АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1997, том 43, № 2, с. 182–186

УДК 539.3 : 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОДОЛЬНЫХ И СПИРАЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

© 1997 г. **В. И. Ерофеев**

Нижегородский филиал института машиноведения РАН
603024 Н. Новгород, ул. Белинского, 85

Поступила в редакцию 06.10.95 г.

Изучаются многоволновые нелинейные резонансные взаимодействия упругих волн в твердом теле с микроструктурой. Описание проводится в рамках модели среды с моментными напряжениями (континуум Леру), обобщенной на случай учета геометрической и физической нелинейностей. Показано, что наличие квадратичной нелинейности приводит к резонансным взаимодействиям трех волн, одна из которых является плоскополяризованной продольной и две – циркулярнополяризованными (спиральными) сдвиговыми волнами. Частоты и волновые числа взаимодействующих волн связаны условиями фазового синхронизма и удовлетворяют дисперсионным уравнениям. Установлено, что в среде реализуется эффект распадной неустойчивости, когда продольная волна высокой частоты распадается на две сдвиговые волны более низких частот. Процесс взаимодействия проявляется в виде пространственных биений. Длина волны огибающей уменьшается с увеличением амплитуды продольной волны.

Наличие кубической нелинейности приводит к возможности реализации четырехволновых резонансных взаимодействий спиральных сдвиговых волн.

Модели сред с моментными напряжениями были предложены Леру в 1911 г. [1] и в настоящее время широко используются при описании статических и динамических процессов в твердых телах с микроструктурой. В частности, в работе [2] продемонстрирована эффективность использования таких моделей для описания дисперсии продольных волн в металлах и сплавах; в [3] – в зернистых композитах. В предыдущих работах автора [4–6] были исследованы особенности распространения нелинейных продольных и нелинейных сдвиговых волн в моментных средах, процесс взаимодействия различных типов волн при этом не изучался. В данной статье рассматриваются многоволновые нелинейные резонансные взаимодействия: трехволновые взаимодействия продольных и спиральных сдвиговых волн; четырехволновые взаимодействия спиральных сдвиговых волн.

Одномерные волны, распространяющиеся вдоль оси x в среде с моментными напряжениями, описываются уравнениями [7]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_l^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4c_\tau^2 M^2(1+\nu)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g_1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{g_2}{2}\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|^2 + \frac{g_3}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 + g_4\frac{\partial u}{\partial x}\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|^2\right];$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} - c_\tau^2\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial x^2} + 4c_\tau^2 M^2 \operatorname{sign} M\frac{\partial^4 \mathbf{W}}{\partial x^4} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[g_2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + g_4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + g_5\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|^2\right], \tag{2}$$

где $u = u_1(x, t)$ – продольное перемещение; $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ – вектор поперечных перемещений; ρ – плотность материала; $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$, соответственно, скорости продольных и сдвиговых волн в материале при отсутствии моментных напряжений; M и ν – константы, характеризующие микроструктуру среды ($M \sim 0.1d$, где d – средний диаметр зерна [2, 3]);

$$g_1 = 3\lambda + 6\mu + 2A + 6B + 2C;$$

$$g_2 = \frac{\lambda}{2} + \mu + \frac{A}{4} + \frac{B}{2};$$

$$g_3 = 3\left[\frac{\lambda}{2} + \mu + 2A + 6B + 2C + 4(D + G + H + J)\right];$$

$$g_4 = \frac{\lambda}{2} + \mu + \frac{5}{4}A + \frac{7}{2}B + C + 2J + \frac{3}{2}G + H;$$

$$g_5 = 3\left(\frac{\lambda}{2} + \mu + \frac{A}{2} + B + J\right).$$

Здесь λ, μ – константы Ламе второго, A, B, C – константы Ландау третьего и D, G, H, J – четвертого порядков. Решение уравнений (1), (2) будем искать в виде набора бегущих квазигармонических волн с медленно меняющимися комплексными амплитудами (A_n, B_j):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} A_n(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{i(\Omega_n t - K_n x + \varphi_n^{(0)})} + \text{компл. сопр.} + \varepsilon Q_1(x,t); \tag{3}$$

$$\mathbf{W}(x,t) = \sum_{j=1}^{L} B_j(\varepsilon x, \varepsilon t)\begin{pmatrix} 1/2 \\ i/2 \end{pmatrix} e^{i(\omega_j t - k_j x + \theta_j^{(0)})} + \text{компл. сопр.} + \varepsilon Q_2(x,t), \tag{4}$$

где Ω, ω – частоты волн; K, k – их волновые числа; $\varphi^{(0)}$, $\theta^{(0)}$ – начальные сдвиги фаз; $Q_{1,2}$ – малые добавки ($\varepsilon \ll 1$). При выборе вида решения предполагалось, что продольные волны являются плоскополяризованными, а сдвиговые волны – циркулярнополяризованными (спиральными).

