствующих им собственных значений и колеблются связно, возможно более общее представление.

Пусть функция когерентности случайных источников $f(\mathbf{r})$ имеет вид:

$$\Gamma_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = A(\mathbf{r}_1)\Gamma^0_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)A^T(\mathbf{r}_2); \tag{2}$$

здесь $A(\mathbf{r}) = I^{1/2}(\mathbf{r})$, а Γ^0_{ff} – известная нормированная функция пространственной когерентности; индекс T обозначает операцию транспонирования. Порождаемое такими источниками поле имеет функцию когерентности

$$\Gamma_{UU}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \hat{Q}(\mathbf{y}_1, \mathbf{r}_1)\Gamma_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\hat{Q}^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{y}_2), \tag{3}$$

где $\hat{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{r})$ – оператор распространения,

$$\hat{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{r})f(\mathbf{r}) = \int_R G_0(\mathbf{y} - \mathbf{r})f(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in R, \quad \mathbf{y} \in Y,$$

$G_0(\mathbf{y}, \mathbf{r})$ – функция Грина; R – область локализации источников; Y – область приема.

Если $\Gamma^0_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ линейно зависит лишь от разности аргументов $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ (пространственная квазиоднородность)

$$\Gamma^0_{ff} \equiv \rho(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \tag{4}$$

то

$$\Gamma_{UU}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \iint_R G_0(\mathbf{y}_1 - \mathbf{r}_1)A(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \times A^T(\mathbf{r}_2)G_0^+(\mathbf{r}_2 - \mathbf{y}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2; \tag{5}$$

при $\rho(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$

$$\Gamma_{UU}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \int_R G_0(\mathbf{y}_1 - \mathbf{r}_1)A(\mathbf{r}_1)A^T(\mathbf{r}_1) \times \times G_0^+(\mathbf{r}_1 - \mathbf{y}_2)d\mathbf{r}_1, \tag{6}$$

т.е.

$$\Gamma_{UU}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \hat{Q}(\mathbf{y}_1, \mathbf{r}_1)\hat{Q}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{y}_2)I_A(\mathbf{r}_1). \tag{7}$$

Регуляризованный вариант оценки, полученной в [9] для распределения мощности некоррелированных источников, имеет вид

$$I_A(\mathbf{r}_1) = (\beta\hat{E} + \hat{G}^+\hat{G})^{-1}\hat{G}^+\Gamma_{UU}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \qquad (8)$$

где $\beta > 0$ – параметр регуляризации; через $\hat{G}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{r}_1)$ обозначен оператор $\hat{Q}(\mathbf{y}_1, \mathbf{r}_1)\hat{Q}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{y}_2)$, $\hat{E}$ – единичный оператор.

В случае, когда источники теплового (или шумового излучения других типов) представляют собой причинно (например, упруго) связанные системы, они могут быть пространственно коррелированы и связь между функцией когерентности поля $\Gamma_{UU}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ и амплитудой $A(\mathbf{r})$ более сложная. Наличие в трехмерной задаче размерностной избыточности информации позволяет усложнить модель источника. Например, можно положить, что источники описываются функцией когерентности вида $\Gamma_{ff}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, где первый аргумент характеризует медленное изменение вида быстрой зависимости от разностного аргумента, причем характер этой зависимости принадлежит некоторому функциональному пространству. Если в этом пространстве можно ввести базис $\Gamma_i(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ (например, собственные колебания упругой подсистемы или гармонический базис в "кубике" с размерами, определяемыми максимальным радиусом корреляции), то функция когерентности $\Gamma_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ может быть представлена в виде

$$\Gamma_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_i A_i(\mathbf{r}_1)\Gamma_i(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)A_i^T(\mathbf{r}_2). \qquad (9)$$