Из анализа дисперсионных соотношений следует, что в моментной среде реализуется резонансное взаимодействие трех волн, две из которых – сдвиговые и одна – продольная (рис. 1). Частоты и волновые числа этих волн связаны условиями синхронизма

$$\Omega = \omega_1 \pm \omega_2, \qquad K = k_1 \pm k_2 + \Delta k \tag{5}$$

и удовлетворяют дисперсионным соотношениям

$$\Omega = c_l K\left[1 + 4M^2(1+\nu)K^2\frac{c_\tau^2}{c_l^2}\right]^{1/2}, \tag{6}$$

$$\omega_{1,2} = c_\tau k_{1,2}[1 + 4M^2 \operatorname{sign} M k_{1,2}^2]^{1/2}. \tag{7}$$

Рассмотрим случай, когда высокочастотной является продольная волна (т.е. $\Omega = \omega_1 + \omega_2$).

Система укороченных уравнений для описания комплексных амплитуд взаимодействующих волн имеет вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{d\Omega}{dK}\frac{\partial A_1}{\partial x} = -\frac{\Gamma}{\Omega}B_1 B_2 e^{i\Xi}; \\
\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{d\omega_1}{dk_1}\frac{\partial B_1}{\partial x} = \frac{\Gamma}{\omega_1}A_1 B_2^* e^{-i\Xi}; \\
\frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{d\omega_2}{dk_2}\frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{\Gamma}{\omega_2}A_1 B_1^* e^{-i\Xi}; \\
\Gamma = -k_1 k_2 K g_2/2\rho.
\end{gathered} \tag{8}$$

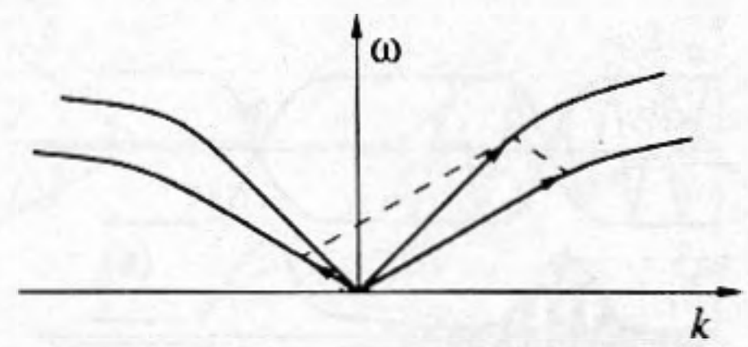

Рис. 1. Тройка резонансно взаимодействующих волн.

Здесь $\Xi = \theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)} - \varphi^{(0)} + \Delta k x$. Система (8) обладает интегралом движения, имеющим смысл закона сохранения энергии, который записывается в виде уравнения переноса

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_0 + E_1 + E_2) + \frac{\partial}{\partial x}(S_0 + S_1 + S_2) = 0, \tag{9}$$

где $E_{1,2} = \omega_{1,2}^2 |B_{1,2}|^2$ – плотности энергий сдвиговых и $E_0 = \Omega^2|A_1|^2$ – продольной волн; $S_{1,2} = \dfrac{d\omega_{1,2}}{dk_{1,2}}E_{1,2}$; $S_0 = \dfrac{d\Omega}{dK}E_0$ – плотности потоков энергий. Кроме того, для системы (9) выполняются частотно-энергетические соотношения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_0}{\Omega} + \frac{E_1}{\omega_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_0}{\Omega} + \frac{S_1}{\omega_1}\right) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_0}{\Omega} + \frac{E_2}{\omega_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_0}{\Omega} + \frac{S_2}{\omega_2}\right) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_1}{\omega_1} - \frac{E_2}{\omega_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_1}{\omega_1} - \frac{S_2}{\omega_2}\right) = 0,
\end{gathered} \tag{10}$$

являющиеся континуальным аналогом соотношений Мэнли–Роу [8], известных в теории нелинейных колебаний.

В стационарном случае ($\partial/\partial t = 0$) из соотношений (10) следует

$$\frac{S_0}{\Omega} + \frac{S_1}{\omega_1} = \text{const}, \quad \frac{S_0}{\Omega} + \frac{S_2}{\omega_2} = \text{const}, \quad \frac{S_1}{\omega_1} - \frac{S_2}{\omega_2} = \text{const}. \tag{11}$$

Эти соотношения показывают, что в среде наблюдается эффект распадной неустойчивости, когда продольная волна высокой частоты Ω распадается на две сдвиговые волны более низких частот ω_1 и ω_2. При этом распределение энергии

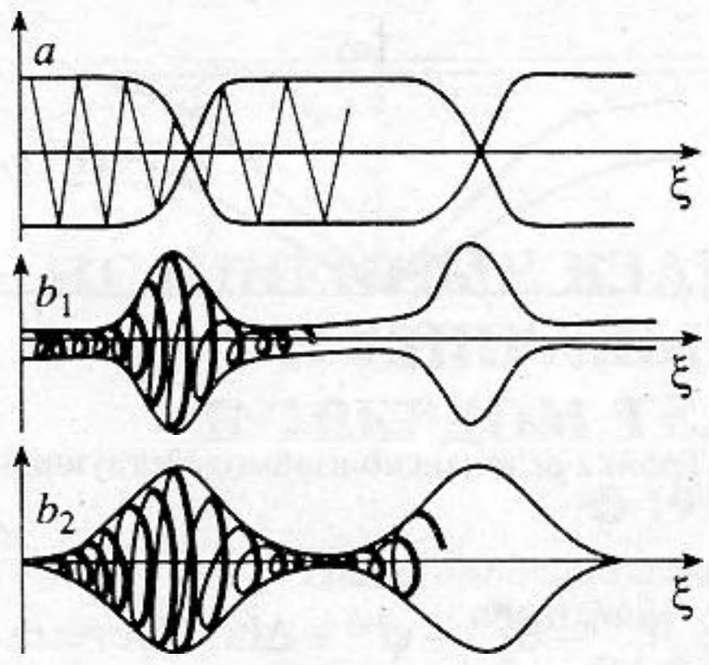

Рис. 2. Процесс взаимодействия квазигармонических волн.

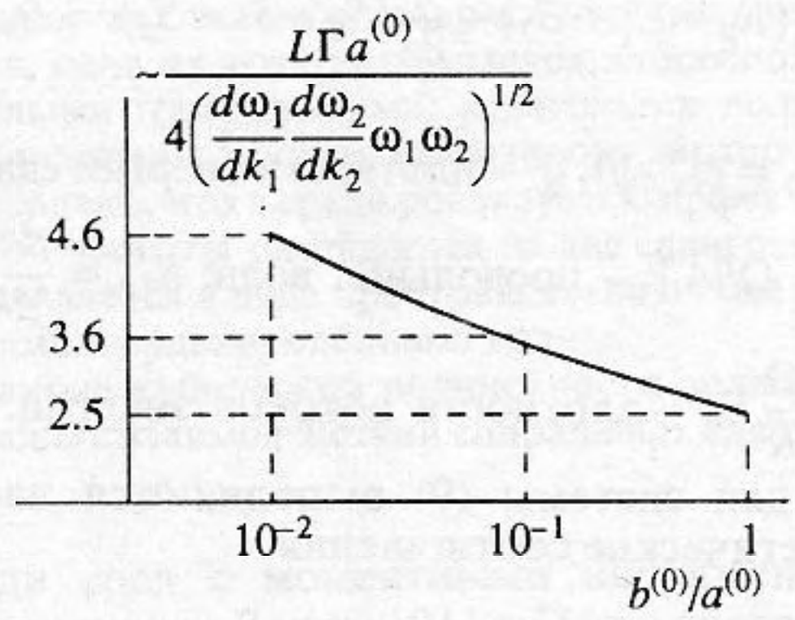

Рис. 3. Зависимость длины волны огибающей от отношения значений амплитуд волн на границе.