Для представления в терминах $\Gamma_i(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ функции когерентности поля $\Gamma_{UU}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ удобно перейти к переменным $\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$. Тогда, обозначая через $\hat{G}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{r}_-, \mathbf{r}_+)$ ядро интегрального оператора вида $\hat{G}_0(\mathbf{y}_1, \mathbf{r}_1)\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{y}_2)$ и через $I_i(\mathbf{r}_+)$ произведение $A_i(\mathbf{r}_1)A_i^T(\mathbf{r}_2)$, получим выражение

$$\Gamma_{UU}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \iint_R G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{r}_-, \mathbf{r}_+) \times \qquad (10)$$
$$\times \sum_i I_i(\mathbf{r}_+)\Gamma_i(\mathbf{r}_-)d\mathbf{r}_+ d\mathbf{r}_-,$$

которое после интегрирования по области R преобразуется к виду

$$\Gamma_{UU}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \int_R \sum_i \Theta_i(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{r}_+)I_i(\mathbf{r}_+)d\mathbf{r}_+, \qquad (10a)$$

где

$$\int_R G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{r}_-, \mathbf{r}_+)\Gamma_i(\mathbf{r}_-)d\mathbf{r}_- = \Theta_i(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{r}_+).$$

Если прием излученного поля осуществляется в дискретном множестве точек $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \{y^k\}$, а базис $\{\Gamma_i\}$ является конечномерным, то

$$\Gamma_{UU}(y^k, y^l) = \sum_{i,n} \Theta_{k,l(i,n)} I_i(\mathbf{r}_n), \qquad (11)$$

где n – индекс, характеризующий дискретизацию поля внутри области излучения. Тогда для распределения мощности источников $I_i(\mathbf{r}_n)$ может быть получена следующая оценка:

$$I_i(\mathbf{r}_n) = (\beta E_{in(jp)} + \Theta^+_{(j,p)m,t}\Theta_{m,t(i,n)})^{-1} \times$$
$$\times \Theta^+_{(j,p)k,l}\Gamma_{UU}(y^k, y^l), \qquad (12)$$

где для упрощения выражения знаки суммирования по повторяющимся индексам опущены, $E_{in(jp)}$ – единичная матрица.

Таким образом, решение обратной задачи излучения акустотермографии в волновом приближении приводит к алгоритмам, основным элементом которых является взвешенное накопление выборочных корреляционных моментов сигналов с решетки датчиков, окружающих источники, которое осуществляет фазирование и регуляризацию решения.

Единственность полученного решения становится очевидной при переходе в импульсное представление (Приложение I). В ближнем поле, обладающем большей избыточностью информации (участие неоднородных волн), единственность решения тем более обеспечена.

Для случая данных, зашумленных коррелированным фоновым излучением, вводится более общее рассмотрение через функционал правдоподобия (Приложение II).

Чувствительность и разрешающая способность метода пассивной волновой томографии особенно легко оцениваются в приближении некоррелированных помех, когда обработка сигналов сводится к фазированному (при скомпенсированной разности времен распространения) накоплению всех выборочных взаимных корреляционных моментов для всех пар приемных элементов с

равными весами. Выходное отношение сигнал/шум в этом случае будет

$$(S/N) \approx M4\Delta f\tau(S/N)^2_{\text{вх}}, \qquad (13)$$

где $M = K(K-1)/2$ – число корреляционных пар (K – число приемников).

Для проведения оценок положим, что исследуемый объект имеет форму шара диаметра D. Максимальное число приемников, которое можно разместить с полуволновым шагом на его поверхности, равно

$$K_{\max} \cong 4\pi D^2/\lambda^2, \qquad (14)$$

где λ – длина волны на рабочей частоте. Полоса пропускания Δf выбирается обычно из расчета 0.2–0.5f, где f – средняя принимаемая частота. Средняя частота f должна соответствовать затуханию приблизительно в e раз на расстоянии порядка размера объекта, т.е.

$$\alpha(f) \approx 1/D, \qquad (15)$$

здесь $\alpha(f)$ – коэффициент поглощения по амплитуде, зависимость которого от частоты определяется выражением

$$\alpha(f) \cong \alpha_0 f^n, \qquad (16)$$

$n \approx 3/2$ для многих биологических тканей (возможна и "классическая" зависимость $n \approx 2$).

Таким образом, рабочая частота в зависимости от размеров объекта будет

$$f \cong (\alpha_0 D)^{-1/n}, \qquad (17)$$

и, соответственно, средняя длина волны

$$\lambda \cong u(\alpha_0 D)^{1/n}, \qquad (18)$$

где u – скорость звука в среде;

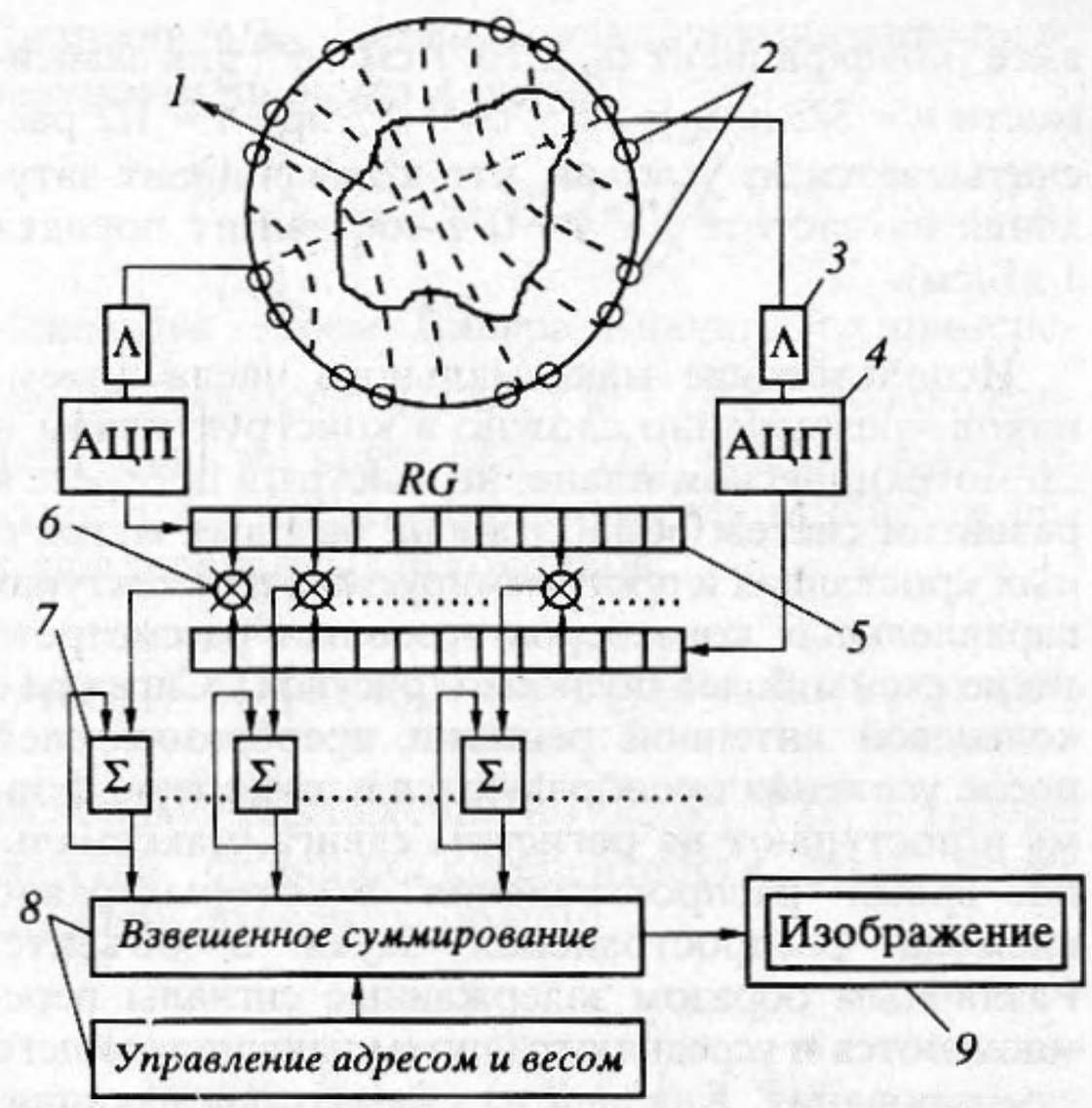
Поскольку характерной особенностью задачи является пропорциональность величины входного отношения сигнал/шум отношению объемов элемента разрешения и всего объекта