между сдвиговыми волнами описывается выражением

$$S_j = \frac{\omega_j}{\Omega} S_0 \quad (j = 1, 2), \tag{12}$$

позволяющим оценить предельное усиление сдвиговых волн за счет продольной волны. Если пренебречь влиянием кубической нелинейности, то систему (8) можно решить аналитически. В стационарном случае ($\partial t/\partial t = 0$) при точном выполнении условий синхронизма ($\Delta k = 0$) и граничных условиях

$$a(0) = a^{(0)};\ b_1(0) = b^{(0)};\ b_2(0) = 0, \tag{13}$$

где $b_{1,2}$, a – действительные амплитуды сдвиговых и продольной волн ($A_1 = ae^{i\varphi}$, $B_{1,2} = b_{1,2}e^{i\theta_{1,2}}$) решения этой системы имеют вид:

$$a(x) = a^{(0)}\mathrm{sn}\xi,$$

$$b_1(x) = \left[\frac{(d\Omega/dK)\Omega}{(d\omega_1/dk_1)\omega_1}\right]^{1/2} \frac{a^{(0)}}{s}\mathrm{dn}\xi,$$

$$b_2(x) = \left[\frac{(d\Omega/dK)\Omega}{(d\omega_2/dk_2)\omega_2}\right]^{1/2} a^{(0)}\mathrm{cn}\xi, \tag{14}$$

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{2} = \mathrm{const},$$

$$\xi = \mathbf{K} + \frac{a^{(0)}\Gamma x}{s\sqrt{\dfrac{d\omega_1}{dk_1}\dfrac{d\omega_2}{dk_2}\omega_1\omega_2}},$$

где $\mathbf{K}$ – полный эллиптический интеграл первого рода;

$$s = a^{(0)}\left(\frac{d\Omega}{dK}\Omega\right)^{1/2} \Big/ \sqrt{\frac{d\omega_1}{dk_1}\omega_1(b^{(0)})^2 + \frac{d\Omega}{dK}\Omega(a^{(0)})^2}$$

– модуль эллиптической функции. Процесс взаимодействия проявляется в виде пространственных биений (рис. 2). Длина волны огибающей, т.е. расстояние, на котором происходит эффективный обмен энергией между взаимодействующими волнами, описывается соотношением

$$L = 4\mathbf{K}s\sqrt{\frac{d\omega_1}{dk_1}\frac{d\omega_2}{dk_2}\omega_1\omega_2}/\Gamma a^{(0)}. \tag{15}$$

Величина этого расстояния определяется тремя основными параметрами: амплитудой продольной волны при $x = 0$ ($a^{(0)}$), соотношением амплитуды сдвиговой волны к амплитуде продольной волны при $x = 0$ ($b^{(0)}/a^{(0)}$) и частотой продольной волны (Ω). Наблюдается уменьшение длины волны огибающей с ростом значений перечисленных параметров: $L \sim (a^{(0)})^{-1}$ (при фиксированных Ω, $b^{(0)}/a^{(0)}$); $L \sim \Omega^{-2}$ (при фиксированных значениях $a^{(0)}$, $b^{(0)}/a^{(0)}$). Закон уменьшения L с ростом отношения $b^{(0)}/a^{(0)}$ показан на рис. 3.

Расчеты проводились для алюминиевого сплава Д16, для которого упругие модули $\lambda = 6.99 \times 10^{10}$ Н/м^2, $\mu = 2.75 \times 10^{10}$ Н/м^2, $A = -168 \times 10^{10}$ Н/м^2, $B = -64 \times 10^{10}$ Н/м^2; плотность $\rho = 2.7 \times 10^3$ кг/м^3; средний диаметр зерна $d = 2 \times 10^{-5}$ м [2]. Длина волны огибающей $L \approx 0.5$ м при амплитуде продольной волны $a^{(0)} \sim 10^{-7}$ м, частоте $f = \Omega/2\pi \approx 6 \times 10^6$ Гц (длина продольной волны $\Lambda \sim 10^{-3}$ м). Значения параметров выбирались из соображений физической реализуемости, поскольку должно выполняться условие упругого деформирования материала, следовательно: $a^{(0)} \sim \Lambda\varepsilon_{xx}$, где $\varepsilon_{xx} \sim 10^{-4}$ – упругая деформация и, кроме того, длина продольной волны должна быть значительно больше диаметра зерна в материале ($\Lambda \sim 10^2 d$).