$$(S/N)_{\text{вх}} \sim 6r^3/\pi D^3, \qquad (19)$$

где r – характерный размер элемента разрешения, то с учетом (17), (18) и (19) выражение для выходного ОСШ принимает вид

$$(S/N) \cong 72M\tau\gamma\alpha_0^{-1/n}D^{-1/n}\pi^{-2}r^6D^{-6}. \qquad (20)$$

Здесь γ – коэффициент пропорциональности, заключающий в себе информацию о нагреве (температурном контрасте) области, являющейся источником полезного сигнала, относительно всего исследуемого объема: $\gamma \approx 2\Delta T/T_0$.



Структурная схема термотомографа.
1 – исследуемый объект; *2* – кольцевая антенная решетка акустических датчиков; *3* – усилитель; *4* – аналогово-цифровой преобразователь; *5* – регистр сдвига; *6* – перемножитель; *7* – накапливающий сумматор; *8* – взвешенный сумматор с блоком управления; *9* – система формирования термоизображения.

Отсюда в случае $n \approx 3/2$ имеем

$$(S/N) \cong 72M\tau\gamma\alpha_0^{-2/3}D^{-20/3}\pi^{-2}r^6, \qquad (21)$$

а в случае квадратичной зависимости коэффициента поглощения от частоты

$$(S/N) \cong 72M\tau\gamma\alpha_0^{-1/2}D^{-13/2}\pi^{-2}r^6. \qquad (22)$$

Для круговой конфигурации антенной решетки (плоская задача) имеют место аналогичные выражения для выходного отношения сигнал/шум (при $n \approx 3/2$ и $n \approx 2$, соответственно):

$$(S/N) \cong 32M\tau\gamma\alpha_0^{-2/3}D^{-14/3}\pi^{-2}r^4, \qquad (23)$$

$$(S/N) \cong 32M\tau\gamma\alpha_0^{-1/2}D^{-9/2}\pi^{-2}r^4. \qquad (24)$$

Оценки, проведенные по формулам (21), (23) для схем, содержащих максимальное число приемных элементов (в приближении $K \gg 1$ $M \approx K^2/2$), дают достаточно оптимистические значения ОСШ. Так, например, при температурном контрасте $\Delta T \cong 0.1$°K ($T_0 = 300$°K), характерных размерах элемента разрешения $r \cong 1$ мм, исследуемой области $D \cong 200$ мм и времени усреднения $\tau \cong 30$ с величина отношения сигнал/шум на выходе: $(S/N) \cong 6$ в трехмерной задаче и $(S/N) \cong 4$ в двумерном вари-

анте (коэффициент $\alpha_0 \cong 10^{-10}$ см$^{-1}$ с$^{3/2}$ для зависимости $n \approx 3/2$ и $\alpha_0 \cong 10^{-13}$ см$^{-1}$ с$^{1/2}$ при $n \approx 1/2$ рассчитывается из условия, что коэффициент затухания на частоте $f \cong 1$ МГц составляет порядка 1 дБ/см).

Использование максимального числа приемников чрезвычайно сложно в конструктивном и схемотехническом плане, но быстрый прогресс в развитии систем обработки на базовых матричных кристаллах и программируемых архитектурах параллельных конвейеров позволяет рассмотреть такие схемы более подробно (рисунок). Сигналы с кольцевой антенной решетки преобразователей после усиления преобразуются в цифровую форму и поступают на регистры сдвига, максимальное время "распространения" в которых равно времени распространения звука в объекте. Различным образом задержанные сигналы перемножаются и усредняются путем накапливающего суммирования. Каждый из сумматоров накапливает сигналы от множества элементов объекта, лежащих на гиперболе, соответствующей заданной разности времен распространения. Аналогичная обработка проводится для всех пар приемников решетки. Совокупность сигналов со всех пар приемников, разнесенных на одинаковое угловое расстояние, дает значения функции когерентности на семействе гипербол, смещенных на определенный угловой шаг относительно друг друга, образуя массив данных для томографии в "гиперболических лучах". Другой массив данных, соответствующий другому угловому расстоянию между приемниками, дает такой же, достаточный для восстановления изображения, объем информации. Одновременное использование всех таких наборов гипербол служит дополнительному накоплению информации и повышению чувствительности алгоритма. Общий объем вычислений для восстановления изображения форматом $N \times N$ ячеек по данным с K приемников при M взаимных временных сдвигах и усреднении T временны́х дискретов составляет порядка K^2MT операций умножения и сложения для формирования массива коэффициентов когерентности и N^2K^2 операций томографического восстановления. Положим, что $K \approx N \approx M \approx 3 \times 10^2$, а $T \approx 10^7$. Тогда общее число операций на этапе "накопления" составляет 10^{13}–10^{14} умножений, осуществляемых при "прямой" жесткой архитектуре K^2M, (т.е. ~10^6) перемножителями. Операции временной задержки и перемножения резко упрощаются, если использовать в качестве усилителей усилители-ограничители, т.к. регистры становятся однобитовыми, умножение осуществляется операцией "исключающее или", а накопление – счетчиками с адресуемым доступом. Осуществление порядка 10^9–10^{10} операций формирования изображения за десятки секунд представляется более легкой операцией. Использование усилителей-ограничителей незначительно (~20%) снижает чувствительность системы, однако требует привязки средней абсолютной температуры изображения к независимо измеряемой средней температуре объекта (что сравнительно несложно).

Следует также оценить возможность использования для произвольного пространственно-временного сканирования объекта сравнительно небольшого числа приемников, которые могут перемещаться в пространстве и взаимофазироваться с помощью различных временных задержек (общая же архитектура системы остается подобной рассмотренной). Например, при использовании преобразователей с большими поверхностями приема, для которых $d^2/\lambda \geq D$ (d – размер зеркала приемника), выходное значение ОСШ (в плоской задаче) принимает вид

$$(S/N) \cong \pi^2 \tau \gamma d^{-4} \alpha_0^{-1/n} D^{-1/n} r^4. \qquad (25)$$

Таким образом, положив, например, $d \cong 2$ см ($K \cong 30$), получим $(S/N) \cong 0.8$, т.е. для уверенного определения перепада температуры ~0.1°K размер области должен быть больше (~2 мм), либо необходимо увеличение времени усреднения.

Другая схема представляет собой систему больших линейных подрешеток или преобразователей, сигналы с которых перемножаются попарно с различными временными задержками таким образом, чтобы источники коррелированного сигнала лежали на прямой линии, параллельной биссектрисе угла между подрешетками (в простейшем случае две такие подрешетки параллельны друг другу и расположены по обе стороны объекта). Меняя времена задержек, можно перемещать эту прямую параллельно самой себе, а изменяя ориентацию подрешеток – покрыть такими прямыми под разными углами всю исследуемую область, получая тем самым классическую томографическую схему окончательного восстановления объекта. Упрощение конструкции достигается тут ценой увеличения общего времени накопления информации в процессе углового сканирования.