При отсутствии продольной волны ($u = 0$) плоские сдвиговые волны в среде с моментными напряжениями описываются уравнением (2), содержащим слагаемые в третьей степени относи-

тельно $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}$. Наличие кубической нелинейности приводит к возможности реализации четырехволновых резонансных взаимодействий квазигармонических волн.

На рис. 4 схематично изображены возможные типы четырехволновых процессов: слияние трех волн в одну (а), распад волны на три (б), взаимодействие двух волн, приводящее к генерации двух других волн (в) [9]. Рассмотрим четырехволновые взаимодействия с образованием волн суммарной частоты (рис. 4а), определяемые условиями синхронизма

$$\begin{aligned} \omega_4 &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\ k_4 &= k_1 + k_2 + k_3 + \Delta k. \end{aligned} \tag{16}$$

Решение будем искать в виде циркулярнополяризованных (спиральных) волн

$$\mathbf{W} = \sum_{n=1}^{4} B_n(\varepsilon x)\begin{pmatrix} 1/2 \\ i/2 \end{pmatrix} e^{i(\omega_n t - k_n x)} + \text{компл. сопр.} \tag{17}$$

Подставляя решение в уравнение движения и используя метод медленно меняющихся амплитуд, получим систему уравнений, определяющую четырехволновые взаимодействия

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial x} &= \frac{i3g_5\exp(-i\Delta kx)}{2\rho v_{\text{гр}_1}^2}\frac{k_1k_2k_4}{k_1}B_2^*B_3^*B_4, \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} &= \frac{i3g_5\exp(-i\Delta kx)}{2\rho v_{\text{гр}_2}^2}\frac{k_1k_3k_4}{k_2}B_1^*B_3^*B_4, \\ \frac{\partial B_3}{\partial x} &= \frac{i3g_5\exp(-i\Delta kx)}{2\rho v_{\text{гр}_3}^2}\frac{k_1k_2k_4}{k_3}B_1^*B_2^*B_4, \\ \frac{\partial B_4}{\partial x} &= \frac{i3g_5\exp(i\Delta kx)}{2\rho v_{\text{гр}_4}^2}\frac{k_1k_2k_3}{k_4}B_1B_2B_3, \end{aligned} \tag{18}$$

где $v_{\text{гр}_i}$ – групповые скорости сдвиговых волн.

Простейшим типом взаимодействий является взаимодействие четырех волн с одинаковыми скоростями, при которых выполняются условия синхронизма (16). Естественно, что в среде с дисперсией скорости волн на разных частотах различны, однако, сделанное предположение о равенстве скоростей допустимо, если в условиях синхронизма введена расстройка $\Delta k \neq 0$ [10]. Считая, что $B_4 \ll B_1 \sim B_2 \sim B_3$, решение системы (18) с учетом граничных условий при $x = 0$

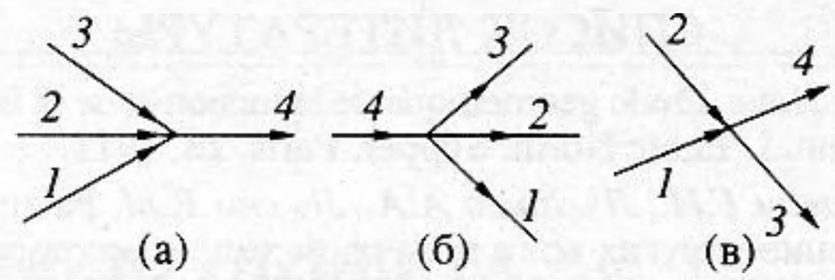

Рис. 4. Схематическое изображение возможных типов четырехволновых процессов.

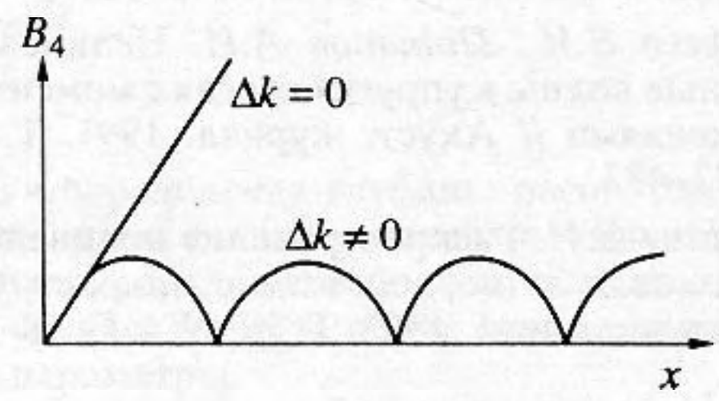

Рис. 5. Зависимость амплитуды высокочастотной волны от расстройки волновых чисел и координаты.