При рассмотрении акустотермографических задач следует учитывать тот факт, что вклад в интенсивность акустического излучения от элемента объема dV пропорционален локальным значениям температуры $T(\mathbf{r})$ и коэффициента поглощения: $dI \sim \alpha(\mathbf{r})T(\mathbf{r})dV$, поэтому для количественной оценки $T(\mathbf{r})$ с точностью ~0.1° необходимо иметь высокоточную (~10^{-4}) картину распределения коэффициента поглощения, что резко усложняет задачу. С помощью активной акустической томографии можно получить распределения коэффициента поглощения и фазо-

вых скоростей [10], проблемой при этом остается достижение необходимой точности. Эти же данные можно использовать для уточнения программы формирования изображения в случае, когда степень неоднородности среды существенно искажает вид функций Грина и, тем самым, регулярную форму волновых фронтов и гипербол. Так или иначе, в комбинации с активной акустической томографией, термография может дать ценную диагностическую информацию (даже в виде распределения $\alpha(\mathbf{r})T(\mathbf{r})$) в дополнение к томографическому изображению акустических параметров среды.

ПРИЛОЖЕНИЕ I.

Пусть функция когерентности источников имеет вид

$$\Gamma_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = A(\mathbf{r}_1)\Gamma^0_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)A^+(\mathbf{r}_2). \qquad (I.1)$$

Допустим при этом, что известна функция когерентности излучения в дальней зоне, которую можно описать в виде когерентности излучения в направлениях $\hat{\mathbf{k}}_1$ и $\hat{\mathbf{k}}_2$ ($\hat{\mathbf{k}}_{1,2} = \mathbf{k}_{1,2}/\|\mathbf{k}_{1,2}\|$) на частоте k_0 формулой

$$\tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \Phi|_{\mathbf{r}_1}\{A(\mathbf{r}_1)\Gamma^0_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)A^+(\mathbf{r}_2)\}\Phi^+|_{\mathbf{r}_2}, \qquad (I.2)$$
$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = k_0,$$

где Φ и Φ^+ символизируют прямое и обратное преобразование Фурье.

По каждому из аргументов в (I.2) имеет место свертка спектров:

$$\tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \tilde{A}(\mathbf{k}_1) \otimes \tilde{\Gamma}^0_{ff}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \otimes \tilde{A}^+(\mathbf{k}_2) =$$
$$= \iint\limits_K \tilde{A}(\vec{\xi}_1)\tilde{\Gamma}^0_{ff}(\mathbf{k}_1 - \vec{\xi}_1, \mathbf{k}_2 - \vec{\xi}_2)\tilde{A}^+(\vec{\xi}_2)d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2. \qquad (I.3)$$

Если функция когерентности $\tilde{\Gamma}^0_{ff}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ пространственно квазиоднородна, то

$$\tilde{\Gamma}^0_{ff}(\mathbf{k}_1 - \vec{\xi}_1, \mathbf{k}_2 - \vec{\xi}_2) \approx$$
$$\approx \gamma_0(\mathbf{k}_2 - \vec{\xi}_2)\delta(\mathbf{k}_1 - \vec{\xi}_1 - \mathbf{k}_2 + \vec{\xi}_2). \qquad (I.4)$$

Тогда

$$\tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \int\limits_K \tilde{A}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \vec{\xi}_2) \times$$
$$\times \gamma_0(\mathbf{k}_2 - \vec{\xi}_2)\tilde{A}^+(\vec{\xi}_2)d\vec{\xi}_2. \qquad (I.5)$$

Положив $\gamma_0(\mathbf{k}_2 - \vec{\xi}_2) \equiv 1$, для функции автокогерентности процесса A имеем

$$\tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \tilde{\Gamma}_{AA}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \qquad (I.6)$$

Используя теорему Винера–Хинчина (ее применение не является строгим, т.к. $\tilde{\Gamma}_{AA}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ определена лишь на круге $\|\mathbf{k}\| < 2k_0$), можно получить известное из [9] соотношение для мощности некоррелированных источников:

$$I_A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})A^+(\mathbf{r}) = \Phi_{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}\{\tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\}. \qquad (I.7)$$

Используя разложение по базису $\Gamma_i(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, для спектра функции когерентности поля более сложной структуры, имеем

$$\tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \int\limits_{S_{0,k_0}} \sum_i \tilde{A}_i(\mathbf{k}_1 - \vec{\eta}) \times$$
$$\times \tilde{A}_i^+(\mathbf{k}_2 - \vec{\eta})\gamma_i(\vec{\eta})d\vec{\eta}, \qquad (I.8)$$

где произведена замена переменных $\mathbf{k}_2 - \vec{\xi}_2 = \vec{\eta}$ и интегрирование производится по сфере S_{0,k_0} с центром в 0 и радиусом, равным k_0; $\gamma_i(\vec{\eta})$ – базис разложения в Фурье-пространстве.

Коэффициенты разложения $A_i(\mathbf{r})$ имеют узкий спектр, базисные же функции $\Gamma_i(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ обладают широким спектром.

ПРИЛОЖЕНИЕ II.

ММП-оценку спектра $\tilde{\Gamma}_{AA}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ можно получить из логарифма функционала правдоподобия, который для одиночного измерения (с точностью до постоянного слагаемого) имеет вид

$$\ln W\{\tilde{U}(\mathbf{k})\} \sim -\ln\det\tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) -$$
$$-\iint\limits_K \tilde{U}(\mathbf{k}_1)\tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\tilde{U}^+(\mathbf{k}_2)d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \qquad (II.1)$$

При накоплении M независимых измерений $\tilde{U}(\mathbf{k})$ выборочная функция когерентности вида

$$\tilde{\Gamma}^э_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \tilde{U}_m(\mathbf{k}_1)\tilde{U}^+_m(\mathbf{k}_2) \qquad (II.2)$$

используется в уравнении для получения оценки $\tilde{\Gamma}_{AA}(\mathbf{k})$:

$$\int_K \ldots \int \tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\delta \tilde{\Gamma}_{AA}(\mathbf{k})} \tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \times$$

$$\times \tilde{\Gamma}^{э}_{UU}(\mathbf{k}_4, \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_4 = \qquad \text{(II.3)}$$

$$= \iint_K \tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)}{\delta \tilde{\Gamma}_{AA}(\mathbf{k})} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2.$$

Коррелятор $\tilde{\Gamma}^{э}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ может включать в себя не только функцию когерентности (I.6), но и корреляцию ошибок измерения $\tilde{N}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$:

$$\tilde{\Gamma}^{э}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + \tilde{N}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \tilde{\Gamma}_{AA}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \tilde{N}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \qquad \text{(II.4)}$$

Из (I. 6) следует, что

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\delta \tilde{\Gamma}_{AA}(\mathbf{k})} \sim \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}), \qquad \text{(II.5)}$$

тогда для оценки $\tilde{\Gamma}_{AA}(\mathbf{k})$ имеем нелинейное интегральное уравнение

$$\iiint_K \tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}) \tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \tilde{\Gamma}^{э}_{UU}(\mathbf{k}_4, \mathbf{k}_1) \times$$

$$\times d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 = \int_K \tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1. \qquad \text{(II.3a)}$$

Приближенные решения уравнения (II.3а) можно получить, предварительно тождественно переписав его правую часть в виде

$$\int_K \tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 \equiv \iiint_K \tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) \times$$

$$\times \tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \qquad \text{(II.6)}$$