$$\begin{aligned} B_1 &= B_1^{(0)},\ B_2 = B_2^{(0)},\ B_3 = B_3^{(0)}, \\ B_4 &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

запишется следующим образом:

$$B_4 = \frac{3g_5k_1k_2k_3B_1^{(0)}B_2^{(0)}B_3^{(0)}}{2\rho v\Delta k}(e^{i\Delta kx} - 1). \tag{20}$$

При $\Delta k = 0$ выражение (20) преобразуется к виду

$$B_4 = i3g_5k_1k_2k_3B_1^{(0)}B_2^{(0)}B_3^{(0)}x/2\rho v^2. \tag{21}$$

Зависимость действительной части амплитуды волны с частотой ω_4 от расстройки волновых чисел и координаты приведена на рис. 5. Она будет такой же, как у второй гармоники в среде с дисперсией [11].

Амплитуда волны с частотой ω_4 определяется модулями упругости второго, третьего и четвертого порядков (g_5), следовательно, если удастся экспериментально измерить максимум амплитуды $B_4^{\max}$ и расстояние, на котором этот максимум достигается (x^*), то можно будет вычислить модуль упругости четвертого порядка (J).

Без учета дисперсии в приближении заданного поля волн B_1, B_2, B_3, как видно из выражения (21), четырехволновые процессы приводят к линейной зависимости амплитуды B_4 от расстояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Le Roux*, Etude geometrique de la torsion et de la flexion // Ann. L'Ecole Norm. Supper, Paris, 28, 1911.
2. *Савин Г.Н., Лукашев А.А., Лыско Е.М.* Распространение упругих волн в твердом теле с микроструктурой // Прикл. механика. 1970. Т. 6. № 7. С. 48–52.
3. *Ерофеев В.И., Родюшкин В.М.* Наблюдение дисперсии упругих волн в зернистом композите и математическая модель для ее описания // Акуст. журнал. 1992. Т. 38. № 6. С. 1116–1117.
4. *Ерофеев В.И., Потапов А.И.* Нелинейные продольные волны в упругих средах с моментными напряжениями // Акуст. журнал. 1991. Т. 37. № 3. С. 477–483.
5. *Ерофеев В.И.* Распространение нелинейных сдвиговых волн в твердом теле с микроструктурой // Прикл. механика. 1993. Т. 29. № 4. С. 18–22.
6. *Ерофеев В.И.* Плоские стационарные волны в поврежденной среде с микроструктурой // Акуст. журнал. 1994. Т. 40. № 1. С. 67–70.
7. *Erofeyev V.I., Potapov A.I.* Nonlinear wave processes in a elastic media with inner structure // Nonlinear world. World Scient. Pabl. Comp. 1990. V. 2. P. 1197–1215.
8. Основы теории колебаний / Под ред. Мигулина В.В. М.: Наука, 1978. 392 с.
9. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
10. *Барышникова Л.Ф.* Четырехфононные взаимодействия объемных волн в кристаллах // Акуст. журнал. 1982. Т. 28. № 2. С. 157–163.
11. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.

Nonlinear Interactions of Longitudinal and Helical Shear Waves in a Solid Body with a Microstructure

V. I. Erofeeev

We studied the multiwave nonlinear resonance interactions of elastic waves in a solid body with a microstructure. The study was carried out with a model of a medium with moment stresses (Le Roux continuum) generalized to account for geometrical and physical nonlinearities. A square-law nonlinearity was shown to cause the resonance interaction of three waves: a plane-polarized longitudinal shear wave and two shear waves of circular polarization (helical waves). The frequencies and wave numbers of interacting waves were related by the conditions of phase synchronism and they satisfy the dispersion equations. The effect of splitting instability was found to take place in the medium when a longitudinal high-frequency wave was split into two shear lower frequency wave. The interaction manifested itself by space beat. The envelope wavelength decreased with an increase of the longitudinal wave amplitude. A cubic nonlinearity may cause four-wave resonance interactions of helical shear waves.