и одинаково изменяя множитель $\tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}\tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}$ слева и справа в (II.3а) после замены (II.6). В частности, при доминирующем влиянии помехи, когда $\|\tilde{N}\| \gg \|\tilde{\Gamma}_{UU}\|$, возможна замена $\tilde{\Gamma}^{-1}_{UU} \approx \tilde{N}^{-1}$. Когда N имеет δ-коррелированный характер, выражение (II.3а) преобразуется к особенно простому виду:

$$\int_K \tilde{\Gamma}^{э}_{UU}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1 = \int_K [\tilde{\Gamma}_{AA}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) + n_0 E(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_1)] d\mathbf{k}_1, \qquad \text{(II.7)}$$

где n_0 – спектральная плотность помехи в K-пространстве; откуда, учитывая (I.6), следует оценка для $\tilde{A}(\mathbf{k})\tilde{A}^{+}(\mathbf{k})$:

$$\tilde{A}(\mathbf{k})\tilde{A}^{+}(\mathbf{k}) = \frac{\int_K [\tilde{\Gamma}^{э}_{UU}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) - n_0 E(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_1)] d\mathbf{k}_1}{\int_K d\mathbf{k}_1}, \qquad \text{(II.8)}$$

где знаменатель является нормирующей мерой в K-пространстве.

В случае слабой помехи и достаточно "надежной" оценки $\tilde{\Gamma}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ с помощью $\tilde{\Gamma}^{э}_{UU}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ возможна замена в (II.3а) $\tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}\tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}$ на $\tilde{\Gamma}^{э\,-1}_{UU}\tilde{\Gamma}^{э\,-1}_{UU}$. Оценку $\hat{\tilde{A}}\tilde{A}^{+}$ можно использовать как окончательную или для построения $\tilde{\Gamma}^{-1}_{UU}$ на первом шаге итерационного процесса решения уравнения (II.3а).

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабий В.И.* Перенос акустической энергии в поглощающей и излучающей среде // Морские гидрофизические исследования. 1974. Т. 65. № 2. С. 189–192.
2. *Гуляев Ю.В., Годик Э.Э., Дементиенко В.В., Пасечник В.И., Рубцов А.А.* О возможностях акустической термографии биологических объектов // ДАН. 1985. Т. 283. № 6. С. 1495–1499.
3. *Троицкий В.С., Густов А.В., Белов Н.Ф., Плечков В.М., Горбачев В.П., Сизьмина Л.К.* О возможности использования собственного теплового СВЧ радиоизлучения тела человека для измерения температуры его внутренних органов: результаты и перспективы // УФН. 1981. Т. 134. № 1. С. 155–158.
4. *Bowen T.* Acoustic Passive Remote Temperature Sensing // Acoust. Imag. 1982. P. 549–561.

5. *Пасечник В.И.* Оценка чувствительности метода акустотермографии // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 4. С. 718–724.
6. *Аносов А.А., Пасечник В.И.* Сравнение чувствительности акустотермометров различных типов // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 2. С. 207–212.
7. *Вилков А.Е., Мансфельд А.Д., Рейнман А.М., Санин А.Г.* Многолучевая акустотермография // III сессия Российского акустического общества. Акустика и Медицина. М., 1994. С. 48–50.
8. *Аносов А.А., Пасечник В.И.* Пространственная обратная задача рассеяния акустотермографии // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 6. С. 885–889.
9. *Devaney A.J.* The inverse problem for random sources // J. Math. Phys. 1979. 20(8). August. P. 1687–1691.
10. *Burov V.A., Rychagov M.N., Saskovets A.V.* Account of multiple scattering in acoustic inverse problems of tomographic type // Acoust. Imag. 1992. P. 35–39

Statistic Inverse Wave Problems of Thermoacoustic Tomography

V. A. Burov and E. E. Kasatkina

The problem of optimal estimation of the internal temperature distribution within a heated lossy medium from observations of thermal radiation is solved in the wave approximation. The block diagram of a thermotomograph is proposed. Simplified versions of implementing the correlation method (very complicated numerically) are considered. The potential sensitivity of the algorithm is estimated. The possibility of detecting regions of ~1 mm^2 with a temperature contrast of ~0.1°C is demonstrated.